ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι
Στ΄ Σειρά Ασκήσεων

1. Δείξτε ότι αν αφήσουμε να πέσει μια αλυσίδα πάνω σε μια ζυγαριά, αν αρχικά η αλυσίδα είναι κατακόρυφη και το κάτω άκρο της μόλις ακουμπά στο δίσκο της ζυγαριάς, κάθε στιγμή η ένδειξη της ζυγαριάς είναι τριπλάσια του βάρους της αλυσίδας που ήδη βρίσκεται επάνω σ' αυτή.
2. Αρχικά σχηματίζεται μια μικροσκοπική σταγόνα βροχής πυκνότητας ρ_1 που αρχίζει να πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας μέσα ένα νέφος υδρατμών πυκνότητας ρ_2. Κατά την πτώση της η ακτίνα της σταγόνας αυξάνεται αφομοιώνοντας τους υδρατμούς που συναντά κατά την κάθοδό της. Γράψτε την εξίσωση επαύξησης της ακτίνας της σταγόνας. Εάν ασυμπτωτικά η σταγόνα έχει σταθερή επιτάχυνση α ώστε η ταχύτητά της να τείνει στην $u = \alpha t$ για μεγάλους χρόνους, υπολογίστε την επιτάχυνση αυτή συναρτήσει της g.
3. Ένα βλήμα κατά την κίνηση του εκρήγνυται και διαχωρίζεται σε δύο κομμάτια με μάζα τη μισή της αρχικής, τα οποία στο σύστημα του κέντρου μάζας τη στιγμή αμέσως μετά την έκρηξη κινούνται με ταχύτητα u. Να υπολογιστεί η ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την έκρηξη και προσφέρεται ως πρόσθετη κινητική ενέργεια στα θραύσματα. Αν η διαδικασία αυτή συνεχιστεί ώστε οι δύο μάζες να γίνουν τέσσερις, οκτώ, κ.οκ. με διαδοχικές εκρήξεις που προσδίδουν στα θραύσματα ταχύτητα u στο εκάστοτε σύστημα κέντρου μάζας, να υπολογιστεί η συνολική ενέργεια του βλήματος μετά από Ν διαχωρισμούς.
4. (α) Δείξτε ότι η βαθμίδα $\vec{\nabla} f$ μιας συνάρτησης $f(x, y, z)$ είναι διάνυσμα. (β) Έστω $\vec{r} = (x, y, z)$ και $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ δύο διανύσματα. Δείξτε ότι ο ακόλουθος συνδυασμός συνιστωσών των παραπάνω διανυσμάτων μετασχηματίζεται σε στροφές ακριβώς όπως τα διανύσματα: $(yp_z - zp_y, zp_x - xp_z, xp_y - yp_x)$. Το διάνυσμα αυτό καλείται, όπως ξέρετε, εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων και σημειώνεται $\vec{r} \times \vec{p}$.
5. Δείξτε ότι για το δέλτα του Kronecker ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες: (α) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_j \delta_{ij}$, (β) $\vec{a} = a_i \hat{e}_j \delta_{ij}$, όπου $\hat{e}_i$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση-i, (γ) $|\vec{a}| = \sqrt{a_i a_j \delta_{ij}}$, (δ) $\delta_{ii} = 3$, (ε) $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$.
6. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων της Γης που έχουν γεωγραφικό πλάτος και μήκος θ_1, ϕ_1 και θ_2, ϕ_2 αντίστοιχα. Θεωρήστε τη Γη τέλεια σφαίρα ακτίνας R. [Υπ: Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων που συνδέουν το κέντρο της Γης με τα εν λόγω σημεία.]
7. Υπολογίστε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς ενός βλήματος στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του.
8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int (\vec{r} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{a}) dt$ όπου $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ είναι η θέση, η ταχύτητα, και η επιτάχυνση ενός κινητού.
9. Αποδείξτε ότι $\displaystyle\int_{t_0}^{t} dt' \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2}\vec{r} \right) = \hat{e}_r(t) - \hat{e}_r(t_0)$, όπου $r = |\vec{r}|$.