Θεωρία Συναρτήσεων

I

ΥΠΟ

KONRAD KNOPP

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ, ΑΡ. 2
ΑΘΗΝΑΙ, 1970

Θεωρία Συναρτήσεων

I

Στοιχεῖα τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων

ΥΠΟ

KONRAD KNOPP

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ, ΑΡ. 2

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΚΑΡΑΒΙΑ • ΑΘΗΝΑΙ 1970

Ἡ ἀπόδοσις εἰς τὴν Ἑλληνικήν, ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ :., ἔγινεν ἐκ τῆς μεταφράσεως εἰς τὴν Ἀγγλικὴν (Dover, 1945) ὑπὸ FREDERICK BAGEMIHL.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Παγκοσμίως ἀναγνωρίζεται ὅτι ἡ γνῶσις τοῦ βασικοῦ μέρους τῆς θεωρίας τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς εἶναι ἀπαραίτητος διὰ κάθε ***σοβαρὸν*** *μαθηματικόν, φυσικὸν καὶ τεχνικόν. Ἐξ ἄλλου, ἀπετέλεσε καὶ ἀποτελεῖ ἡ θεωρία αὕτη μόνιμον πηγὴν ἐμπνεύσεως τόσον διὰ τὰ κλασσικὰ ὅσον καὶ τὰ νεώτερα μαθηματικά.*

Εὐρύτατα ἀναγνωρίζεται, διεθνῶς, ὅτι ***μοναδικὴν*** *παρουσίασιν τοῦ ὡς ἄνω βασικοῦ μέρους τῆς θεωρίας συναρτήσεων ἀποτελεῖ τὸ σχετικὸν δίτομον σύγγραμμα τοῦ μεγάλου Γερμανοῦ μαθηματικοῦ K. Knopp. Ἀποτελεῖ, πράγματι, τοῦτο ἀξιοθαύμαστον συνδυασμὸν οὐσιαστικότητος, διαυγείας, ἁπλότητος καὶ συντομίας.*

Αἱ ἕνδεκα ἐκδόσεις τοῦ ἔργου αὐτοῦ εἰς τὴν γερμανικὴν γλῶσσαν (ἡ τελευταία εἶναι τοῦ 1965) καὶ ἡ εὐρυτάτη, διεθνὴς χρησιμοποίησις τῆς ἀγγλικῆς μεταφράσεώς του (ἔκδοσις Dover, 1945) ἐπέβαλαν τὸ καθῆκον τῆς μεταφράσεώς του καὶ εἰς τὴν ἑλληνικήν. Τοῦτο ἐπετεύχθη, εὐτυχῶς, κατὰ τρόπον ἄρτιον ἀπὸ φίλον Μαθηματικόν, ὁ ὁποῖος ἐπιθυμεῖ νὰ τηρήσῃ ἀνωνυμίαν.

Μὲ πλήρη συναίσθησιν ἐπιστημονικῆς εὐθύνης δηλῶ ὅτι ***πᾶς μαθηματικὸς ὁ ὁποῖος δὲν θέτει ὡς πρῶτον θεμέλιον τῶν γνώσεών του εἰς τὴν θεωρίαν τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων τὸν παρόντα πρῶτον τόμον τοῦ Knopp, ἀδικεῖ ἑαυτόν.***

Διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ παρόντος συγγράμματος ἀπὸ τὸν Ἕλληνα ἀναγνώστην ἀρκεῖ (καὶ ἐνδείκνυται) ἡ προηγουμένη μελέτη τοῦ συγγράμματος «Ἀπειροστικὸς Λογισμὸς» τοῦ Παναγιώτου Ζερβοῦ. Ἐξ ἄλλου, διατηροῦν, πάντοτε, εἰς τὸ ἀκέραιον, τὴν χρησιμότητά των διὰ τὸν ἀναγνώστην αὐτὸν αἱ («πολυτεχνειακαὶ») μαθηματικαὶ ἐκδόσεις τοῦ Καθηγητοῦ κ. Νικολάου Κριτικοῦ.

Τὸ περιεχόμενον τοῦ παρόντος ἔργου, σύνοψις τῆς μεγαλο-

φυοῦς δημιουργίας τῶν Cauchy, Riemann καὶ Weierstrass, ἐδέχθη πολλὰς συμπληρώσεις καὶ προεκτάσεις καὶ ἀπὸ τοὺς ἰδίους καὶ ἀπὸ ἄλλους. Αὗται θὰ ἐκτεθοῦν, ἐὰν θέλῃ ὁ Θεός, εἰς μεταγενεστέρας ἐκδόσεις τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Βιβλιοθήκης. Εἰς τὴν ἀνὰ χεῖρας ἔκδοσιν προσηρτήθησαν δύο συναφεῖς ἐργατοῦ Παναγιώτου Ζερβοῦ ἐπὶ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τύπου τοῦ Cauchy. Ἀνέκδοτοι συμβολαί του εἰς τὴν θεωρίαν τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων προβλέπεται νὰ συμπεριληφθοῦν εἰς μεταγενεστέραν ἔκδοσιν τῆς Ε.Μ. Βιβλιοθήκης.

Ἀθῆναι, Ὀκτώβριος 1970

Σ. Π. Ζερβὸς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Ι

Αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1. ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ

Σελὶς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Θεωρήματα τοῦ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3. ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

ΜΕΡΟΣ Ι

ΑΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ

§ 1. Προαπαιτούμενα

Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ἀναγνώστης τοῦ βιβλίου αὐτοῦ εἶναι ἐξοικειωμένος μὲ τὴν θεωρίαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, μὲ τὰ θεμέλια τῆς Ἀναλύσεως τῶν Πραγματικῶν Συναρτήσεων ἐπὶ τῶν ὁποίων οἰκοδομήθη ἡ θεωρία αὐτὴ (*Ἀπειροστικὴ Ἀνάλυσις*, δηλ. ὁ Διαφορικὸς καὶ ὁ Ὁλοκληρωτικὸς Λογισμὸς) καθὼς καὶ μὲ τὰ στοιχεῖα τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας. Ἡ ἔκτασις τῶν γνώσεων αὐτῶν, διὰ τῶν ὁποίων γίνεται δυνατὴ ἡ κατανόησις τῆς ἀκολουθούσης παρουσιάσεως τῆς Θεωρίας τῶν Συναρτήσεων, ἀναπτύσσεται ἀρκετὰ ἐκτενῶς εἰς τὰς πρώτας παραγράφους τῶν *Στοιχείων*[1]. Θὰ πρέπει ἐπίσης νὰ γνωρίζῃ ὁ ἀναγνώστης καὶ τὰ ὑπόλοιπα μέρη τῶν Στοιχείων αὐτῶν. Διότι ἔτσι δὲν θὰ ἔχῃ δυσκολίας μὲ τοὺς συνήθεις μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰς πράξεις ἐπ᾽ αὐτῶν, θὰ γνωρίζῃ ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν[2] ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ εἰς ἕνα πρὸς ἕνα ἀντιστοι-

---

1. Μὲ «*Στοιχεῖα*» ἐννοοῦμεν τὸ τομίδιον *Elemente der Funktion theorie* τῆς συλλογῆς *Goschen*, Νο 1109, *Berlin* καὶ *Leipzig*, 1937. Πολλὰ ἀπὸ τὰ περιεχόμενα τοῦ μικροῦ αὐτοῦ βιβλίου ἀνευρίσκονται εἰς τὸ ἔργον τοῦ *G.H.Hardy: A Course of Pure Mathematics*, 7η ἐκδ., New York, 1941, ἢ εἰς τό:*Differential and Integral Calculus* τοῦ R.Courant,New York,1958. (Βλ. εἰδικῶς: Τόμος Ι, Κεφ. Ι καὶ Συμπλήρωμα Ι, §§ 1 καὶ 2· Κεφ. VIII· Τόμ. II, § 1 τοῦ Συμπ/τος τοῦ Κεφ. II, Κεφ. VIII, §§ 1 καὶ 2).

2. Ὅταν ὁμιλοῦμεν εἰς τὰ ἑπόμενα περὶ «*ἀριθμῶν*» θὰ ἐννοοῦμεν τοὺς συνήθεις μιγαδικοὺς ἀριθμούς—ἐκτὸς ἂν τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ρητῶς καθορίζεται.

χίαν μὲ τὰ σημεῖα ἢ τὰ διανύσματα ἑνὸς ἐπιπέδου ἢ μὲ τὰ σημεῖα μιᾶς σφαίρας καί, ἑπομένως, ὅτι κάθε ἀναλυτικὴ θεώρησις ἐπιδέχεται γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν καὶ ὅτι κάθε γεωμετρικὴ θεώρησις ἔχει τὴν ἀναλυτικήν της ἔκφρασιν (Στ., Τμ. I).

Ὑποθέτομεν ἀκόμη διὰ τὸν μελετητὴν τοῦ βιβλίου αὐτοῦ ὅτι ἔχει ἐπαρκεῖς γνώσεις σχετικῶς μὲ ἀπείρους ἀκολουθίας καὶ ἀπείρους σειρὰς μὲ μιγαδικοὺς ὅρους, καθὼς καὶ μὲ τὴν ἔννοιαν συναρτήσεως μιγαδικῆς μεταβλητῆς, καὶ ἐπίσης ὅτι ἔχει συνηθίσει νὰ ἐφαρμόζῃ τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁρίου καὶ εἰς τὰς δύο αὐτὰς ἐννοίας. Δὲν θὰ τοῦ εἶναι ἄγνωσται ἑπομένως αἱ ἔννοιαι τῆς συνεχείας καὶ τῆς παραγωγισιμότητος μιᾶς συναρτήσεως μὲ μιγαδικὴν μεταβλητὴν (*Στ.* Τμ/τα II καὶ V).

Τὰ θέματα αὐτὰ τῶν *Στοιχείων*, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ πλέον ἐνδιαφέροντα διὰ τοὺς σκοποὺς τοῦ βιβλίου αὐτοῦ, θὰ ἐπανεξετάσωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον αὐτὸ καὶ εἰς τὸ ἑπόμενον καὶ εἰς μερικὰς περιπτώσεις θὰ τὰ συμπληρώσωμεν. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν θὰ καταστῇ ἱκανὸς ὁ ἀναγνώστης νὰ ἐλέγχῃ καὶ μόνος του τὴν ἔκτασιν τῶν ἀνωτέρω προαπαιτουμένων ἀπὸ αὐτὸν γνώσεων καὶ θὰ ἀποκτήσῃ συγχρόνως μίαν στερεὰν βάσιν διὰ τὴν πλήρη κατανόησιν τῆς ἀκολουθούσης ἀναπτύξεως τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων.

§ 2. Ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα μιγαδικῶν ἀριθμῶν

Τὸ σύνολον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ εἰς ἕνα πρὸς ἕνα ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου προσανατολισμένου μέσῳ ἑνὸς ὀρθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Τὸ ἐπίπεδον τότε αὐτὸ λέγεται «ἐπίπεδον τοῦ Gauss» ἢ «ἐπίπεδον τῶν (μιγαδικῶν) ἀριθμῶν» ἤ, συντόμως, «τὸ z-ἐπίπεδον». Κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z=x+iy$ ἔχει ὡς ἀντίστοιχόν του ἐκεῖνο τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ποὺ ἔχει τετμημένην τὸ πραγματικὸν μέρος $x=R(z)$ καὶ τεταγμένην τὸ φανταστικὸν μέρος $y=J(z)=R(-iz)$[1]. Συνέπεια τῆς συμφωνίας μας αὐτῆς εἶναι

1. Μικρὰ λατινικὰ ἢ ἑλληνικὰ γράμματα σημαίνουν πάντοτε μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς ἐκτὸς ἂν ἀπὸ τὰ συμφραζόμενα γίνεται σαφὲς τὸ ἀντίθετον. Τὰ γράμματα πάντως x, y καί, ἀργότερον συχνότερα, τὰ

ὅτι ἕνα καὶ μόνον ἕνα σημεῖον τοῦ z-ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζεται πρὸς κάθε μιγαδικὸν ἀριθμὸν z καί, ἀντιστρόφως, ἕνας καὶ μόνον ἕνας μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἀντιστοιχίζεται πρὸς κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Συνεπῶς, «σημεῖον» καὶ «ἀριθμὸς» ἠμποροῦν νὰ χρησιμοποιοῦνται ὡς ἐκφράσεις ἰσοδύναμοι χωρὶς φόβον παρεξηγήσεων. Ἐκφράσεις, ἑπομένως, ὡς «τὸ σημεῖον $i\sqrt{3}$» ἢ «ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο ἀριθμῶν» ἢ «τὸ τρίγωνον μὲ κορυφὰς z_1, z_2, z_3» ἔχουν τελείως σαφὲς περιεχόμενον.

Ἐὰν r καὶ φ εἶναι αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ σημείου z, r ὀνομάζεται τὸ ***μέτρον*** ἢ ἡ ***ἀπόλυτος τιμὴ*** ἢ *modulus* τοῦ z καὶ φ τὸ ***ὄρισμα*** (argument) τοῦ z. Συμβολικῶς γράφομεν: $|z|=r$, $\arg z=\varphi$.

