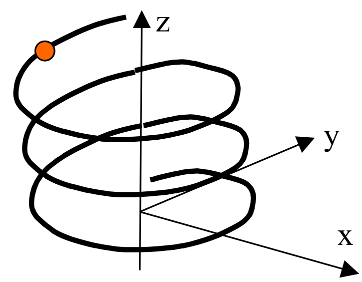
ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Ζ΄ Σειρά Ασκήσεων

1. Το άθροισμα διανυσμάτων ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα δηλαδή $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, συνεπώς δεν έχει σημασία η σειρά που θα εκτελεσθούν δύο μετατοπίσεις ενός σωματιδίου. Γράψτε τον πίνακα στροφής περί τον άξονα y και περί τον άξονα z. Δίνοντας ένα παράδειγμα αποδείξτε ότι η μεταβατική ιδιότητα δεν ισχύει για τις στροφές και άρα οι στροφές δεν μπορεί να είναι διανύσματα. Θεωρείστε τώρα διαφορικές στροφές ($\theta << 1$). Ισχύει τώρα η μεταβατική ιδιότητα;
2. Αποδείξτε ότι ο δ_{ij} που είδαμε στο μάθημα είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. Υπολογίστε χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση τα: $\vec{\nabla}\frac{1}{r}$ και $\nabla^2\frac{1}{r}$, όπου $r=\sqrt{x_k x_k}$.
3. Σωματίδιο εκτελεί επίπεδη ελλειπτική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ω, δηλαδή η θέση του είναι $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, με $\dot{\theta}=\omega$. Ποία η οδογράφος. Υπολογίστε την επιτάχυνση και προσδιορίστε το νόμο της δύναμης που θα προκαλούσε αυτή τη κίνηση.
4. Ποια η μέση τιμή της τάσης του νήματος επίπεδου εκκρεμούς που εκτελεί μικρές ταλαντώσεις;
5. Μία χάνδρα κινείται στο σταθερό πεδίο βαρύτητας χωρίς τριβή πάνω σε μία ορθή κυλινδρική έλικα (βλ. σχήμα). Η θέση του σωματιδίου δίνεται από την παραμετρική εξίσωση $\vec{r}(t)=\hat{i}R\cos\phi+\hat{j}R\sin\phi+\hat{k}a\phi$ όπου ϕ η πολική γωνία. Εάν $ds=\sqrt{d\vec{r}\cdot d\vec{r}}$ είναι το διαφορικό μήκος του τόξου της τροχιάς υπολογίστε το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{e}_t=\frac{d\vec{r}}{ds}$ και αποδείξτε ότι η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $\vec{v}=v\hat{e}_t$, όπου $v=\frac{ds}{dt}$. Αποδείξτε ότι



$\frac{d\hat{e}_t}{dt}=-\frac{Rv}{a^2+R^2}\hat{e}_r$, όπου $\hat{e}_r=\hat{i}\cos\phi+\hat{j}\sin\phi$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. Τι τροχιά διαγράφει το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς της χάντρας; Γράψτε τώρα τις εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου. Εδώ πρέπει να συμπεριλάβετε εκτός από τη δύναμη της βαρύτητας, την αντίδραση η οποία είναι άγνωστη. Το μόνο που ξέρουμε για την δύναμη της αντίδρασης $\vec{F}$ είναι ότι $\vec{F}\cdot\hat{e}_t=0$, διότι δεν υπάρχει τριβή και η αντίδραση πρέπει να είναι κάθετη στη κίνηση της χάντρας. Οπότε έχουμε 4 εξισώσεις για τις τρεις άγνωστες συνιστώσες της δύναμης και την $\dot{v}$. Υπολογίστε με τον τρόπο αυτό την κατακόρυφη θέση του σωματιδίου και αποδείξτε ότι η κίνηση είναι ίδια με την κίνηση της χάνδρας σε κεκλιμένο επίπεδο στο πεδίο βαρύτητας. Σχεδιάστε τη χρονική εξέλιξη των αντιδράσεων. Εάν δεν υπήρχε πεδίο βαρύτητας ποια ποσότητα θα ήταν σταθερή;
6. (***Πρόβλημα βολής με οδογράφο***) Βλήμα βάλλεται υπό γωνία θ (η γωνία που σχηματίζει η αρχική ταχύτητα με την οριζόντιο) στο σταθερό πεδίο βαρύτητας. Η βολή γίνεται από λόφο ύψους h από το έδαφος. Τι καμπύλη διαγράφει η οδογράφος; Σχεδιάστε την οδογράφο και σημειώστε το σημείο Α που αντιστοιχεί στην αιχμή του βέλους της αρχικής ταχύτητας όταν το βλήμα είναι στον λόφο, το σημείο Β όταν το βλήμα φθάσει στο μέγιστο ύψος και το σημείο Γ όταν το βλήμα φθάσει στο έδαφος. Αποδείξτε ότι το βεληνεκές είναι ανάλογο του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ. Για ποια γωνία $A\hat{O}B$ το βεληνεκές είναι μέγιστο όταν η αρχική ταχύτητα έχει δεδομένο μέτρο; Υπολογίστε με τον τρόπο αυτό το μέγιστο βεληνεκές συναρτήσει του h του μέτρου της αρχικής ταχύτητας v_0 και της επιτάχυνσης της βαρύτητας g .

