ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Δ΄ Σειρά Ασκήσεων

1. Ένα σωματίδιο κινείται στην ευθεία και η θέση του παρατηρείται ότι είναι $x(t)=|t|$. Προσδιορίστε τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο.
2. Η συνάρτηση $\Theta(t)$ ορίζεται ως $\Theta(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$. Αποδείξτε ότι $\dfrac{d\Theta}{dt}=\delta(t)$ (1).

   Προσδιορίστε τη συνάρτηση Green ελευθέρου σωματιδίου στη Νευτώνεια μηχανική και επιβεβαιώστε κάνοντας χρήση της (1) ότι η λύση ικανοποιεί τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Προσδιορίστε τέλος τη συνάρτηση Green ελευθέρου σωματιδίου στην Αριστοτέλεια μηχανική.
3. Προσδιορίστε τη συνάρτηση Green αρμονικού ταλαντωτή με υπεραπόσβεση $(\gamma>\omega_0)$ και υπολογίστε την εξαναγκασμένη απόκριση του ταλαντωτή στην εξωτερική δύναμη $\cos\omega t$. [Η απάντηση σας πρέπει να συμφωνεί με την έκφραση στην οποία καταλήξαμε στο μάθημα.]
4. **Ιδιότητες τη συνάρτησης $\delta(x)$:** α) Αποδείξτε ότι $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)dx=\frac{1}{|a|}$, β) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f_0-f(x))dx=\sum_n\frac{1}{|f'(x_n)|}$ όπου x_n οι ρίζες της εξίσωσης $f(x_n)-f_0=0$. [Υπόδειξη: αναπτύξτε την $f_0-f(x)$ σε σειρά Taylor περί την κάθε ρίζα της $f(x_n)=f_0$], γ) ολοκληρώνοντας κατά μέρη υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x-a)f(x)$ όπου $\delta'(x-a)=\frac{d}{dx}\delta(x-a)$, δ) υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\delta(x-b)dx$.
5. Ένας αρμονικός ταλαντωτής δίχως τριβές, αρχικά ακίνητος στη θέση ισορροπίας του, υπόκειται σε σειρά εναλλασσόμενων παλμών δύναμης της μορφής $F(t)=mu_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n\tau)$. Να σχεδιασθεί η κίνηση του ταλαντωτή ως συνάρτηση του χρόνου για τ (i) ίσο με το μισό της περιόδου και (ii) ίσο με την περίοδο του ταλαντωτή.
6. Ένας σφαιρικός δορυφόρος ακτίνας r εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από κεντρικό πλανήτη ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση R από το κέντρο του δορυφόρου. Δύο ίσες μάζες m τοποθετημένες αντιδιαμετρικά επί του δορυφόρου συνδέονται με ράβδο μήκους $2r$ που διαπερνά το δορυφόρο. Ο δορυφόρος περιφέρεται γύρω από τον πλανήτη αλλά δεν περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό του. Έτσι η ράβδος που αρχικά "κοιτάζει" κατά τον πλανήτη σχηματίζει γωνία με την επιβατική ακτίνα του δορυφόρου που μεταβάλλεται με το χρόνο. [Αγνοήστε τη βαρυτική έλξη του ίδιου του δορυφόρου και υποθέστε ότι η ράβδος δεν κινείται ως προς το δορυφόρο.] Προσδιορίστε την τάση της ράβδου σα συνάρτηση του χρόνου. Μήπως τώρα μπορείτε να εξηγήσετε γιατί οι παλίρροιες έχουν περίοδο περίπου 12 ώρες και όχι 24 ώρες που είναι η περίοδος περιστροφής της Γης; Αν αντικαταστήσετε τη ράβδο με ένα ελατήριο σταθεράς k και με συντελεστή απόσβεσης γ, σε ποια γωνία ελατηρίου-επιβατικής ακτίνας οι μάζες θα βρίσκονται στη μεγαλύτερη δυνατή απομάκρυνση; Μπορείτε τώρα να εξηγήσετε και γιατί το μέγιστο των παλιρροιών δεν συμβαίνει όταν η Σελήνη βρίσκεται ακριβώς στο ζενίθ της;