Θὰ πρέπει νὰ προσέξωμεν ἰδιαιτέρως τοὺς ἁπλοῦς ὁρισμοὺς καὶ συμφωνίας ποὺ ἀκολουθοῦν καὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι συνέπειαι τῆς ἰσοδυναμίας μεταξὺ σημείου καὶ ἀριθμοῦ.

a) Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου z ἀπὸ τῆς ἀρχῆς εἶναι $|z|$. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο σημείων z_1 καὶ z_2 εἶναι $|z_1-z_2|=|z_2-z_1|$. Ὁ ἀριθμὸς z_2-z_1 παριστάνεται μὲ τὸ διάνυσμα ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὸ z_1 καὶ πέρας τὸ z_2. Αἱ σχέσεις

$$|z_1\pm z_2|\leqq|z_1|+|z_2| \quad \text{καὶ} \quad |z_1\pm z_2|\geqq\big|\,|z_1|-|z_2|\,\big|$$

ἰσχύουν διὰ ὁποιουσδήποτε ἀριθμοὺς z_1 καὶ z_2.

b) Ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα (**ὁ μοναδιαῖος κύκλος**) χαρακτηρίζεται διὰ τῆς ἰσότητος $|z|=1$. Ὅλοι δηλ. οἱ ἀριθμοὶ z διὰ τοὺς ὁποίους $|z|=1$ εἶναι σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτῆς. Καὶ ἀντιστρόφως.

c) Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου μὲ κέντρον z_0 καὶ ἀκτῖνα r, μὲ ἐξαίρεσιν τῆς περιφερείας ἢ τοῦ *συνόρου* τοῦ κύκλου αὐτοῦ, χαρακτηρίζεται διὰ τῆς ἀνισότητος $|z-z_0|<r$.

u, v καὶ ξ, η θὰ τὰ ἐπιφυλάσσωμεν διὰ τὸ πραγματικόν, ἀντιστοίχως, τὸ φανταστικὸν μέρος ἑνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ καί, ἑπομένως, καὶ διὰ πραγματικοὺς ἀριθμούς. Εἰς μερικὰς περιπτώσεις, iy (ὄχι y μόνον) θὰ χρησιμοποιεῖται ἐπίσης διὰ τὸ φανταστικὸν μέρος τοῦ z. Τὰ συμφραζόμενα πάντως θὰ ἀποκλείουν παρανοήσεις.

d) Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου μὲ κέντρον $-4i$ καὶ ἀκτῖνα 3, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ συνόρου του, χαρακτηρίζεται διὰ τῆς σχέσεως $|z+4i| \leqq 3$.

e) Τὸ μέρος τοῦ z - ἐπιπέδου ποὺ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου μὲ κέντρον z_1 καὶ ἀκτῖνα R ὁρίζεται διὰ τῆς ἀνισότητος $|z-z_1| > R$.

f) Τὸ ***«δεξιὸν» ἡμιεπίπεδον***, τὸ μέρος δηλ. τοῦ z - ἐπιπέδου ποὺ κεῖται δεξιὰ τοῦ φανταστικοῦ ἄξονος, κατὰ τὸν συνήθη προσανατολισμὸν τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ μὲ ἐξαίρεσιν τοῦ συνόρου του, χαρακτηρίζεται διὰ τῆς ἀνισότητος $R(z) > 0$. Ὁμοίως, τὸ ***«ἄνω»*** ἡμιεπίπεδον μαζὶ μὲ τὸ σύνορόν του ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως $J(z) \geqq 0$.

g) Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δακτυλίου ποὺ σχηματίζεται διὰ τῶν περιφερειῶν μὲ κέντρον κοινὸν z_0 καὶ ἀκτῖνας R καὶ $r < R$ καὶ μὲ ἐξαίρεσιν τοῦ συνόρου του, χαρακτηρίζεται διὰ τῶν ἀνισοτήτων $0 < r < |z-z_0| < R$.

h) Ἕνας κύκλος μὲ κέντρον ζ καὶ ἀκτῖνα ε—καλούμενος συντόμως «μία περιοχή» ἢ ἀκριβέστερον «μία ε - περιοχή» τοῦ σημείου ζ—ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα $\zeta+z'$, μὲ σταθερὸν τὸ ζ καὶ μεταβλητὸν τὸ z' ἀλλὰ ὑποκείμενα εἰς τὸν περιορισμὸν $|z'| < \varepsilon$. Πράγματι, ἂν θέσωμεν $\zeta+z'=z$, ὁ περιορισμὸς αὐτὸς σημαίνει ὅτι

$$|z'| = |z-\zeta| < \varepsilon.$$

Τὸ ἐπίπεδον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται κλειστὸν διὰ τῆς εἰσαγωγῆς ἑνὸς κατ' ἐκδοχὴν σημείου, τοῦ σημείου[1] $z=\infty$. (Βλ. *Στοιχεῖα*, §§ 14, 15 καὶ 17). Τὸ ἐξωτερικὸν ἑπομένως ἑνὸς κύκλου (πρβλ. **e)** καλεῖται ἐπίσης καὶ «μία περιοχὴ τοῦ σημείου ∞». Ἐπὶ τοῦ παρόντος ὅμως ἕνα γράμμα οὐδέποτε θὰ σημαίνῃ τὸ σημεῖον ∞ ἐκτὸς ἂν ρητῶς δηλοῦται τοῦτο.

1. Ἂς σημειωθῇ ἡ διαφορὰ τῆς ἐννοίας αὐτῆς καὶ τῶν ἑξῆς δύο ἐννοιῶν: 1) Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (ὁ πραγματικὸς ἄξων) ὁδηγεῖ εἰς τὴν εἰσαγωγὴν δύο κατ' ἐκδοχὴν τιμῶν: $+\infty$ καὶ $-\infty$, 2) Τὸ «προβολικὸν ἐπίπεδον», εἰς τὸ ὁποῖον εἰσάγονται ἄπειρα κατ' ἐκδοχὴν σημεῖα. Ἀπὸ τὴν ἄποψιν δομῆς (τοπολογικῶς), τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον εἶναι συμφυῶς διάφορον τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς λεγομένης «στερεογραφικῆς προβολῆς (*Στοιχεῖα*, κεφ. 3), τὰ σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἀπεικονίζονται ἕνα πρὸς ἕνα ἐπὶ τῶν σημείων μιᾶς σφαίρας—τῆς ***σφαίρας τοῦ Riemann*** ἢ ***τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν*** ἢ συντόμως, τῆς ***z-σφαίρας***.

Ὁ συνήθης τρόπος διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνεται ἡ ἀπεικόνισις αὐτὴ εἶναι ὁ ἑξῆς: Μία σφαῖρα μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοποθετεῖται ἐπὶ τοῦ z-ἐπιπέδου ὥστε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς της μετ' αὐτοῦ (νότιος πόλος) νὰ εἶναι ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων. Κάθε τότε ἡμιευθεῖα (ἀκτὶς) ἐκ τοῦ βορείου πόλου ἀντιστοιχίζει κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον κάθε σημεῖον τοῦ z-ἐπιπέδου πρὸς ἕνα σημεῖον τῆς z-σφαίρας. Τὸ σημεῖον αὐτὸ καλεῖται ἐπίσης καὶ σημεῖον z τῆς σφαίρας καὶ φανερὸν εἶναι τότε ὅτι ὁ βόρειος πόλος τῆς σφαίρας εἶναι σημεῖον ἀντιπροσωπευτικὸν (καὶ ἐπὶ τοῦ προκειμένου καθ' ὑπόστασιν) τοῦ «σημείου ∞» τοῦ z-ἐπιπέδου.

Διὰ τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον ποὺ γίνεται κλειστὸν διὰ τοῦ σημείου ∞ λέγομεν ὅτι ἔχει τὴν αὐτὴν συνεκτικότητα (τὴν ἰδίαν τοπολογικὴν δομὴν) μετὰ τῆς πλήρους σφαίρας.

Ὁ ἰσημερινὸς τῆς σφαίρας ἀντιστοιχίζεται πρὸς τὸν μοναδιαῖον κύκλον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ δὲ πρόσθιον (ὀπίσθιον) ἡμισφαίριον πρὸς τὰ κάτω (ἄνω) ἡμιεπίπεδον. Οἱ ἡμιμεσημβρινοὶ ἀντιστοιχίζονται πρὸς τὰς ἡμιευθείας (ἀκτῖνας διὰ τοῦ O) καὶ οἱ παράλληλοι (κύκλοι πλάτους) πρὸς τὰς περιφερείας μὲ κέντρον τὸ O.

Μία (συνήθης) συμμετρία ὡς πρὸς τὸ ἰσημερινὸν ἐπίπεδον ἀντιστοιχίζεται πρὸς μίαν ἀντιστροφὴν ὡς πρὸς τὸν μοναδιαῖον κύκλον τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ νότιον (βόρειον) ἡμισφαίριον ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν (ἐξωτερικὸν) τοῦ μοναδιαίου κύκλου καὶ ἕνας σφαιρικὸς «σκοῦφος» (μονοβασικὴ σφαιρικὴ ζώνη) μὲ κορυφὴν τὸν βόρειον πόλον ἀπεικονίζεται εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου ∞. **Κλπ.**

Ἀσκήσεις. 1. Ποῖαι εἶναι αἱ καμπύλαι τοῦ ἐπιπέδου ποὺ χαρακτηρίζονται διὰ τῶν σχέσεων :

$$\alpha)\ \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1,\quad \beta)\ \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2,\quad \gamma)\ \left|\frac{z}{z+1}\right| = a > 0,$$

$$\delta)\ R(z^2)=4,\qquad \varepsilon)\ J(z^2)=4,\qquad \sigma\tau)\ |z^2-1| = a > 0\ ;$$

Ποῖα εἶναι τὰ μέρη τοῦ z-ἐπιπέδου ποὺ χαρακτηρίζονται διὰ τῶν ἰδίων σχέσεων ἀλλ' εἰς τὰς ὁποίας τὸ σύμβολον τῆς ἰσότητος ἔχει ἀντικατασταθῆ μὲ τὰ $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$;

2. Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ μεταξύ των θέσις εἰς τὸ ἐπίπεδον ἢ ἐπὶ τῆς σφαίρας τῶν κατωτέρω ζευγῶν σημείων :

$$\alpha)\ z \text{ καὶ } -z,\quad \beta)\ \bar{z} \text{ καὶ } z\,^{(1)},\quad \gamma)\ z \text{ καί } -\bar{z}$$

$$\delta)\ z \text{ καὶ } \frac{1}{z},\quad \varepsilon)\ z \text{ καὶ } \frac{1}{\bar{z}},\quad \sigma\tau)\ z \text{ καὶ } \frac{-1}{\bar{z}}\ ;$$

§ 3. Σημειοσύνολα καὶ ἀριθμοσύνολα

Ἐὰν ἕνα πλῆθος, πεπερασμένον ἢ ἄπειρον, ἀπὸ μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς ἔχει συγκροτηθῆ σύμφωνα μὲ ἕναν ὁποιονδήποτε κανόνα, οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ἀποτελοῦν ἕνα *ἀριθμοσύνολον*, τὰ δὲ ἀντίστοιχα πρὸς αὐτοὺς σημεῖα ἀποτελοῦν ἕνα *σημειοσύνολον*. «Ἀριθμοσύνολον» καὶ «Σημειοσύνολον» θεωροῦνται ὡς πλήρως ἰσοδύναμοι ἔννοιαι.

Ἕνα σύνολον ἀριθμῶν **M** θεωρεῖται ὡς δεδομένον ἢ ὡρισμένον ὅταν ὁ ὁρισμός του (ὁ κανὼν δηλ. ἐκλογῆς τῶν στοιχείων του) μᾶς παρέχει τὴν δυνατότητα νὰ ἀποφαινώμεθα περὶ τοῦ ἐὰν ἕνας δοθεὶς ἀριθμὸς ἀνήκῃ ἢ δὲν ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον (καὶ εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο ἡ ἀπάντησις πρέπει νὰ εἶναι ἢ *ναὶ* ἢ *ὄχι*). Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀντίστοιχον τοῦ ἀριθμοσυνόλου τούτου σημειοσύνολον **M** κεῖται ἐπὶ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ἠμποροῦμεν ἐπίσης νὰ ὁμιλοῦμεν περὶ *ἐπιπέδων συνόλων* (ἢ *ἐπιπεδοσυνόλων*). Οἱ ἀριθμοὶ (τὰ σημεῖα) εἶναι τὰ *στοιχεῖα* του.

Ἐὰν ὅλα τὰ στοιχεῖα ἑνὸς τέτοιου συνόλου κεῖνται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, τὸ σύνολον λέγεται γραμμικὸν σύνολον· ἄν, εἰδικῶς, ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα εἶναι ὁ πραγματικὸς ἄξων ὁδηγούμεθα εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὑποθέτομεν τὸν ἀναγνώστην ἐξοικειωμένον ἐν γένει μὲ τὰ σύνολα αὐτά, ὡς ἐπίσης καὶ μὲ τὰ σημειοσύνολα τοῦ ἐπιπέδου. Θὰ πρέπει δὲ ἀκόμη νὰ γνωρίζῃ τὰ κύρια χαρακτηριστικὰ τῆς θεωρίας τῶν ἀπείρων σειρῶν—εἰδικῶς, τῶν δυναμοσειρῶν—καὶ τῶν ἀριθμητικῶν ἀκολουθιῶν (*Στοιχεῖα*, Τμ. III, κεφ. 7,8). Εἰς τὰ κεφάλαια αὐτὰ ἀνευρίσκονται πολλὰ παραδείγματα ἐπὶ τῶν ἐννοιῶν τούτων. Κάθε γεωμετρικὸν σχῆμα εἶναι ἕνα σημειοσύνολον καί, ἀντιστρόφως, κάθε σημειοσύνολον ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὡς ἕνα γεωμετρικὸν σχῆμα.

Ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρουσαι εἶναι αἱ ἔννοιαι τοῦ *κατωτέρου πέρατος* καὶ τοῦ *ἀνωτέρου πέρατος* διὰ τὰ σύνολα πραγματικῶν ἀριθμῶν, καθὼς καὶ τὸ θεώρημα ὅτι κάθε τέτοιο σύνολον ἔχει ἕνα καὶ μοναδικὸν κατώτερον πέρας καὶ ἕνα καὶ μοναδικὸν ἀνώτερον πέρας. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἰσχύει φυσικὰ εἰς τὴν γενικότητά του αὐτὴν μόνον ἂν ἀποδεχθῶμεν ὅτι τὰ σύμβολα $-\infty$ καὶ $+\infty$ εἶναι κατώτερον πέρας ἀντ., ἀνώτερον πέρας· διότι ἄλλως, ἀληθεύει μόνον διὰ σύνολα *φραγμένα πρὸς τὰ ἀριστερὰ* (ἢ περατωμένα κάτωθεν) ἢ *φραγμένα πρὸς τὰ δεξιά*. Ἐξίσου σπουδαῖαι εἶναι αἱ ἔννοιαι τοῦ *κατωτέρου ὁρίου* καὶ τοῦ *ἀνωτέρω ὁρίου* ($\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$, *ἐλάχιστον*, ἀντ., *μέγιστον ὁρικὸν σημεῖον*) δι' ἕνα ἄπειρον σύνολον ἀπὸ πραγματικοὺς ἀριθμούς, ὡς καὶ τὸ θεώρημα ὅτι αἱ τιμαὶ αὐταὶ ὁρίζονται μονοτίμως δι' ἕνα δεδομένον σύνολον. Διὰ περισσοτέρας λεπτομερείας σχετικὰς μὲ σύνολα πραγματικῶν ἀριθμῶν δὲν θὰ γίνῃ λόγος εἰς τὸ βιβλίον αὐτό.

Σημειοσύνολα ἐπίπεδα ἠμπορεῖ ἐπίσης νὰ εἶναι φραγμένα (περατωμένα) ἢ μὴ φραγμένα. Ἕνα σύνολον **M** λέγεται *φραγμένον* ὅταν ὅλα τὰ στοιχεῖα του ἠμποροῦν νὰ ἐκλεισθοῦν ἐντὸς ἑνὸς σχήματος πεπερασμένης ἐκτάσεως (ἐντὸς ἑνὸς κύκλου π.χ.). Μὲ περισσοτέραν ἀκριβολογίαν, τὸ σύνολον **M** θὰ εἶναι φραγμένον ἂν ὑπάρχῃ ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς K τέτοιος ὥστε

$$|z| \leqq K$$

1) $\bar{z}$ εἶναι ὁ συζυγὴς $x - iy$ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = x + iy$.

δι' ὅλα τὰ σημεῖα z τοῦ συνόλου. Ἂν ὅμως εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κάθε κύκλου μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν O καὶ ἀκτῖνα ὁσονδήποτε μεγάλην εὑρίσκωνται καὶ σημεῖα τοῦ **M**, τὸ σύνολον θὰ λέγεται μὴ φραγμένον.

Ἕνα σημεῖον ζ τοῦ ἐπιπέδου ὀνομάζεται ***ὁρικὸν σημεῖον*** τοῦ συνόλου **M** ἂν κάθε περιοχὴ τοῦ ζ περιέχει ἄπειρα σημεῖα τοῦ **M** (βλ. §2, **h**). Μὲ ἄλλους λόγους, ἄν, διὰ κάθε δεδομένον (ὁσονδήποτε μικρὸν) ἀριθμὸν $\varepsilon > 0$, ὑπάρχουν πάντοτε ἄπειρα σημεῖα z τοῦ **M** διὰ τὰ ὁποῖα

$$|z-\zeta| < \varepsilon.$$

Πολυάριθμα σχετικὰ παραδείγματα ἀνευρίσκονται εἰς τὰ *Στοιχεῖα* Τμ. III, κεφ. 6. Τὸ θεμελιῶδες Θεώρημα τῶν **Bolzano-Weierstrass** (*Στοιχεῖα*, § 25) ἀναφέρεται εἰς τέτοια ὁρικὰ σημεῖα:

Θεώρημα 1. *Κάθε φραγμένον (ἄλλως: περατωμένον) ἄπειρον σύνολον (ἀποτελούμενον δηλαδὴ ἀπὸ ἄπειρον πλῆθος σημείων) περιέχει ἕνα τουλάχιστον ὁρικὸν σημεῖον.*

Ἐὰν τὸ σύνολον δὲν εἶναι φραγμένον, τοῦτο, ἀναφορικῶς εἰς τὴν σφαῖραν, σημαίνει ὅτι ἐντὸς κάθε περιοχῆς (ὁσονδήποτε μικρῆς) τοῦ βορείου πόλου ὑπάρχει ἀπειρία σημείων τοῦ συνόλου· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἠμποροῦμεν νὰ ὀνομάσωμεν τὸ σημεῖον ∞ ὁρικὸν σημεῖον τοῦ συνόλου. Μετὰ τὴν συμφωνίαν αὐτήν, τὸ θεώρημα τοῦ Bolzano-Weierstrass ἰσχύει καὶ διὰ κάθε ἄπειρον σύνολον.

Ὑπενθυμίζομεν ἀκόμη καὶ μερικὰς ἁπλᾶς ἐννοίας.

1. Ἐὰν **M** εἶναι ἕνα τυχὸν σημειοσύνολον, τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ **M** συνιστοῦν τὸ ***συμπληρωματικὸν σύνολον*** ἢ τὸ ***συμπλήρωμα τοῦ*** **M**. Ἂν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ **M** ἀνήκουν εἰς ἕνα ἄλλο σύνολον **N**, τὸ **M** καλεῖται ***ὑποσύνολον*** τοῦ **N**.

2. Ἐὰν ἡ ἰδιότης ἡ ὁποία ὁρίζει τὸ σύνολον **M** εἶναι τέτοια ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχῃ σημεῖον τὸ ὁποῖον νὰ πληροῖ αὐτήν, τὸ **M** λέγεται ***κενὸν*** σύνολον.

3. Ἕνα σημεῖον z_1 τοῦ **M** λέγεται ***μεμονωμένον σημεῖον*** τοῦ **M** ἂν ὑπάρχῃ κάποια περιοχὴ τοῦ z_1 ἡ ὁποία νὰ μὴ περιέχῃ ἄλλο σημεῖον τοῦ συνόλου ἐκτὸς τοῦ z_1.

4. Ἕνα σημεῖον z_1 τοῦ **M** λέγεται ***ἐσωτερικὸν σημεῖον*** τοῦ **M** ἂν ὑπάρχῃ περιοχὴ τοῦ z_1 μὲ σημεῖα τὰ ὁποῖα ἀνήκουν ***ὅλα*** εἰς τὸ **M**. Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τοῦ **M** καλεῖται ***τὸ ἐσωτερικὸν*** τοῦ **M**.

5. Ἕνα σημεῖον ζ τοῦ ἐπιπέδου λέγεται ***ἐξωτερικὸν σημεῖον***, ὡς πρὸς τὸ σύνολον **M**, ὅταν τὸ ζ καὶ μία περιοχὴ τοῦ ζ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ **M**. Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τοῦ **M** καλεῖται ***τὸ ἐσωτερικὸν*** τοῦ **M**.

6. Ἕνα σημεῖον ζ τοῦ ἐπιπέδου λέγεται ***συνοριακὸν σημεῖον*** τοῦ **M** ὅταν κάθε περιοχὴ τοῦ ζ περιέχῃ τουλάχιστον ἕνα σημεῖον τοῦ **M** καὶ τουλάχιστον ἕνα σημεῖον τὸ ὁποῖον δὲν ἀνήκει εἰς τὸ **M**· τὸ σημεῖον ζ ἠμπορεῖ νὰ ἀνήκῃ ἢ νὰ μὴ ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον **M**. Κατὰ ταῦτα, ἕνα μεμονωμένον σημεῖον τοῦ συνόλου **M** ἢ τοῦ συμπληρώματος τοῦ **M** εἶναι πάντοτε συνοριακὸν σημεῖον τοῦ **M** καὶ οὐδέποτε ἐσωτερικόν του σημεῖον.

7. Ἕνα σύνολον λέγεται ***κλειστὸν*** ὅταν περιέχῃ ὅλα τὰ συνοριακά του σημεῖα. Τὸ σημεῖον ∞ ἐξαιρεῖται ἐν γένει ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτόν· διὰ τοῦτο, εἶναι ἀκριβέστερον νὰ ὁμιλοῦμεν περὶ συνόλου «κλειστοῦ εἰς τὸ ἐπίπεδον» ἢ «κλειστοῦ ἐπὶ τῆς σφαίρας».

8. Ἕνα σύνολον λέγεται ***ἀνοικτὸν*** ὅταν κάθε σημεῖον του εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ συνόλου.

9. Τὸ ἀνώτερον πέρας τοῦ συνόλου μὲ στοιχεῖα τὰς ἀποστάσεις δύο σημείων τοῦ συνόλου **M** ὀνομάζεται ἡ ***«διάμετρος»*** τοῦ M. Ἂν τὸ M εἶναι κλειστὸν καὶ φραγμένον, θὰ ***ὑπάρχουν*** δύο σημεῖα z_1 καὶ z_2 τοῦ συνόλου ἡ ἀπόστασις τῶν ὁποίων

$$|z_2-z_1|$$

θὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ συνόλου: ἡ διάμετρος δηλαδὴ «πραγματοποιεῖται».

10. Τὸ κατώτερον πέρας τοῦ συνόλου τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου ζ ἀπὸ τὰ σημεῖα ἑνὸς συνόλου **M** ὀνομάζεται ἡ *ἀπόστασις* τοῦ ζ ἀπὸ τοῦ συνόλου. Ἂν τὸ σύνολον **M** εἶναι κλειστόν, θὰ ὑπάρχῃ σημεῖον z_0 τοῦ **M** διὰ τὸ ὁποῖον ἡ ἀπόστασις τοῦ ζ ἀπὸ τοῦ συνόλου M θὰ εἶναι ἴση πρὸς $|z_0-\zeta|$. Ἡ ἀπόστασις δηλ. καὶ ἐδῶ πραγματοποιεῖται.

11. Τὸ κατώτερον πέρας τοῦ συνόλου τῶν ἀποστάσεων $|z_2-z_1|$, ὅπου z_1 ἀνήκει εἰς ἕνα σύνολον $\mathbf{M}_1$ καὶ z_2 ἀνήκει εἰς ἕνα σύνολον M_2, ὀνομάζεται ἡ *ἀπόστασις* μεταξὺ τῶν δύο συνόλων. Ἂν τὰ σύνολα εἶναι κλειστὰ καὶ τὸ ἕνα τουλάχιστον ἀπὸ αὐτὰ εἶναι φραγμένον, ἡ ἀπόστασις αὐτὴ πραγματοποιεῖται καὶ πάλιν.

12. Ἡ *τομὴ* τῶν συνόλων $\mathbf{M}_1$ καὶ $\mathbf{M}_2$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων ποὺ ἀνήκουν εἰς ἀμφότερα τὰ σύνολα. Ἡ τομὴ ἠμπορεῖ νὰ εἶναι σύνολον κενὸν (βλ. **2**)· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ $\mathbf{M}_1$ καὶ $\mathbf{M}_2$ καλοῦνται *ξένα μεταξύ των** σύνολα. Ἀντίστοιχος ὁρισμὸς διὰ πεπερασμένον ἢ ἄπειρον πλῆθος συνόλων.

13. Ἡ *ἕνωσις* δύο συνόλων M_1 καὶ M_2 ὁρίζεται ὡς τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἴτε εἰς τὸ M_1 εἴτε τὸ M_2. Ἀντίστοιχος καὶ πάλιν ὁρισμὸς διὰ πεπερασμένον ἢ ἄπειρον πλῆθος συνόλων.

Ἡ *ἀρχὴ τῶν ἀλληλενθέτων διαστημάτων* (βλ. *Στοιχεῖα*, § 27) ἐπιδέχεται τώρα μίαν πολυδύναμον γενίκευσιν καὶ ὁδηγεῖ εἰς τὸ λεγόμενον **Θεώρημα ἐπὶ τῶν ἀλληλενθέτων συνόλων**:

Θεώρημα 2. Ἐὰν $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2..., \mathbf{M}_n...$ εἶναι μία ἀκολουθία *ἀπὸ σημειοσύνολα ὁποιαδήποτε μὲν ἀλλὰ κλειστὰ καὶ τέτοια ὥστε 1) τὸ καθένα ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ προηγουμένου του, 2) ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν συνόλων αὐτῶν νὰ εἶναι φραγμένον καὶ 3) ἡ διάμετρός των νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ n αὐξάνῃ, θὰ ὑπάρχῃ τότε ἕνα καὶ μόνον ἕνα σημεῖον ζ τὸ ὁποῖον θὰ ἀνήκῃ εἰς ὅλα τὰ σύνολα* $\mathbf{M}_n$.