7. (***Παραβολή ασφαλείας)*** Βλήμα βάλλεται στο σταθερό πεδίο βαρύτητας με ταχύτητα v_0. Δεν γνωρίζουμε όμως τη γωνία υπό την οποία γίνεται η βολή. Να προσδιορισθεί η περιοχή του χώρου στην οποία μπορούμε να παρευρισκόμαστε με ασφάλεια.
8. Γράψτε μια οποιαδήποτε συνάρτηση τριών μεταβλητών, $V(x,y,z)$, η οποία να μην απειρίζεται. (α) Κατασκευάστε τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ και υποθέστε ότι αυτή περιγράφει το πεδίο δυνάμεων που ασκείται σε ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας. Εξετάστε αν ο στροβιλισμός αυτής της δύναμης είναι μηδέν. (β) Κατασκευάστε μια κλειστή διαδρομή και υπολογίστε το έργο της δύναμης κατά μήκος αυτής. (γ) Ένας σωλήνας τυχαίου σχήματος ξεκινά από το σημείο (0,0,0) και καταλήγει στο σημείο (1,1,1). Ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας, το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα μέσα σε αυτόν, αφήνεται ακίνητο στο σημείο (0,0,0) και φτάνει στο σημείο (1,1,1). Με τι ταχύτητα; (δ) Κάτω από ποιες προϋποθέσεις θα φθάσει το σωματίδιο στο σημείο (1,1,1);
9. Ένα πεδίο δυνάμεων έχει τη μορφή $\vec{F} = \hat{x}\left(a + f(y)\delta(x)\right)$. Είναι το πεδίο συντηρητικό; [Υπολογίστε τον στροβιλισμό της δύναμης, αλλά και το έργο της δύναμης κατά μήκος της κλειστής διαδρομής: $(-\varepsilon, y_0) \to (\varepsilon, y_0) \to (\varepsilon, y_0 + \Delta y) \to (-\varepsilon, y_0 + \Delta y) \to (-\varepsilon, y_0)$].
10. Ένα πεδίο δυνάμεων έχει τη μορφή $\vec{F} = \dfrac{\hat{e}_\theta}{r}$, όπου $\hat{e}_\theta$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση αύξησης της πολικής συντεταγμένης θ. Κατασκευάστε μια κλειστή διαδρομή (α) που να μην περιέχει και (β) που να περιέχει την αρχή των αξόνων, και η οποία να αποτελείται από ακτινικά τμήματα και κυκλικά τόξα. Ποιο το έργο της δύναμης κατά μήκος της κλειστής αυτής διαδρομής; Γράψτε τη δύναμη σε καρτεσιανές συντεταγμένες και υπολογίστε τον στροβιλισμό αυτής. Είναι το πεδίο αυτό συντηρητικό; Απαντήστε στις ίδιες ερωτήσεις για ένα πεδίο της ίδιας μορφής, αλλά με $\hat{e}_r$ στη θέση του $\hat{e}_\theta$.
11. Υπολογίστε τη βαρυτική δύναμη σε απόσταση r από μια απείρων διαστάσεων απειροστά λεπτή πλάκα με επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ.
12. Υπολογίστε το δυναμικό σε κάθε σημείο εξαιτίας μιας κοίλης σφαίρας (σταθερής πυκνότητας) με εσωτερική ακτίνα r και εξωτερική ακτίνα R. Ποια η ένταση του βαρυτικού πεδίου στο εσωτερικό και το εξωτερικό της σφαίρας;
13. Δείξτε ότι μια τριάδα αριθμών (b_x, b_y, b_z) αποτελεί διάνυσμα αν και μόνο αν για κάθε διάνυσμα $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, η ποσότητα $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ είναι αναλλοίωτο μέγεθος.
14. Ελέγξτε αν οι ακόλουθες τριάδες αριθμών αποτελούν διάνυσμα: (α) $(a_x, 2a_y, 3a_z)$, και (β) $\left(\dfrac{\partial a_x}{\partial x}, \dfrac{\partial a_y}{\partial y}, \dfrac{\partial a_z}{\partial z}\right)$, όπου η τριάδα (a_x, a_y, a_z) αποτελεί διανυσματικό πεδίο .
15. (α) Σε δύο διαστάσεις η στοιχειώδης επιφάνεια μεταξύ δύο διαφορικών διανυσμάτων $d\vec{a}, d\vec{b}$ ορίζεται ως $dS \equiv da_x db_y - da_y db_x$. Δείξτε ότι η ποσότητα αυτή είναι μονόμετρο μέγεθος. (β) Σε τρεις διαστάσεις η στοιχειώδης επιφάνεια ορίζεται ως: $d\vec{S} \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ da_x & da_y & da_z \\ db_x & db_y & db_z \end{vmatrix}$. Δείξτε ότι η τριάδα αυτή αριθμών αποτελεί διάνυσμα.
16. Σχεδιάστε τις δυναμικές γραμμές του πεδίου δυνάμεων $\vec{F} = \Theta(x)\hat{y} + \Theta(y)\hat{x}$. Δείξτε ότι το πεδίο δεν είναι συντηρητικό.
17. Υπολογίστε σε κυλινδρικές συντεταγμένες τον τελεστή βαθμίδα $\vec{\nabla}$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα $dV = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V$.] Στη συνέχεια υπολογίστε τον στροβιλισμό ενός κεντρικού πεδίου: $\vec{\nabla} \times \left(\hat{e}_r f(r)\right)$.