



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Μηχανική I B' Σειρά Ασκήσεων

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

1. Σε ένα σωματίδιο που κινείται ευθύγραμμα ασκείται δύναμη τριβής $F(v) = -m\alpha v$, όπου v η ταχύτητα του σωματιδίου. Αποδείξτε ότι το σώμα με αρχική ταχύτητα v_0 διανύει πεπερασμένη απόσταση σε άπειρο χρόνο. Βρείτε αυτή την απόσταση. Έστω τώρα ότι η δύναμη της τριβής ήταν $F(v) = -m\alpha v^\beta$ με $\beta > 0$. Για ποιες τιμές του β το σώμα διανύει, αρχίζοντας πάλι με ταχύτητα v_0 , πεπερασμένη απόσταση σε άπειρο χρόνο; Σχεδιάστε την απόσταση που διανύει συναρτήσει του β .
2. (Κίνηση Brown) Ένας κόκκος σκόνης βρίσκεται στην επιφάνεια ενός υγρού που έχει θερμοκρασία T και εκτελεί άτακτη κίνηση που προκαλείται από τις συχνές κρούσεις του κόκκου με τα ατάκτως κινούμενα μόρια του υγρού. Περιγράψουμε την κίνηση του κόκκου αυτού με την μονοδιάστατη εξίσωση

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} = F(t),$$

όπου $F(t)$ μια άτακτη χρονικά δύναμη με υψίσυχνες διακυμάνσεις. Επειδή η κίνηση επηρεάζεται από δύο διαφορετικές χρονικές κλίμακες, τη κλίμακα μεταβολής της δύναμης, t_f , και τη κλίμακα $t_d = m/\mu$ της δυναμικής του σωματιδίου, που σχετίζεται με την απόσβεση της κίνησης λόγω της τριβής, ορίζουμε τον μέσο όρο μιας μεταβλητής $f(t)$ ως:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{2\tau} \int_{t-\tau}^{t+\tau} f(s) ds,$$

όπου το $t_d \gg \tau \gg t_f$. Όσο περισσότερο διαφέρουν μεταξύ τους οι χρονικές κλίμακες, όσο μεγαλύτερος δηλαδή είναι ο λόγος t_d/t_f , τόσο ακριβέστερα μπορούμε να επιτύχουμε ακριβή περιγραφή της μέσης κίνησης του σωματιδίου γνωρίζοντας μόνο τη στατιστική συμπεριφορά των υψίσυχνων όρων (η διαδικασία κατασκευής αυτής της αδρομερούς δυναμικής ονομάζεται στη διεθνή βιβλιογραφία coarse graining). Προσέξτε ότι η συνάρτηση $\bar{f}(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου, t . Δείξτε ότι η πράξη της μέσης τιμής μετατίθεται με την πράξη της χρονικής παραγωγίσης: $\overline{\dot{x}} = \dot{\bar{x}}$. Θεωρούμε ότι η μέση τιμή $\bar{F} = 0$, όσες φορές επιταχύνεται το σωματίδιο προς τα αριστερά άλλες τόσες φορές επιταχύνεται προς τα δεξιά και αυτό γίνεται αρκετές φορές στο χρονικό διάστημα 2τ έτσι ώστε η μέση τιμή να είναι μηδέν. Θεωρούμε ότι η μέση τιμή $\overline{x\dot{F}} = 0$ (γιατί είναι αυτό λογικό;), ενώ $\overline{\dot{x}F} \neq 0$ (γιατί είναι αυτό λογικό;). Επίσης θεωρούμε ότι μετά από πολύ χρόνο η μέση κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι σταθερή και ίση με

$m\dot{x}^2/2 = kT/2$, όπου k κάποια σταθερά (του Boltzmann). Θέλουμε να προσδιορίσουμε την χρονική εξάρτηση της $\overline{x^2}$. Θεωρήστε ως νέα μεταβλητή την $\xi = 2x\dot{x}$ και δείξτε ότι:

$$m\dot{\xi} + \mu\bar{\xi} = 2kT,$$

και ότι εξ' αυτού μετά από πολύ χρόνο αναμένουμε η διασπορά της θέσης (η αβεβαιότητα της θέσης) να αυξάνει γραμμικά με το χρόνο:

$$\overline{x^2} = \frac{2kT}{\mu}t,$$

δηλαδή όπως η διάχυση με συντελεστή διάχυσης: $\nu = kT/\mu$ (Einstein, 1905).

3. (Παράδοση διατήρηση της ενέργειας) Ένας γλάρος στέκεται στην ακρογιαλιά. Ξαφνικά πνέει άνεμος 40 km/h. Ο γλάρος ανοίγει τα φτερά του και χωρίς να κάνει οποιαδήποτε άλλη κίνηση ίπταται σε ύψος H από το έδαφος. Προσδιορίστε το H (Υπόδειξη: επιλέξτε για την ανάλυση του προβλήματος το κατάλληλο σύστημα αναφοράς).
4. Δυο σωματίδια κινούμενα επί ευθείας αλληλεπιδρούν μέσω μιας απωστικής αλληλεπίδρασης του τύπου $F_{12} = -E\delta(x_1 - x_2)$, όπου F_{12} είναι η δύναμη που δέχεται το σωματίδιο 1 από το σωματίδιο 2, x_1, x_2 οι θέσεις των δύο σωματιδίων και E μια σταθερά. Υπολογίστε τι συμβαίνει σε μια σύγκρουση των δύο σωματιδίων και ποια τιμή θα πρέπει να έχει η σταθερά E προκειμένου η σύγκρουση να είναι ελαστική.
5. Σε ένα σωματίδιο που κινείται στην ευθεία ασκείται δύναμη $F(x) = \sinh(x/l)$. Αν το σωματίδιο βρίσκεται ακίνητο σε μικρή απόσταση από το σημείο ισοροπίας προσδιορίστε την περίοδο ταλάντωσης περί αυτό.
6. Προσδιορίστε με αριθμητική ολοκλήρωση την περίοδο ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή με $k/m = 4\pi^2$. Σχεδιάστε την εξέλιξη της ολικής ενέργειας κατά τη διάρκεια 10 περιόδων.
7. Ένα σωματίδιο κινείται μεταξύ δύο παράλληλων τοίχων. Η κίνηση γίνεται σε μια ευθεία κάθετη στα τοιχώματα και η ανάκλαση είναι ελαστική. Ποια η περίοδος της ταλάντωσης συναρτήσει της ενεργείας του ταλαντωτή; Είναι ισόχρονη η ταλάντωση; Ισχύει η υπέρθεση λύσεων;