Ἀπόδειξις. Φανερὸν εἶναι κατὰ πρῶτον ὅτι δύο διαφορετικὰ σημεῖα ζ' καὶ ζ'' δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀνήκουν εἰς ὅλα τὰ σύνολα $\mathbf{M}_n$· διότι τότε αἱ διάμετροι ὅλων τῶν συνόλων δὲν θὰ ἦσαν μικρότεραι ἀπὸ τὸν σταθερὸν θετικὸν ἀριθμὸν $|\zeta''-\zeta'|$,

* Σ.Μ. *Μὴ ἐπίκοινα*, ἴσως.

πρᾶγμα ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Παρατηροῦμεν ἀκολούθως ὅτι σχεδὸν ὅλα[1] τὰ σύνολα εἶναι φραγμένα· διότι ὅλα σχεδὸν τὰ σύνολα θὰ πρέπει νὰ ἔχουν διάμετρον πεπερασμένην καὶ ἕνα σύνολον μὲ πεπερασμένην διάμετρον εἶναι βεβαίως φραγμένον. Ἂν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἐξ ἑκάστου συνόλου $\mathbf{M}_n$ ἐξελέγη ἕνα σημεῖον z_n, τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων τούτων z_n θὰ εἶναι φραγμένον καὶ ἑπομένως θὰ ἔχῃ, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν *Bolzano-Weierstrass*, ἕνα ὁρικὸν σημεῖον ζ. Τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ ἀνήκῃ εἰς ὅλα τὰ σύνολα M_n· διότι, ἂν p εἶναι αὐθαίρετος φυσικὸς ἀριθμός, ἡ ἀκολουθία z_p, z_{p+1},... θὰ ἔχῃ ὅρους ἀνήκοντας ὅλους εἰς τὸ M_p καὶ θὰ ἔχῃ ὡς ὁρικὸν σημεῖον τὸ ζ. Ἀλλὰ ἐπειδὴ τὸ M_p ὑπετέθη κλειστόν, τὸ σημεῖον ζ ἀνήκει ἐπίσης εἰς τὸ M_p καὶ ἑπομένως εἰς τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ θεωρούμενα σύνολα.

Ἕνα βαθύτερον κάπως θεώρημα καὶ μεγάλης σπουδαιότητος προκύπτει ἐκ τῶν ἑξῆς παρατηρήσεων: Κάθε σημεῖον z ἑνὸς κλειστοῦ καὶ φραγμένου συνόλου **M** «καλύπτεται» ὑπὸ κάποιου κύκλου K_z —κεῖται δηλαδὴ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Κατὰ συνέπειαν, ὑπάρχει ἕνα ὡρισμένον σύνολον κύκλων (ἄπειρον ἐνδεχομένως) καὶ τέτοιο ὥστε κάθε σημεῖον τοῦ **M** νὰ καλύπτεται ἀπὸ ἕναν τουλάχιστον ἐκ τῶν κύκλων αὐτῶν. (Ἐννοεῖται ὅτι ἕνας καὶ ὁ αὐτὸς κύκλος ἠμπορεῖ νὰ καλύπτῃ περισσότερα ἀπὸ ἕνα σημεῖα). Ὁδηγούμεθα ἔτσι εἰς τὸ ἑπόμενον **Θεώρημα τῶν Heine-Borel**:

Θεώρημα 3. *Ἐὰν κάθε σημεῖον z ἑνὸς κλειστοῦ καὶ φραγμένου συνόλου **M** καλύπτεται ὑπὸ τουλάχιστον ἑνὸς κύκλου K_z, θὰ ὑπάρχῃ ἕνα πεπερασμένον πλῆθος ἐκ τῶν κύκλων αὐτῶν τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἐπαρκὲς διὰ τὴν κάλυψιν ὁλοκλήρου τοῦ συνόλου.*

Ἀπόδειξις. Εἰς τὴν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως ὁδηγούμεθα ἐμμέσως, ἀποδεικνύοντες τὴν ὑπόθεσιν ὅτι εἶναι ἀναγκαῖον ἄπειρον πλῆθος κύκλων διὰ τὴν κάλυψιν τοῦ M ἀντιφατικὴν πρὸς τὴν ὑπόθεσιν καθ' ἣν τὸ σύνολον **M** εἶναι κλειστόν. Πρὸς

1) *Σχεδὸν ὅλα* σημαίνει: ὅλα μέ, ἐνδεχομένως, ἐξαίρεσιν πεπερασμένου πλήθους τῶν θεωρουμένων ἀντικειμένων.

τὸν σκοπὸν αὐτόν, ἐγκλείομεν ἀρχικῶς τὸ σύνολον **M** ἐντὸς ἑνὸς τετραγώνου Q_1 καὶ διαιροῦμεν τὸ Q_1 εἰς τέσσαρα ἴσα ὑποτετράγωνα. Ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἐπισυνάψωμεν καὶ τὰς πλευράς του, θὰ ἔχωμεν διαίρεσιν τοῦ Q_1 εἰς τέσσαρα κλειστὰ μέρη. Ἕκαστον τότε ἐκ τῶν τεσσάρων ὑποσυνόλων τοῦ M, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τοῦτο, θὰ εἶναι κλειστὸν καὶ φραγμένον σύνολον.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἄπειρον πλῆθος κύκλων εἶναι ἀναγκαῖον διὰ τὴν κάλυψιν τοῦ ὅλου συνόλου—καὶ τὸ αὐτὸ προφανῶς πρέπει νὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τὴν κάλυψιν τοῦ ἑνὸς τουλάχιστον ἐκ τῶν τεσσάρων, ὡς ἄνω, ὑποσυνόλων. Ἔστω Q_2 τὸ πρῶτον ἐκ τῶν τεσσάρων τετραγώνων[1] διὰ τὸ ὁποῖον τοῦτο συμβαίνει. Συνεχίζοντες τὴν διαδικασίαν αὐτὴν ὁδηγούμεθα εἰς μίαν ἀκολουθίαν $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots, Q_n, \ldots$ ἀλληλενθέντων τετραγώνων (μὲ διαμέτρους φθινούσας πρὸς τὸ μηδὲν) καὶ μὲ τὸ καθὲν ἐξ αὐτῶν περιέχον ἕνα ὑποσύνολον τοῦ **M** διὰ τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται ἄπειρον πλῆθος κύκλων διὰ τὴν κάλυψίν του.

Τοῦτο ὅμως δὲν ἠμπορεῖ νὰ συμβαίνῃ ἂν τὸ **M** εἶναι σύνολον κλειστόν. Διότι ἂν τὸ δίκτυον τοῦτο ἐκ τετραγώνων «συρρικνωθῇ» εἰς τὸ σημεῖον ζ, τὸ ζ τοῦτο θὰ εἶναι ὁρικὸν σημεῖον τοῦ **M** καὶ θὰ ἀνήκῃ συνεπῶς εἰς τὸ M· τὸ ζ ἄρα θὰ καλύπτεται ὑπὸ ἑνὸς ἀπὸ τοὺς θεωρουμένους κύκλους, ἔστω ἀπὸ τὸν K_ζ. Ἂν λοιπὸν ὁ φυσικὸς p ἐκλεγῇ ἐπαρκῶς μεγάλος ἀριθμὸς ὥστε ἡ διαγώνιος τοῦ Q_p νὰ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ζ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου K_ζ, τότε ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ **M** τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ Q_p θὰ εἶναι ἤδη κεκαλυμμένα ἀπὸ τὸν κύκλον τοῦτον K_ζ — πρᾶγμα ἀντιβαῖνον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἄπειρον πλῆθος κύκλων ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κάλυψιν τῶν σημείων αὐτῶν. Καὶ ἐπειδὴ τοῦτο δὲν συμβαίνει, συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος.

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα (ἀριθμοὶ ἢ σημεῖα) ἑνὸς συνόλου εἶναι

1. Τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων λαμβάνομεν παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας συντεταγμένων καὶ ἀριθμοῦμεν αὐτὰ κατὰ τὴν φορὰν καθ' ἣν ἀριθμοῦνται τὰ τέσσαρα τεταρτημόρια τοῦ ἐπιπέδου.

δυνατὸν νὰ ἀριθμηθοῦν, νὰ ὁρισθῇ δηλ. δι' αὐτὰ μία διάταξις.

$$z_1, z_2, z_3 \ldots, z_n, \ldots,$$

εἰς τρόπον ὥστε κάθε στοιχεῖον νὰ ἀντιστοιχίζεται εἰς ἕνα ὡρισμένον φυσικὸν ἀριθμόν, τὸ σύνολον τοῦτο ἐπονομάζεται *ἀριθμήσιμον*. Ἂν τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν, τὸ σύνολον λέγεται *μὴ ἀριθμήσιμον*. (Παρβλ. *Στοιχεῖα*, κεφ. 7, ὅπου δίδονται καὶ παραδείγματα). Κατόπιν μιᾶς τέτοιας ἀριθμήσεως, λέγομεν ὅτι τὸ σύνολον ἔχει καταταγῇ κατὰ *ἀκολουθίαν ἀριθμῶν (σημείων)*. Ἐν γένει, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἐπιτρέπεται νὰ ἐμφανίζεται εἰς τὴν ἀκολουθίαν αὐτὴν πολλὰς φορὰς ἢ καὶ ἀπείρους φοράς. Ἔχομεν τότε τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμόν:

Ἐὰν εἰς κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $1, 2, \ldots, n, \ldots$ ἀντιστοιχίζεται, κατὰ ὁποιονδήποτε τρόπον ἕνας μόνος ὡρισμένος μιγαδικὸς ἀριθμός,

$$z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots,$$

ἀντιστοίχως, οἱ ἀριθμοὶ τότε αὐτοὶ καὶ μὲ τὴν διάταξιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν μίαν ***ἀκολουθίαν ἀριθμῶν*** καὶ τὰ ἀντιπροσωπευτικὰ αὐτῶν σημεῖα μίαν ***ἀκολουθίαν σημείων***. Ἡ ἀκολουθία συμβολίζεται συντόμως $\{z_n\}$ καὶ οἱ ἀριθμοὶ ποὺ τὴν ἀποτελοῦν καλοῦνται *ὅροι* της. Ἐνδιαφερόμεθα λοιπὸν ἐδῶ περὶ ἀριθμησίμων συνόλων, ὅλα τὰ στοιχεῖα τῶν ὁποίων ἔχουν ἀριθμηθῇ κατὰ ἕνα καθωρισμένον τρόπον ἀλλὰ μὲ τὴν εἰδικὴν συμφωνίαν ὅπως ὅροι μὲ διαφορετικοὺς δείκτας νὰ μὴ εἶναι ἀναγκαίως διαφορετικοὶ μεταξύ των. Εἰς τὴν εἰδικὴν αὐτὴν περίπτωσιν, ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ πολλὰς ἢ καὶ ἀπείρους φορὰς ὡς ἕνα σημεῖον τῆς ἀκολουθίας. Εἰς τὸ ἑξῆς καὶ ἀνεξαρτήτως τῆς συμφωνίας αὐτῆς, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ὁποίας εὔκολα βλέπομεν, αἱ θεωρήσεις τὰς ὁποίας ἐξεθέσαμεν ἀνωτέρω διὰ ὁποιαδήποτε σύνολα ἀριθμῶν (σημείων) ἰσχύουν καὶ διὰ ἀκολουθίας ἀριθμῶν (σημείων). Ἰδιαιτέρως ἰσχύουν τὰ Θεωρήματα 1, 2 καὶ 3 τῆς παραγράφου αὐτῆς· θὰ πρέπει μόνον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι, βάσει τῆς συμφωνίας τὴν ὁποίαν ἐκάμαμεν, ἕνα σημεῖον ζ τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται ἀπείρους φορὰς εἰς μίαν ἀκολουθίαν σημείων θὰ πρέπει νὰ θεωρῆται ὡς ὁρικὸν σημεῖον τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας. Τὸ ζ λέγεται ὁρικὸν σημεῖον τῆς ἀκολουθίας $\{z_n\}$ τότε καὶ μόνον τότε ὅταν, διὰ δοθὲν $\varepsilon < 0$ (αὐθαιρέτως μικρόν), ἄπειρον πλῆθος ὅρων τῆς ἀκολουθίας ἀνευρίσκεται εἰς μίαν ε-περιοχὴν τοῦ ζ· δηλαδὴ ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἡ ἀνισότης

$$|z_n - \zeta| < \varepsilon$$

ἰσχύει δι' ἀπείρους τιμὰς τοῦ δείκτου n. Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον ἔχει ἡ περίπτωσις ὅπου τὸ ζ εἶναι τὸ μοναδικὸν ὁρικὸν σημεῖον τῆς ἀκολουθίας $\{z_n\}$. Διότι τότε ἡ ἀνισότης αὐτὴ ἰσχύει δι' ἐπαρκῶς μεγάλα n καί, συνεπῶς, διὰ σχεδὸν ὅλα τὰ n [ἢ διὰ n μεγαλύτερα «κάποιου ὡρισμένου φυσικοῦ», π.χ. διὰ $n \geqslant n_0 = n_0(\varepsilon)$]. Τὸ ζ λέγεται τότε τὸ *ὅριον* τῆς ἀκολουθίας. Γράφομεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν

$$z_n \to \zeta \text{ διὰ } n \to \infty \quad \text{ἢ} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = \zeta$$

καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *συγκλίνει πρὸς τὴν ὁριακὴν τιμὴν* ζ.

