

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Α΄ Σειρά Ασκήσεων

1. Αποδείξτε, μέσω του αναπτύγματος Taylor, ότι όταν δίδεται ο νόμος της δύναμης, η θέση και η ταχύτητα ενός σωματιδίου μία χρονική στιγμή προσδιορίζει πλήρως τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου κάθε χρονική στιγμή. Προσδιορίστε με τον τρόπο αυτό την αναλυτική μορφή της τροχιάς ενός σωματιδίου που κινείται στο χώρο υπό την επίδραση μόνο του σταθερού και ομογενούς πεδίου της βαρύτητας. Εξαρτάται η ορθότητα του αποτελέσματός σας από το μέγεθος του βήματος που επιλέξατε;
2. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα της τροχιάς στο φυλλάδιο «Αριθμητική Ολοκλήρωση Κίνησης Πλανήτη Περί τον Ήλιο» η τροχιά δεν μοιάζει καθόλου με αυτή της Γης, η οποία είναι με αρκετά μεγάλη ακρίβεια κυκλική. Μπορείτε να αλλάξετε ένα μόνο στοιχείο των αρχικών συνθηκών ώστε να μετατρέψετε την τροχιά του πλανήτη σε κυκλική; Επαναλάβετε τους υπολογισμούς σας με την τιμή αυτή για να επιβεβαιώσετε την κυκλικότητα της τροχιάς.
3. Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Κέπλερ (εμπειρικός νόμος που προέκυψε από παρατηρήσεις) όλοι οι πλανήτες κινούνται σε τροχιές για τις οποίες ο λόγος του τετραγώνου της περιόδου προς τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς (του μήκους δηλαδή της ελλειπτικής τροχιάς) είναι σταθερός αριθμός και ίδιος για όλους τους πλανήτες. Λαμβάνοντας υπόψη το νόμο αυτό, τα αποτελέσματα του φυλλαδίου «Αριθμητική Ολοκλήρωση...» τα οποία θα μπορούσαν να αναφέρονται σε έναν άλλο πλανήτη αντί της Γης, και χρησιμοποιώντας την αριθμητική τιμή σταθερών όπως οι $G, M_{\text{Ήλιου}}, 1 \text{ AU}$ (προκειμένου να επανέλθετε σε φυσιολογικές μονάδες) υπολογίστε την περίοδο της Γης γύρω από τον Ήλιο.
4. **Στο ρόλο του Νεύτωνα:** Αν ο σωστός δυναμικός νόμος δεν ήταν αυτός του Νεύτωνα αλλά του Αριστοτέλη, δηλαδή $\vec{F} = k\vec{v}$, όπου k μια σταθερά αναλογίας, όχι κατ' ανάγκη η μάζα του κινητού, μπορείτε να προβλέψετε τη μορφή του νόμου της Παγκόσμιας έλξης; (Λάβετε υπόψη σας τον 3ο νόμο του Κέπλερ και ότι για απλότητα όλοι οι πλανήτες κινούνται σε κυκλικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο.) Θα μπορούσατε με κάποιο επιχείρημα συμμετρίας να απορρίψετε το νόμο αυτό; (Θεωρήστε ότι ο Ήλιος και οι πλανήτες είναι τέλειες σφαίρες και ότι ο χώρος είναι ισότροπος –ίδιος προς όλες τις κατευθύνσεις.)
5. Χρησιμοποιώντας τη «φυσική απόδειξη» τού ότι η τροχιά ενός σωματιδίου προσδιορίζεται πλήρως από τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου, αποδείξτε ότι αν το σωματίδιο σε κάθε θέση του \vec{r} βρίσκεται υπό την επιρροή κεντρικής δύναμης, τότε η τροχιά του σωματιδίου κείται αναγκαστικά σε ένα επίπεδο. Προσδιορίστε το επίπεδο. [Κεντρικές δυνάμεις είναι δυνάμεις της μορφής $X(r)\vec{r}$, δηλαδή δυνάμεις που έχουν ακτινική διεύθυνση, και $X(r)$ είναι κάποια συνάρτηση της απόστασης του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων –όταν $X(r) > 0$ η δύναμη είναι απωστική, αλλιώς ελκτική.]
6. Επαναλάβετε την αριθμητική ολοκλήρωση με βαρυτική δύναμη τύπου $1/r$ αντί του νευτώνειου $1/r^2$. Πως είναι τώρα η τροχιά; (Ίσως θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μικρότερο χρονικό βήμα στην ολοκλήρωση.)