

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ Ι (Η΄ ΣΕΙΡΑ)

## ΤΑΞΙΔΙ ΑΠΟ ΤΗ ΓΗ ΣΤΟΝ ΟΥΡΑΝΟ

Ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς ενός πλανήτη γύρω από τον Ήλιο (θεωρείστε τον Ήλιο ακίνητο) είναι  $a$ . Αποδείξτε ότι η συνολική ενέργεια του πλανήτη είναι

$$E = -\frac{GmM}{2a}$$

όπου  $G$  η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας,  $M$  η μάζα του Ήλιου, και  $m$  η μάζα του πλανήτη.

Έστω τώρα ότι ο πλανήτης βρίσκεται σε μία κυκλική τροχιά περί τον ήλιο (όπως η τροχιά της Γης που έχει πολύ μικρή εκκεντρικότητα) ακτίνας  $r$ . Αποδείξτε ότι η ταχύτητα διαφυγής,  $v_{esc}$ , του πλανήτη από το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου είναι

$$v_{esc} = \sqrt{2}v_c,$$

όπου  $v_c$  η ταχύτητα του πλανήτη στη κυκλική τροχιά. Υπολογίστε τη ταχύτητα διαφυγής της Γης από το βαρυτικό πεδίο του ήλιου (η απόσταση Ήλιου Γης είναι μία αστρονομική μονάδα μήκους  $1 AU = 1.5 \times 10^8 km$ ).

Ένα διαστημόπλοιο βρίσκεται στη Γη. Ποία η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να αποκτήσει (ως προς τη Γη) ώστε να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο του ήλιου (αποδείξτε ότι σε πολύ καλή προσέγγιση δεν χρειάζεται στον παραπάνω υπολογισμό να συμπεριλάβετε την δυναμική ενέργεια από το βαρυτικό πεδίο της Γης. Δίδεται η μάζα του Ήλιου  $M_H = 2 \times 10^{30} kg$ , η μάζα της Γης  $M_E = 6 \times 10^{24} kg$ , η ακτίνα της Γης  $R_E = 6370 km$ ).

Θέλουμε να στείλουμε τον δορυφόρο σε αποστολή στον πλανήτη Ουρανό που βρίσκεται  $19.2 AU$  από τον ήλιο. Αποδείξτε, αμελώντας και πάλι την επίδραση του βαρυτικού πεδίου της Γης, ότι η βέλτιστη (με την έννοια της οικονομίας καυσίμων) τροχιά του διαστημοπλοίου από τη Γη στον Ουρανό έχει πολική εξίσωση:

$$r = \frac{1.901}{1 + 0.901 \cos \theta}$$

όπου  $r$  η απόσταση του δορυφόρου από τον ήλιο σε αστρονομικές μονάδες και  $\theta$  η πολική γωνία του δορυφόρου με κέντρο τον Ήλιο.

Υπολογίστε το λόγο της ταχύτητας του δορυφόρου στο περιήλιο (το κοντινότερο σημείο στον ήλιο) ως προς τη ταχύτητα διαφυγής από το ηλιακό σύστημα. Κάνοντας χρήση του τρίτου νόμου του Κέπλερ υπολογίστε πόσος χρόνος απαιτείται για το ταξίδι από τη Γη στον πλανήτη Ουρανό.