Ἡ γενικὴ ἀρχὴ διὰ τὴν σύγκλισιν ἢ τὸ κριτήριον συγκλίσεως τοῦ Cauchy μᾶς παρέχει μίαν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο (βλ. *Στοιχεῖα*, § 26):

Θεώρημα 4. *Μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ ἔχῃ ὅριον ἡ ἀκολουθία $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ εἶναι, διὰ δοθέντα αὐθαίρετον ἀριθμὸν $\varepsilon < 0$, νὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς $n_0 = n_0(\varepsilon)$ τέτοιος ὥστε*

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

δι' ὅλα τὰ $n > n_0(\varepsilon)$ καὶ δι' ὅλα τὰ $p \geqslant 0$.

Ἂν δοθῇ μία ἀκολουθία ἀριθμῶν $\{a_n\}$, αἱ ἀκολουθίαι $\{z_n\}$ μὲ ὅρους τὰ ἀθροίσματα.

$$z_1 = a_1,\ z_2 = a_1 + a_2, \ldots,\ z_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n), \ldots,$$

ἢ τὰ γινόμενα

$$z_1 = a_1,\ z_2 = a_1 \cdot a_2, \ldots,\ z_n = (a_1 \cdot a_2 \ldots a_n), \ldots,$$

παρίστανται συντόμως διὰ τῶν συμβόλων

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \prod_{n=1}^{\infty} a_n,$$

ἀντιστοίχως. Ἡ πρώτη ἀκολουθία καλεῖται *ἄπειρος σειρὰ* μὲ ὅρους a_n καὶ ἡ δευτέρα *ἄπειρον γινόμενον* μὲ παράγοντας a_n. Τὰ z_n λέγονται, ἀντιστοίχως, *μερικὰ ἀθροίσματα* καὶ *μερικὰ γινόμενα*. Ὑποθέτομεν τὸν ἀναγνώστην ἐξοικειωμένον μὲ τὴν χρῆσιν τῶν ἀπείρων σειρῶν (βλ. *Στοιχεῖα*, κεφ. 7, 8).

Ἀσκήσεις. 1. Τὸ σύνολον ποὺ ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$|z| + R(z) \leqslant 1$$

εἶναι φραγμένον; Ποῖον τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει τὸ σημειοσύνολον αὐτό;

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε σύνολον ἀποτελούμενον ἀπὸ μεμονωμένα μόνον σημεῖα εἶναι ἀριθμήσιμον.

3. Νὰ ἀποδειχθοῦν οἱ εἰς τοὺς ὁρισμοὺς 10 καὶ 11 (σελ. 10 καὶ 11) ἰσχυρισμοί μας περὶ τοῦ «πραγματοποιησίμου» τῶν ἀποστάσεων.

4. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε ὁρικὸν σημεῖον ἑνὸς συνόλου **M** ποὺ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ **M** εἶναι συνοριακὸν τοῦ συνόλου σημεῖον καί, ἀντιστρόφως, ὅτι κάθε συνοριακὸν σημεῖον τοῦ **M** ποὺ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ **M** εἶναι ὁρικὸν τοῦ συνόλου σημεῖον.

5. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν ὁρικῶν σημείων ἑνὸς συνόλου εἶναι σύνολον κλειστόν.

§ 4. Δρόμοι, χωρία, συνεχῆ (Continua)

Εἰς τὰ ἀκολουθοῦντα χαράσσομεν συχνὰ *δρόμους* εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ θεωροῦμεν *χωρία*. Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ δώσωμεν πολὺ σαφεῖς ὁρισμοὺς τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν.

1. Ἐὰν $x(t)$ καὶ $y(t)$ εἶναι συνεχεῖς (πραγματικαὶ) συναρτήσεις τοῦ t εἰς τὸ διάστημα $\alpha \leqq t \leqq \beta$, τότε

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

εἶναι ἡ παραμετρικὴ παράστασις μιᾶς *συνεχοῦς καμπύλης*. Ἂν ἡ καμπύλη αὐτὴ δὲν ἔχει *πολλαπλᾶ σημεῖα*, ἂν δηλαδὴ εἰς δύο διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου t, ἀντιστοιχοῦν δύο διαφορετικὰ σημεῖα (x,y) ἡ καμπύλη ὀνομάζεται ***τόξον τοῦ Jordan.*** Ἂν θέσωμεν

$$x+iy=z \text{ ὁπότε } x(t)+i\,y(t)=z(t),$$

ἡ παράστασις τῆς καμπύλης ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ συντομότερον εἰς τὴν μορφὴν

$$z=z(t), \quad a\leqslant t\leqslant \beta.$$

$z(a)$ εἶναι τὸ ἀρχικὸν σημεῖον ἢ ἡ ἀρχὴ τοῦ τόξου, $z(\beta)$ τὸ πέρας αὐτοῦ. Κατόπιν τούτων ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἕνα τόξον τοῦ Jordan εἶναι πάντοτε ***προσανατολισμένον***, ὅτι δηλαδή, ἂν δοθοῦν δύο σημεῖα τοῦ τόξου, εἴμεθα πάντοτε εἰς θέσιν νὰ ἀποφανθῶμεν περὶ τοῦ ποῖον ἐξ αὐτῶν προηγεῖται τοῦ ἄλλου, καὶ ἐπιπλέον, περὶ τοῦ ποῖον εἶναι τὸ μέρος τοῦ τόξου τὸ ὁποῖον θὰ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς κείμενον «μεταξὺ» τῶν ἐν λόγῳ σημείων.

Μία *κλειστὴ καμπύλη τοῦ Jordan* εἶναι μία συνεχὴς καμπύλη διὰ τὴν ὁποίαν $x(a)=x(\beta)$, $y(a)=y(\beta)$ χωρὶς ὅμως νὰ ἔχῃ πολλαπλᾶ σημεῖα.

Δι' ἕνα τόξον τοῦ Jordan δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ὁρίζεται τὸ μῆκος του. Ἂν τοῦτο συμβαίνῃ, τὸ τόξον καλεῖται ***εὐθυγραμμίσιμον*** καὶ ἐπίσης **τμῆμα δρόμου.**

Δὲν πρόκειται νὰ εἰσέλθωμεν ἐδῶ εἰς μίαν αὐστηροτέραν ἔρευναν ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς εὐθυγραμμισιμότητος· ὑπενθυμίζομεν ἁπλῶς τὸν ὁρισμόν της:

Ἐὰν τὸ παραμετρικὸν διάστημα $[a,\beta]$ διαιρεθῇ μὲ οἱονδήποτε τρόπον εἰς n μέρη,

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$$

καὶ τὰ σημεῖα $z(t_\nu)$ $(\nu=0,1,2,\ldots,n)$ σημειωθοῦν ἐπὶ τοῦ τόξου καὶ συνδεθοῦν κατόπιν ἀνὰ δύο κατὰ τὴν τάξιν αὐτὴν μὲ εὐθύγραμμα τμήματα, κατασκευάζεται ἔτσι τὸ λεγόμενον ***ἐγγεγραμμένον πολυγωνικὸν τόξον***. Ἂν τὸ σύνολον τῶν μηκῶν ὅλων αὐτῶν τῶν ἐγγεγραμμένων τόξων εἶναι φραγμένον, τὸ θεωρούμενον τόξον θὰ λέγεται ***εὐθυγραμμίσιμον*** καὶ ὡς μῆκος του ὁρίζεται τὸ ἀνώτερον πέρας τοῦ συνόλου τούτου. Τὸ τόξον τοῦ Jordan, τοῦ ὁποίου ἡ παραμετρικὴ παράστασις ἐδόθη

προηγουμένως, θὰ εἶναι τότε καὶ μόνον τότε εὐθυγραμμίσιμον ὅταν καὶ αἱ δύο συναρτήσεις $x(t)$ καὶ $y(t)$ εἶναι ***πεπερασμένης μεταβολῆς***. Τοῦτο εἰδικῶς συμβαίνει πάντοτε εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου αἱ παράγωγοι $x'(t)$ καὶ $y'(t)$ ὑπάρχουν καὶ εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸ διάστημα $[a,\beta]$.

Ὅταν ἕνα σύνολον ἀπὸ τμήματα δρόμων εἶναι πεπερασμένον καὶ τὰ τόξα ποὺ τὸ ἀποτελοῦν εἶναι ἔτσι ἡνωμένα μεταξύ τους ὥστε ἡ ἀρχὴ τοῦ καθενὸς νὰ ταυτίζεται μὲ τὸ πέρας τοῦ προηγουμένου του τόξου, τὸ σύνολον αὐτὸ σχηματίζει ἕνα **δρόμον.** Ἕνας δρόμος, ἑπομένως, ἔχει ὡρισμένον πάντοτε μῆκος, εἶναι προσανατολισμένος καὶ ἐπιδέχεται μίαν παράστασιν τῆς μορφῆς $z=z(t)$ τέτοιαν, ὥστε, ὅταν τὸ t διατρέχῃ ἕνα ὡρισμένον (πραγματικὸν) διάστημα, τὸ σημεῖον z νὰ διαγράφῃ ὁλόκληρον τὸν δρόμον μίαν καὶ μόνον φορὰν καὶ κατὰ μίαν ὡρισμένην κατεύθυνσιν κινήσεως. Τὸ μῆκος τοῦ δρόμου τούτου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν συστατικῶν αὐτοῦ μερῶν. Ἀντιστρόφως, ἂν διαιρεθῇ ἕνας δρόμος εἰς μέρη διὰ διαφόρων σημείων ἐπ' αὐτοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν ἐπὶ μέρους τόξων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τοῦ δρόμου. Ἐν ἀντιθέσει ὅμως πρὸς τὸ τμῆμα δρόμου, ἕνας δρόμος εἶναι δυνατὸν νὰ αὐτοτέμνεται μὲ οἱονδήποτε τρόπον. Ἕνεκα δὲ τῆς συνεχείας τῶν συναρτήσεων $x(t)$ καὶ $y(t)$, τὰ σημεῖα ἑνὸς δρόμου ἀποτελοῦν σύνολον ***κλειστόν***.

Ὅταν ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας ἑνὸς δρόμου εἶναι τὰ αὐτὰ σημεῖα, ὁ δρόμος αὐτὸς ἐπονομάζεται **κλειστὸς δρόμος.** Ὁ προσανατολισμός του νοεῖται κατὰ τὴν φορὰν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σημεῖον $z(t)$ διαγράφει τὴν κλειστὴν καμπύλην μίαν καὶ μόνον φορὰν ὅταν τὸ t διατρέχῃ τὸ διάστημα μεταβολῆς του. Ἄν, κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, εἰς διαφορετικὰς τιμὰς τοῦ t ἀντιστοιχίζωνται διαφορετικὰ σημεῖα z — μὲ ἐξαίρεσιν τῆς ἀρχικῆς καὶ τελικῆς τιμῆς τοῦ t — ὁ κλειστὸς δρόμος ὀνομάζεται **ἁπλοῦς.** Τὸ θεώρημα ποὺ ἀκολουθεῖ ἀναφέρεται εἰς ἁπλοὺς κλειστοὺς δρόμους καί, γενικώτερον, εἰς κλειστὰς καμπύλας τοῦ Jordan.

Τὸ θεώρημα τοῦ Jordan. *Μία κλειστὴ καμπύλη τοῦ Jordan διαιρεῖ τὸ ἐπίπεδον εἰς ἀκριβῶς δύο μὴ ἐπίκοινα (ξένα πρὸς* *ἄλληλα) χωρία (βλ. κατωτέρω), ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα κεῖται ἐντὸς τῆς καμπύλης καὶ τὰ ἄλλο ἐκτὸς αὐτῆς.*

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ σπουδαίου αὐτοῦ θεωρήματος—παρὰ τὸ ἐποπτικῶς πρόδηλον αὐτοῦ—εἰσδύει εἰς μέγα βάθος καὶ δὲν ἔχει θέσιν εἰς τὸ βιβλίον αὐτό[1]. Ὅταν ὁ προσανατολισμὸς ἑνὸς ἁπλοῦ κλειστοῦ δρόμου εἶναι τέτοιος, ὥστε τὸ ἐσωτερικόν του νὰ κεῖται πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ προσανατολισμὸς αὐτὸς λέγεται θετικός· ἄλλως, ἀρνητικός[2]. Ὁ προσανατολισμὸς τῶν ἁπλῶν κλειστῶν δρόμων ὑποτίθεται πάντοτε θετικὸς—ἐκτὸς ἂν γίνεται μνεία περὶ τοῦ ἀντιθέτου.

