29/10/2001

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Γ΄ Σειρά Ασκήσεων

1. Ένας αρμονικός ταλαντωτής κινείται υπό την επίδραση εκτός της δύναμης του ελατηρίου και από μια δύναμη τριβής η οποία αντιτίθεται στην κίνηση αλλά έχει σταθερό μέτρο. Μελετήστε την κίνηση και υπολογίστε την τελική θέση του ταλαντωτή. Είναι η τελευταία ίση με μηδέν; [Υπόδειξη: χωρίστε την κίνηση σε ημιπεριόδους.] Με ποιο τρόπο μειώνεται με την πάροδο του χρόνου το πλάτος της ταλάντωσης;
2. Βρείτε τη χρονική εξέλιξη ταλαντωτή φυσικής συχνότητας ω_0, χωρίς απόσβεση, στον οποίο ασκείται η εξωτερική δύναμη $\cos\omega t$ αν αρχικά $x(0)=\dot{x}(0)=0$. Υπολογίζοντας το όριο $\omega \to \omega_0$ προσδιορίστε τη χρονική εξέλιξη της κίνησης όταν έχουμε συντονισμό.
3. Ένα διατομικό μόριο μπορεί να θεωρηθεί ως δύο μάζες συνδεδεμένες με ένα ελατήριο. Θεωρούμε κίνηση στην ευθεία. Αν αρχικά τα άτομα του μορίου ήταν σε απόσταση ίση με το φυσικό μήκος του ελατηρίου και το ένα άτομο ήταν ακίνητο ενώ το άλλο είχε ταχύτητα v_0 περιγράψτε τη μετέπειτα κίνηση των δύο ατόμων του μορίου.
4. Υπολογίστε το ρυθμό παραγωγής έργου στην περίπτωση ταλαντωτή με συντελεστή απόσβεσης γ και φυσικής συχνότητας ω_0 στον οποίο ασκείται περιοδική δύναμη $F_1\cos\omega t$. Υπολογίστε τη μέση τιμή του ρυθμού αυτού P σε μία περίοδο και επαληθεύστε ότι ισούται με το μέσο ρυθμό ανάλωσης της ενέργειας εξαιτίας της τριβής. Δείξτε ότι η P ως συνάρτηση του ω έχει μέγιστο όταν $\omega=\omega_0$ και βρείτε τις τιμές του ω για τις οποίες η P πέφτει στο μισό της μέγιστης P. Βρείτε τη μέση τιμή της ενέργειας του ταλαντωτή $\overline{E}$. Εάν W είναι το έργο της δύναμης σε μία περίοδο, δείξτε ότι κατά τον συντονισμό $Q=2\pi\dfrac{\overline{E}}{W}$, όπου Q ο συντελεστής ποιότητας που ορίζεται ως $Q\equiv\dfrac{\omega_0}{2\gamma}$.
5. Θεωρήστε έναν ταλαντωτή χωρίς απόσβεση στον οποίο ασκείται η δύναμη $F(t)$. Η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{x}+\omega^2 x=\dfrac{F(t)}{m}$. Αποδείξτε ότι η μεταβλητή $a=\dot{x}+i\omega x$ ικανοποιεί την εξίσωση: $\dot{a}-i\omega a=\dfrac{F(t)}{m}$ και επαληθεύστε ότι η εξίσωση αυτή έχει γενική λύση $a(t)=\exp(i\omega t)\displaystyle\int_0^t \frac{F(s)}{m}\exp(-i\omega s)ds + a(0)\exp(i\omega t)$. Πώς βρίσκεται η θέση του ταλαντωτή από την παραπάνω λύση; Επειδή ο ταλαντωτής κερδίζει ενέργεια από την εξωτερική δύναμη η ενέργεια του ταλαντωτή δεν διατηρείται. Αποδείξτε ότι αν ο ταλαντωτής ήταν αρχικά ακίνητος στο σημείο ισορροπίας ότι η ενέργεια που τελικά θα μεταφερθεί από την εξωτερική δύναμη είναι $E=\dfrac{1}{2m}\left|\displaystyle\int_0^\infty F(t)\exp(-i\omega t)dt\right|^2$. Θεωρήστε ότι ασκείται στον ταλαντωτή η δύναμη $F(t)=\begin{cases} F_0 & 0\le t\le T \\ 0 & t>T \end{cases}$. Αν ο ταλαντωτής είναι αρχικά ακίνητος στο σημείο ισορροπίας υπολογίστε την απόκριση του ταλαντωτή και την ενέργεια που μεταφέρθηκε από την εξωτερική δύναμη.
6. Ένας αρμονικός ταλαντωτής με ω=1 και μάζα m, δέχεται σειρά ωστικών δυνάμεων τύπου $mu\delta(t-t_n)$, όπου οι χρονικές στιγμές t_n είναι τυχαίες χρονικές στιγμές αρκετά αραιές σε σχέση με την περίοδο του ταλαντωτή. Πόσο είναι το πλάτος του ταλαντωτή σε σχέση με το αρχικό του πλάτος μετά από μεγάλο αριθμό N τέτοιων κρούσεων;

7. Θεωρήστε τη δυναμική εξίσωση $\ddot{x} = ax$. Εάν $a = 0$ τότε η κίνηση είναι $x(t) = x_0 + v_0 t$ (1). Αποδείξτε λύνοντας τη δυναμική εξίσωση για $a \neq 0$ (και για θετικές και για αρνητικές τιμές) ότι στο όριο $a \to 0$ η κίνηση δίνεται από την έκφραση (1). Επειδή το a έχει μονάδες $\left[T^{-2}\right]$ και το 0 είναι ένας αριθμός το όριο $a \to 0$ δεν είναι καλά ορισμένο. Ποια η ορθή μορφή του ορίου;