Κάθε (προσανατολισμένον) εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι φυσικὰ ἕνα τμῆμα δρόμου. Ἕνα πεπερασμένον πλῆθος ἀπὸ τμήματα δρόμου, ποὺ εἶναι συνηνωμένα κατὰ τάξιν καὶ εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀρχὴ τοῦ καθενὸς νὰ ταυτίζεται πρὸς τὸ πέρας τοῦ προηγουμένου τμήματος, μᾶς δίδει ἕνα δρόμον ποὺ λέγεται *τμηματικὸν τόξον*. Ἂν ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας αὐτοῦ εἶναι τὰ αὐτὰ σημεῖα, ὁ δρόμος λέγεται κλειστὸς ἤ, ἀκριβέστερον, *πολύγωνον κλειστόν*. Κατὰ τὸ προηγούμενον δὲ Θεώρημα, ἂν τὸ κλειστὸν τοῦτο πολύγωνον εἶναι ἁπλοῦν, ἠμποροῦμεν νὰ ὁμιλοῦμεν περὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ του καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ του μέρους ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

Ἀποδεικνύομεν τώρα τὰ ἀκόλουθα δύο Λήμματα διὰ τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῶν ἀργότερον.

Λῆμμα 1. *Κάθε κλειστὸν πολύγωνον p εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ εἰς πεπερασμένον πλῆθος ἁπλῶν κλειστῶν πολυγώνων καὶ εἰς πεπερασμένον πλῆθος εὐθυγράμμων τμημάτων διαγραφομένων δὶς καὶ κατ' ἀντιθέτους φοράς. Τὸ καθὲν δὲ ἀπὸ τὰ πολύγωνα p διαγράφεται ὁλόκληρον ἢ κατὰ τὴν θετικὴν ἢ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν.*

---

1. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν βλ. G.N.Watson: *Complex Integration and Cauchy's Theoren*, Cambridge Tracts, No 15, 1914, κεφ. 1.

2. Διὰ τὸν ἀκριβέστερον ὁρισμὸν τοῦ θετικοῦ προσανατολισμοῦ, βλ. σελ. 15 καὶ 16 τοῦ ἰδίου βιβλίου.

Ἀπόδειξις. Ἂς παραστήσωμεν τὰς πλευρὰς

$$A_1A_2,\ A_2A_3, \ldots,\ A_{n-1}A_n\,,\ A_n\,A_{n+1}$$

τοῦ πολυγώνου p διὰ τῶν γραμμάτων

$$s_1,\ s_2, \ldots,\ s_{n-1},\ s_n\,,$$

ἀντιστοίχως· ἐπειδὴ $n \geqq 2$, τὰ σημεῖα A_1 καὶ A_{n+1} εἶναι τὰ αὐτά, $A_1 = A_{n+1}$, καὶ ἑπομένως ἡ πλευρὰ s_n εἶναι τμῆμα τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ἀνοικτὸν ὡς τὸ πέρας του A_{n+1}. Χωρὶς βλάβην δὲ τῆς γενικότητος, ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει ζεῦγος διαδοχικῶν πλευρῶν μὲ *ἕνα μόνον* κοινὸν σημεῖον καὶ αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀπὸ τὰς ἑξῆς δύο ἀποφάνσεις μία καὶ μόνον μία ἀληθεύει.

1) *Κάθε*

$$s_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

ἔχει ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ $s_{\nu-1}$ καὶ κανένα κοινὸν μετὰ τοῦ

$$s_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu-2).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, p εἶναι πολύγωνον ἁπλοῦν καὶ δὲν ἔχομεν τίποτε ἄλλο νὰ ἀποδείξωμεν.

2) *Ὑπάρχουν s_ν μὲ $\nu \geqq 2$ καὶ τέτοια, ὥστε*

ἢ α) Τὸ s_ν ἔχει περισσότερα ἀπὸ ἕνα κοινὰ σημεῖα μὲ τὸ $s_{\nu-1}$,

ἢ β) Τὸ s_ν ἔχει τουλάχιστον ἕνα κοινὸν σημεῖον μὲ ἕνα ἢ περισσότερα ἀπὸ τὰ τμήματα

$$s_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu-2).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἂς ὀνομάσωμεν s_k τὸ πρῶτον ἀπὸ αὐτὰ τὰ s_ν (s_k δηλ. εἶναι τὸ μὲ μικρότερον δείκτην s_ν).

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ἂν ἡ α) ἰδιότης ἰσχύῃ διὰ τὸ s_k, ἢ I) ὑπάρχει σημεῖον B_{k-1} τοῦ s_{k-1} τέτοιο ὥστε

$$B_{k-1} = A_{k+1}$$

καὶ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $B_{k-1}A_k\,A_{k-1} = q'$ διαγράφεται, κατὰ τὴν φορὰν ταύτην, δὶς καὶ κατ' ἀντιθέτους φορὰς—ὁπότε

$\overline{A_1A_2}\,\overline{A_2A_3}\cdots\overline{A_{k-1}B_{k-1}}\,\overline{A_{k+1}A_{k+2}}\cdots\overline{A_nA_{n+1}}$ εἶναι ἕνα κλειστὸν πολύγωνον p',

ἢ II) ὑπάρχει σημεῖον B_k τοῦ S_k τέτοιο ὥστε

$$A_{k-1}=B_k$$

καὶ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $A_{k-1}\,A_k\,B_k=q'$ διαγράφεται, κατὰ τὴν φορὰν ταύτην, δὶς κατ' ἀντιθέτους φορὰς — ὁπότε πάλιν τὸ

$$\overline{A_1A_2}\,\overline{A_2A_3}\cdots\overline{A_{k-2}A_{k-1}}\,\overline{B_k\,A_{k+1}}\cdots\overline{A_n\,A_{n+1}}$$

εἶναι ἕνα κλειστὸν πολύγωνον p'. ($B_k\,A_k\,A_{k+1}$ καὶ $A_{k-1}\,A_k\,B_k$ θεωροῦνται ἐκφυλισμέναι μορφαὶ κλειστῶν πολυγώνων).

Ἐὰν ἡ ἰδιότης α) δὲν ἰσχύῃ διὰ τὰ s_k ἀλλ' ἰσχύει ἡ β), ἔστω B_k τὸ πλησιέστερον πρὸς τὸ A_k σημεῖον τοῦ $A_k\,A_{k+1}=s_k$, ἐκ τῶν σημείων τοῦ s_k τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὰ τμήματα

$$s_\mu\,, \qquad (\mu=1,2,\dots,k-2)$$

καὶ ἂς θέσωμεν

$$B_r = B_k$$

ὅπου B_r κεῖται ἐπὶ τοῦ s_r διὰ r πληροῦντα τὴν σχέσιν $r\leqq k-2$. Θὰ ὑπάρχῃ δὲ ἕνα καὶ μόνον τέτοιο B_r ὡς ἐκ τοῦ τρόπου μὲ τὸν ὁποῖον ἐξελέγη τὸ s_k. Θὰ εἶναι τότε τὸ

$$\overline{B_r\,A_{r+1}}\,\overline{A_{r+1}A_{r+2}},\cdots\overline{A_k\,B_k}$$

ἕνα ἁπλοῦν κλειστὸν πολύγωνον q'. Διότι, ἐκ τοῦ τρόπου ἐκλογῆς τοῦ s_k, προκύπτει ὅτι, ἂν τὸ q' δὲν ἦτο ἁπλοῦν, τὸ $A_k\,B_k$ θὰ εἶχε καὶ σημεῖον διάφορον ἀπὸ τὸ B_k μὲ κάποιο ἀπὸ τὰ προηγούμενά του τμήματα· τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ B_k. Τὸ q' διαγράφεται κατὰ τὴν φορὰν προσανατολισμοῦ τοῦ p καί, ἐπειδὴ τὸ q' εἶναι ἁπλοῦν, ἢ ὁλόκληρον κατὰ τὴν θετικὴν ἢ ὁλόκληρον κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν. $\overline{A_1A_2}\,\overline{A_2A_3}\cdots\overline{A_r\,B_r}\,\overline{B_k\,A_{k+1}}\cdots\overline{A_n\,A_{n+1}}$ εἶναι ἕνα κλειστὸν πολύγωνον p'.

Καὶ εἰς τὰς δύο λοιπὸν περιπτώσεις 1) καὶ 2), εἶναι δυνατὸν τὸ p νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἕνα ἁπλοῦν κλειστὸν πολύγωνον q' (ἢ εἰς ἕνα τμῆμα διπλῆς διαγραφῆς καὶ κατ'ἀντιθέτους φορὰς) καὶ εἰς ἕνα κλειστὸν πολύγωνον p'. Ἂν τὸ p' εἶναι ἁπλοῦν, ἡ

ἀπόδειξίς μας συνεπληρώθη. Ἂν ὄχι, μὲ ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω συλλογισμῶν μας εἰς τὸ p', ὁδηγούμεθα εἰς μίαν διαίρεσιν τούτου εἰς ἕνα ἁπλοῦν κλειστὸν πολύγωνον q'' (ἢ εἰς τμῆμα διπλῆς, ὡς ἄνω, διαγραφῆς) καὶ εἰς ἕνα κλειστὸν πολύγωνον p''. Φανερὸν δὲ εἶναι ὅτι, μὲ ἐπανειλημμένας, καὶ κατὰ τὸ πλῆθος των πεπερασμένας, ἐφαρμογὰς τῆς ἀνωτέρω διαδικασίας, καταλήγομεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν περὶ τῆς ὁποίας γίνεται λόγος εἰς τὸ Λῆμμα. Διότι κάθε πλευρὰ τοῦ p δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ παρὰ πεπερασμένον μόνον πλῆθος ὑποτμημάτων της ποὺ νὰ ἀνήκουν καὶ εἰς ἄλλας πλευρὰς — ἢ σημείων ποὺ νὰ μὴ ἀνήκουν εἰς τέτοια ὑποτμήματα, ἀπὸ κοινοῦ μὲ τὰς ἄλλας πλευράς.

Λῆμμα 2. *Κάθε ἁπλοῦν κλειστὸν πολύγωνον εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεθῇ εἰς τρίγωνα μέσῳ διαγωνίων κειμένων εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου.*

Ἀποδεικνύομεν τοῦτο μὲ ἐπαγωγὴν ἐπὶ τοῦ πλήθους τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου. Τὸ λῆμμα ἀληθεύει προφανῶς διὰ κυρτὰ ἢ μὴ κυρτὰ τετράπλευρα (βλ. Σχ. 2). Ἔστω p ἕνα πολύγωνον μὲ n (>4) κορυφὰς καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ λῆμμα ἀπεδείχθη διὰ πολύγωνα μὲ ὀλιγωτέρας ἀπὸ n κορυφάς. Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ὕπαρξιν μιᾶς ἐσωτερικῆς διαγωνίου, ἡ ὁποία ἀναλύει τὸ p εἰς δύο ὑποπολύγωνα· διότι τότε τὸ καθὲν ἀπὸ αὐτὰ θὰ ἔχῃ ὀλιγωτέρας ἀπὸ n κορυφάς. Τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον :

Μία εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία δὲν διατέμνει τὸ p, ἂς μετακινηθῇ παραλλήλως πρὸς τὸν ἑαυτόν της καὶ πρὸς τὸ πολύγωνον ἕως ὅτου συναντήσῃ αὐτό. Ἀναγκαίως τότε ἡ εὐθεῖα αὐτὴ θὰ περιέχῃ μίαν κορυφὴν A τοῦ p καὶ ἡ ἐσωτερικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου εἰς A θὰ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ δύο ὀρθὰς γωνίας. Ἂς ὠνομάσωμεν B καὶ C τὰς προσκειμένας εἰς τὸ A κορυφὰς τοῦ πολυγώνου. Τότε μία ἀκριβῶς ἀπὸ τὰς ἑπομένας τρεῖς ἰδιότητας θὰ ἀληθεύῃ :

1) Ἡ BC εἶναι διαγώνιος κειμένη εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ p.

2) Ὑπάρχει μία τουλάχιστον κορυφὴ τοῦ p ἐπὶ τοῦ (ἀνοικτοῦ) τμήματος BC (ἂς ὠνομάσωμεν V μίαν ἀπὸ τὰς κορυ-

φὰς αὐτάς), ἀλλὰ καμμία κορυφὴ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ABC.

3) Ὑπάρχει μία τουλάχιστον κορυφὴ τοῦ p εἰς τό ἐσωτερικὸν τοῦ ABC*.

Ἐὰν ἡ ἰδιότης 1) ἀληθεύη, δὲν ἔχωμεν νὰ δείξωμεν τίποτε ἄλλο.

Ἐὰν ἀληθεύη ἡ ἰδιότης 2), ἡ AV θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐωτερικὴ διαγώνιος τοῦ p.

Ἐὰν ἀληθεύη ἡ ἰδιότης 3), ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνα σημεῖον X κινεῖται ἐπὶ τοῦ BC ἀπὸ τοῦ B πρὸς τὸ C ἕως ὅτου ἡ εὐθεῖα AX συναντήση κυρυφὴν ἢ κορυφὰς τοῦ p κειμένας εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ABC. Ἂν V εἶναι ἐκείνη ἡ κορυφὴ ἡ ὁποία εἶναι ἡ πλησιεστέρα πρὸς τὸ A, ἡ ζητουμένη διαγώνιος εἶναι ἡ AB[1].

2. Κάθε σημειοσύνολον, τὸ ὁποῖον

a) περιέχει *ἐσωτερικὰ* μόνον σημεῖα καὶ εἶναι ἄρα (§ 3,8) ***ἀνοικτὸν*** καὶ

b) εἶναι ***συνεκτικόν***,

ὀνομάζεται **χωρίον**.

Ἕνα ***ἀνοικτὸν*** σημειοσύνολον καλεῖται ***συνεκτικὸν*** ὅταν δύο ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὰ σημεῖα του ἠμποροῦν νὰ συνδεθοῦν δι' ἑνὸς τμηματικοῦ τόξου τὸ ὁποῖον νὰ ἀνήκη ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸ σημειοσύνολον.

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν αὐτόν, ὅταν ὁμιλοῦμεν περὶ ἑνὸς ***χωρίου* δὲν** περιλαμβάνομεν εἰς αὐτὸ τὰ συνοριακά του σημεῖα. ***Ἕνα χωρίον μαζὶ μὲ τὰ συνοριακά του σημεῖα***, θὰ τὸ καλοῦμεν πάντοτε ***κλειστὸν χωρίον***.

Τὰ χωρία ἠμποροῦν νὰ ἔχουν πολὺ διαφορετικὰς μορφάς. Παραδείγματος χάριν, ἐκτὸς μερικῶν ἁπλῶν χωρίων ὅπως ὁ κύκλος, τὸ πολύγωνον, τὸ ἡμιεπίπεδον, χωρίον ἐπίσης εἶναι τὸ σημειοσύνολον τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον, $\mathbf{J}(z)>0$, μὲ ἐξαίρεσιν ὅλων τῶν σημείων ποὺ κεῖνται ἐπὶ

---

1. Διὰ μίαν αὐστηροτέραν ἀπόδειξιν τοῦ Λήμματος τούτου, βλέπε: N. J. Lennes, Amer. J. Math., 33 (1911), σσ. 45-47.

* Σ.Μ. Σκόπιμον εἶναι νὰ κάμνη ἡ ἀναγνώστης μερικὰ σχήματα διὰ τὴν καθεμίαν ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς τρεῖς αὐτὰς περιπτώσεις.

τῶν καθέτων τμημάτων μὲ μῆκος τὴν μονάδα εἰς τὰ σημεῖα $x=0, \pm\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\ldots)$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος. Ἃς παρατηρηθῇ ὅτι τὸ συνοριακὸν σημεῖον 0 εἶναι ἀπροσπέλαστον δι' οἱουδήποτε δρόμου ὁ ὁποῖος κεῖται ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ χωρίου.

Ἄξια ἰδιαιτέρας προσοχῆς εἶναι τὰ χωρία ***ἁπλῆς συνοχῆς***. Ἕνα χωρίον λέγεται *ἁπλῆς* ***συνοχῆς*** ὅταν κάθε ἁπλοῦς κλειστὸς δρόμος ὁ ὁποῖος κεῖται ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ χωρίου περικλείει σημεῖα τοῦ χωρίου καὶ μόνον τέτοια. Συνεπῶς, δὲν ὑπάρχουν εἰς αὐτὸν συνοριακὰ τοῦ χωρίου σημεῖα.

Ὁ κύκλος, τὸ τρίγωνον, τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς κλειστῆς καμπύλης τοῦ Jordan, εἶναι χωρία ἁπλῆς συνοχῆς. Τὸ χωρίον ὅμως μὲ σύνορα δύο ὁμοκέντρους περιφερείας ἢ τὸ χαρακτηριζόμενον διὰ τῆς ἀνισότητος $|z|>0$ δὲν εἶναι χωρία ἁπλῆς συνοχῆς.

Ἀποδεικνύομεν ἀκόμη καὶ τὸ ἀκόλουθον Λῆμμα.

Λῆμμα 3 *Ἐὰν ἕνας δρόμος k (ἤ, γενικώτερον, ἕνα κλειστὸν σημειοσύνολον) κεῖται ἐντὸς ἑνὸς χωρίου* $\mathbf{T}$, *θὰ ὑπάρχη ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς* ρ *τέτοιος, ὥστε ἡ ἀπόστασις κάθε σημείου τοῦ δρόμου ἀπὸ τὸ σύνορον τοῦ χωρίου νὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ* ρ· *μὲ ἄλλους λόγους, δὲν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ k εἰς ὁσονδήποτε μικρὰν ἀπόστασιν ἀπὸ σημεῖα τοῦ συνόρου τοῦ* $\mathbf{T}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ κάθε σημεῖον z τοῦ k κεῖται ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$, μία κυκλικὴ περιοχὴ μὲ κέντρον z καὶ ἀκτῖνα, ἔστω, ρ_z θὰ ἀνήκη ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸ $\mathbf{T}$. Ἃς ἀντιστοιχίσωμεν τώρα — ὅπως καὶ εἰς τὸ Θεώρημα τῶν Heine-Borel — πρὸς τὸ καθένα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ z τόν κύκλον μὲ κέντρον z καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{2}\rho_z$. Σύμφωνα τότε μὲ τὸ ἐν λόγω θεώρημα, ἕνα πεπερασμένον πλῆθος ἀπὸ τοὺς κύκλους αὐτοὺς ἐπαρκεῖ διὰ τὴν πλήρη κάλυψιν τοῦ k. Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροτέρου ἀπὸ τοὺς κύκλους τούτους. Ὁ ρ θὰ πληροῖ τότε τὰ αἰτήματα τοῦ λήμματος, ἀφοῦ ἕνας κύκλος μὲ ἀκτῖνα ρ κεῖται βεβαίως ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$, ἀκόμη καὶ ἐὰν τὸ κέντρον του εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας κάποιου ἀπὸ τοὺς (πεπερασμένου πλήθους) καλύπτοντας τούτους κύκλους.

3. Κάθε *φραγμένον* σημειοσύνολον τὸ ὁποῖον εἶναι

a) *κλειστὸν* καὶ

b) *συνεκτικὸν*

προσονομάζεται **συνεχὲς** (continuum).

Ἕνα *κλειστὸν* καὶ *φραγμένον* σημειοσύνολον λέγεται *συνεκτικὸν* ὅταν ἕνα ὁποιονδήποτε ζεῦγος ἀπὸ δύο σημεῖα του A καὶ B δύναται νὰ συνδεθῇ διὰ μιᾶς «ε-ἁλύσου». Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἂν δοθῇ ἕνας ὁποιοσδήποτε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει ἕνα πεπερασμένον πλῆθος ἀπὸ σημεῖα τοῦ συνόλου,

$$A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_n = B,$$

μὲ ἀπόστασιν δύο ὁποιωνδήποτε διαδοχικῶν ἀπὸ αὐτὰ μικροτέραν τοῦ ε.

Ἐπειδὴ τὰ συνεχῆ ἠμπορεῖ νὰ ἔχουν τὰς πλέον διαφορετικὰς μορφάς, σκόπιμον εἶναι συχνὰ νὰ ἀντικαθίστανται αὐτὰ μὲ ἁπλούστερα σημειομορφώματα. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν παραθέτομεν καὶ τὸ ἑπόμενον Λῆμμα, τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ὁποίου δὲν ἀναγράφομεν· ἐπειδὴ (ὅπως καὶ διὰ τὸ θεώρημα τοῦ Jordan) παρουσιάζει δυσκολίας εἰς τὴν πλήρη γενίκευσίν της. Εἶναι ἄλλωστε σχεδὸν αὐτόδηλον διὰ σύνολα ἁπλᾶ.

Λῆμμα 4. *Ἂν τὸ K εἶναι ἕνα συνεχές, τὸ συμπλήρωμά του ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα χωρία. Ἐκ τῶν χωρίων τούτων ἕνα καὶ μόνον, ἔστω τὸ* $\mathbf{T}$, *περιέχει σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου εἰς αὐθαιρέτως μεγάλας ἀποστάσεις. Τὸ* $\mathbf{T}$ *καλεῖται τὸ ἐξωτερικὸν χωρίον ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ K. Ἂν $\varepsilon > 0$ ἐκλεγῇ αὐθαιρέτως, θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ἕνα ἁπλοῦν κλειστὸν πολύγωνον P τὸ ὁποῖον θὰ περιέχεται ὁλόκληρον εἰς τὸ* $\mathbf{T}$ *(καὶ τὸ K θὰ κεῖται ἑπομένως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ P) καὶ μὲ τὴν ἰδιότητα ἡ ἀπόστασις κάθε σημείου τοῦ P ἀπὸ τὸ K νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ε.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

§ 5. Ἡ ἔννοια τῆς πλέον γενικῆς (μονοτίμου) συναρτήσεως μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς

Ἐὰν $\mathbf{M}$ εἶναι τυχὸν σημειοσύνολον καὶ z συμβολίζει ἕνα ὁποιονδήποτε σημεῖον τοῦ $\mathbf{M}$, τὸ z ὀνομάζεται *μία* (μιγαδικὴ) *μεταβλητὴ* καὶ τὸ $\mathbf{M}$ *τὸ πεδίον μεταβολῆς* τοῦ z.

Ἐὰν ὑπάρχῃ ἕνας κανών, μέσῳ τοῦ ὁποίου εἰς κάθε σημεῖον z τοῦ $\mathbf{M}$ ἀντιστοιχίζεται ἕνας ὡρισμένος νέος ἀριθμὸς w, ἡ w καλεῖται μία *(μονότιμος) συνάρτησις* τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z. Γράφομεν συμβολικῶς

$$w = f(z),$$

ὅπου f συμβολίζει τὸν ἀνωτέρω κανόνα. Τὸ $\mathbf{M}$ ὀνομάζεται τότε *«τὸ πεδίον ὁρισμοῦ»* καὶ τὸ z τὸ *ὅρισμα** τῆς συναρτήσεως f. Ἡ ὁλότης τῶν τιμῶν w αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντίστοιχοι τῶν σημείων z τοῦ $\mathbf{M}$ καλεῖται τὸ *πεδίον τιμῶν* τῆς συναρτήσεως (ὑπὲρ τὸ $\mathbf{M}$). Θὰ χρησιμοποιοῦνται συχνὰ καὶ ἄλλα σύμβολα διὰ τὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως f, ὡς F, g, h, φ κλπ.

Ἐὰν τὰ z καὶ w γραφοῦν εἰς τὴν μορφὴν $z = x + iy$, $w = u + iv$, ἡ σχέσις

$$w = f(z)$$

ἐπιδέχεται ἐπίσης τὴν ἑρμηνείαν ὅτι εἰς τὸ ζεῦγος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x καὶ y ἀντιστοιχίζονται, μέσῳ ὡρισμένων κανόνων, δύο νέοι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ u καὶ v. Ἐμφανίζονται ἔτσι τὰ u καὶ v ὡς ζεῦγος πραγματικῶν συναρτήσεων τῶν δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν x καὶ y. Θέτομεν

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

* Σ.Μ. Ἂς μὴ γίνεται σύγχυσις ἐδῶ μεταξὺ τοῦ ὁρίσματος z τῆς συναρτήσεως f καὶ τοῦ ὁρίσματος φ τοῦ z εἰς τὴν πολικὴν μορφήν του, $z = (r, \varphi)$· τοῦτο ἄλλωστε σημειοῦται, ὡς εἴδομεν, $\varphi = \arg z$.

καὶ ἑπομένως

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Ἡ u ὀνομάζεται τὸ *πραγματικὸν μέρος* καὶ ἡ v τὸ *φανταστικὸν μέρος* τῆς συναρτήσεως $f(z)$. Εἶναι δηλ. ἡ $f(z)$ ἕνας ἁπλοῦς συνδυασμὸς ἑνὸς ζεύγους πραγματικῶν μεταβλητῶν. Εἰς μερικὰς περιπτώσεις εἶναι χρήσιμος ἡ ἀντίληψις αὐτὴ τῆς συναρτήσεως $f(z)$· τοῦτο γίνεται π.χ. εἰς τὰς §§ 7 καὶ 10. Γενικῶς, ἐν τούτοις, ἡ πραγματικὴ οὐσία τῆς ἐννοίας αὐτῆς ἠμπορεῖ νὰ κατανοηθῇ μόνον ἂν ὁ διαχωρισμὸς τοῦτος παραμερισθῇ καὶ ἡ $f(z)$ θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις *ἀποκλειστικῶς* τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z.

Ὑποθέτομεν καὶ πάλιν τὸν ἀναγνώστην ἐξοικειωμένον ἤδη, εἰς κάποιον τουλάχιστον βαθμόν, μὲ τὰς λεγομένας *στοιχειώδεις συναρτήσεις*, εἰς τὰς ὁποίας περιλαμβάνονται αἱ ρηταὶ συναρτήσεις (αἱ γραμμικαὶ ἰδιαιτέρως συναρτήσεις), ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις e^z, αἱ τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$ καὶ αἱ ἀντίστροφοι τούτων (βλ. *Στοιχεῖα*, Τμ/τα II καὶ V). Διὰ τὰς συναρτήσεις αὐτάς, τὸ πεδίον ὁρισμοῦ των **M** εἶναι ἢ ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον, ὡς διὰ τὰς e^z, $\sin z$, $\cos z$, ἢ τὸ ἐπίπεδον μὲ ἐξαίρεσιν ὡρισμένων σημείων. Π.χ., διὰ τὰς ρητὰς συναρτήσεις ἐξαιροῦνται αἱ ρίζαι τῶν παρονομαστῶν, διὰ τὴν $\cot z$ ὅλα τὰ πραγματικὰ σημεῖα τῆς μορφῆς $k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$ Ὁ κανὼν ἐπὶ τοῦ προκειμένου διὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς συναρτήσεως w συνίσταται εἰς τὴν *ἐκπεφρασμένην* ἔκφρασιν αὐτῆς· νὰ ἠμπορῇ δηλ. νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς w, ἡ ἀντίστοιχος κάποιας τιμῆς z εἰς τὸ **M**, μέσῳ πεπερασμένου ἢ καὶ ἀπείρου πλήθους[1] ἐφαρμογῶν τῶν τεσσάρων θεμελιωδῶν πράξεων τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ἄς σημειωθῇ πάντως ὅτι ὁ κανὼν $z \to w$ εἶναι δυνατὸν νὰ δοθῇ καὶ κατὰ τελείως διαφορετικὸν τρόπον. Παράδειγμα διὰ τὰς εἰδικὰς αὐτὰς περιπτώσεις ἄς εἶναι τοῦτο: Ἔστω **M** τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀριθμῶν $z=x+iy$, διὰ τοὺς ὁποίους x καὶ

1. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ ἐν λόγῳ ὁρικὴ διαδικασία (ἄπειροι συνήθως δυναμοσειραί) θὰ πρέπει φυσικὰ νὰ συγκλίνῃ.

y εἶναι ἀριθμοὶ ρητοί, καὶ ἄς ὡρίσωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ λαμβάνει τὰς τιμὰς $1, 2, 3, \ldots, n$ καθόσον τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν ἀνάπτυγμα τοῦ y ἔχει περίοδον μονοψηφίαν, διψηφίαν,... n-ψηφίαν, ἀντιστοίχως.

Θὰ πρέπει ἀπ' ἀρχῆς καὶ μετ' ἐμφάσεως νὰ τονίσωμεν ὅτι δὲν εἶναι καθόλου ἀπαραίτητον ἡ τιμὴ μιᾶς συναρτήσεως νὰ δίδεται ἐκπεφρασμένως. Ἠμπορεῖ νὰ ὁρίζεται κατὰ πολλοὺς καὶ διαφόρους τρόπους· ὅ,τι ἀπαιτεῖται εἶναι ἡ τιμὴ w τῆς συναρτήσεως νὰ ἀντιστοιχῇ, βάσει τοῦ ὁρισμοῦ, κατὰ τελείως μονοσήμαντον τρόπον εἰς κάθε z τοῦ συνόλου **M**. Γίνεται ἔτσι φανερὸν ὅτι ἡ κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν διατυπουμένη ἔννοια τῆς συναρτήσεως εἶναι πάρα πολὺ εὐρεῖα — τόσον εὐρεῖα ὥστε δύσκολα νὰ ὑποτάσσεται εἰς γενικὰ θεωρήματα καὶ κανόνας. Ἡ προσπάθειά μας ἐπὶ τοῦ προκειμένου εἶναι ὁ περιορισμὸς τῶν ὑποθέσεων κατὰ ἕνα κατάλληλον τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐκλογή, ἐκ τοῦ συνόλου ὅλων τῶν συναρτήσεων, μιᾶς εἰδικῆς κλάσεως συναρτήσεων αἱ ὁποῖαι νὰ παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον ἀπὸ τὴν ἄποψιν τῆς μαθηματικῆς ἐπεξεργασίας των καὶ τῶν ἐφαρμογῶν των εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας.

Ἔκπληξιν προκαλεῖ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ σκοπός μας αὐτὸς ἐπιτυγχάνεται μὲ τὴν μόνην καὶ τελείως ἁπλῆν ἀπαίτησιν ὅπως αἱ συναρτήσεις μας εἶναι διαφορίσιμοι· καθὼς καὶ τὸ ὅτι ἡ ἰδιότης τοῦ διαφορισίμου ἔχει συνεπείας ἀπροσδοκήτους καὶ εἰς μακρὸν ἐξικνουμένας ὡς πρὸς τὴν φύσιν τῶν συναρτήσεων.

Ἡ διαφορισιμότης, ὁριζομένη ἀναλόγως ὅπως καὶ εἰς τὸ πραγματικὸν πεδίον, προϋποθέτει καὶ ἐδῶ τὴν *συνέχειαν*. Τὰς δύο αὐτὰς ἐννοίας καὶ τὰς ἁπλουστέρας των ἰδιότητας ὑποθέτομεν γνωστὰς εἰς τὸν ἀναγνώστην (βλ. *Στοιχεῖα*, Τμ. IV). Τὰς σπουδαιοτέρας ἀπὸ αὐτὰς ἐκθέτομεν εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον.

§ 6. Συνέχεια καὶ διαφορισιμότης

I. Ὡς πεδίον μεταβολῆς **N** τοῦ z ὑποθέτομεν κατὰ πρῶτον ἕνα χωρίον **T** κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς παραγράφου

4,2[1]. Θὰ λέγομεν τότε ὅτι τὸ z εἶναι μία συνεχὴς μεταβλητή· διότι, ἂν ζ εἶναι ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ $\mathbf{T}$, τὸ z ἠμπορεῖ νὰ παριστάνη κάθε σημεῖον μιᾶς περιοχῆς τοῦ ζ, ἄρα καὶ κάθε σημεῖον ἀρκετὰ πλησίον τοῦ ζ. Μία συνάρτησις $w=f(z)$, ὁριζομένη εἰς τὸ $\mathbf{T}$, λέγεται συνεχὴς εἰς ἕνα σημεῖον ζ τοῦ $\mathbf{T}$ ὅταν πληροῖ μίαν ἀπὸ τὰς ἀκολουθούσας τελείως ἰσοδυνάμους συνθήκας(ὅπως, ἀναλόγως, καὶ εἰς τὸ πραγματικὸν πεδίον).

ΠΡΩΤΗ ΜΟΡΦΗ. Τὸ $\lim\limits_{z\to\zeta} f(z)$ ὑπάρχει καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $f(\zeta)$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἐὰν ἐκλεγῇ ἕνας $\varepsilon>0$, εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχίσωμεν εἰς τὸν ε ἕνα ἀριθμὸν $\delta=\delta(\varepsilon)>0$καὶ τέτοιον ὥστε, ἂν θέσωμεν $\omega=f(\zeta)$, νὰ συμβαίνη

$$|w-\omega| = |f(z)-f(\zeta)| < \varepsilon$$

δι' ὅλα τὰ z διὰ τὰ ὁποῖα

$$|z-\zeta| < \delta.$$

Τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ διατυπωθῇ καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς, ὀλιγώτερον ἀκριβολογημένον, τρόπον:

ΔΕΥΤΕΡΑ ΜΟΡΦΗ. Αἱ τιμαὶ $f(z)$ τῆς συναρτήσεως νὰ διαφέρουν ἀπὸ τὴν $f(\zeta)$ κατὰ ποσότητα αὐθαίρετον καὶ ὁσονδήποτε μικρὰν διὰ τιμὰς τοῦ z ἐπαρκῶς πλησίον τοῦ ζ.

ΤΡΙΤΗ ΜΟΡΦΗ. Ἐὰν $z_1, z_2, \ldots, z_n \ldots$ εἶναι μία τυχοῦσα ἀκολουθία ἀριθμῶν τοῦ $\mathbf{T}$ μὲ τὴν ἰδιότητα $z_n \to \zeta$, διὰ τὴν ἀντίστοιχον ἀκολουθίαν $w_1, w_2 \ldots$ τιμῶν τῆς συναρτήσεως νὰ συμβαίνη

$$w_n \to \omega = f(\zeta).$$

Ὅταν μία συνάρτησις $f(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς κάθε σημεῖον ἑνὸς χωρίου, ἡ συνάρτησις f θὰ ὀνομάζεται *συνεχὴς εἰς τὸ χωρίον*.

Ἐνδέχεται αἱ θεωρούμεναι συναρτήσεις νὰ ὁρίζωνται ἐπίσης εἰς μερικὰ συνοριακὰ σημεῖα τοῦ $\mathbf{T}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ νὰ εἶναι ἡ $f(z)$ συνεχὴς εἰς τὸ συνοριακὸν σημεῖον

---

1. **Εἰς τὰ ἑπόμενα, ἀρκεῖ συνήθως νὰ φανταζώμεθα τὸ T ὡς παριστώμενον ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κύκλου.**

ζ τοῦ $\mathbf{T}$ σημαίνει ὅτι αἱ συνθῆκαι συνεχείας πληροῦνται τουλάχιστον ὅταν τὰ z ποὺ ἐμφανίζονται εἰς αὐτὰς εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ $\mathbf{T}$. Κατὰ τὴν ἔννοιαν αὐτήν, ὁμιλοῦμεν τότε περὶ συνεχείας «ἐκ τοῦ ἐσωτερικοῦ» ἢ «ἐκ τῶν ἔσω». Μὲ ὅμοιον τρόπον, ὅταν γίνεται λόγος περὶ συνεχείας «κατὰ μῆκος ἑνὸς δρόμου», ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ συνθῆκαι συνεχείας πληροῦνται δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ δρόμου τούτου· καὶ ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἰς ἄλλα σημεῖα.

Ὅταν εἶναι δυνατὸν νὰ προσδώσωμεν τὴν τιμὴν $\omega=f(z)$ εἰς τὴν συνάρτησιν f διὰ τὸ συνοριακὸν σημεῖον ζ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ $\mathbf{T}$ οὕτως, ὥστε ἡ $f(z)$ νὰ καθίσταται συνεχὴς εἰς τὸ ζ ἐκ τῶν ἔσω—ἔστω ἀκόμη καὶ ἂν εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἀλλάξωμεν μίαν ὁρισθεῖσαν ἤδη τιμὴν τῆς f εἰς τὸ ζ—θὰ λέγωμεν τότε ὅτι ἡ f *ὑποθέτει τὴν συνοριακὴν* τιμὴν ω εἰς τὸ σημεῖον ζ. Τοῦτο δὲ θὰ εἶναι δυνατὸν προφανῶς τότε καὶ μόνον ὅταν τὸ $\lim f(z)$ ὑπάρχῃ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ z τὰς τεινούσας πρὸς τὸ ζ ἐκ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ $\mathbf{T}$.

Φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ συνέχεια τῆς $f(z)$ εἰς τὸ σημεῖον $\zeta=\xi+i\eta$ προϋποθέτει τὴν συνέχειαν εἰς τὸ σημεῖον (ξ,η) τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων $u(x,y)$ καὶ $v(x,y)$ ποὺ εἰσαγάγαμεν προηγουμένως, εἰς τὴν παράγραφον 5. Ὡς πρὸς τὰς συναρτήσεις αὐτάς, τὸ ἀκολουθοῦν **θεώρημα ἐπὶ τῆς ὁμοιομόρφου ἢ ὁμαλῆς συνεχείας** ἰσχύει ἐπίσης διὰ τὰς συνεχεῖς συναρτήσεις μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς.

Θεώρημα. *Ἐὰν ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς ἕνα κλειστὸν καὶ φραγμένον χωρίον $\overline{\mathbf{T}}$, τότε, διὰ κάθε δοθέντα θετικὸν ε, εἶναι δυνατὸν πάντοτε νὰ ἀντιστοιχίσωμεν εἰς αὐτὸν ἕνα θετικὸν $\delta=\delta(\varepsilon)$ τέτοιον ὥστε, ἂν z' καὶ z'' εἶναι δύο σημεῖα τοῦ $\overline{\mathbf{T}}$ διὰ τὰ ὁποῖα $|z'-z''|<\delta$, τὸ μέτρον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς συναρτήσεως νὰ πληροῖ τὴν ἀνισότητα*

$$|w''-w'| = |f(z'')-f(z')| < \varepsilon.$$

Ἀπόδειξις. Ἕνεκα τῆς συνεχείας τῆς f εἰς $z \in \mathbf{T}$ εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ γράψωμεν μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ z

καὶ ἀκτῖνα, ἔστω, τὴν ρ_z καὶ τέτοιαν ὥστε ἡ αἰώρησις[1] τῆς συναρτήσεως ἐντὸς τοῦ κύκλου αὐτοῦ νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\varepsilon}{2}$.

Ἀφ' ἑτέρου, εἰς κάθε σημεῖον z τοῦ $\overline{\mathbf{T}}$ ἠμποροῦμεν νὰ ἀντιστοιχίσωμεν (ὅπως εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Λήμματος 3, §4) τὸν κύκλον μὲ κέντρον z καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{2}\rho_z$ · κατὰ τὸ θεώρημα δὲ τῶν Heine - Borel, πεπερασμένον πλῆθος ἀπὸ τοὺς κύκλους αὐτοὺς ἐπαρκεῖ διὰ τὴν κάλυψιν τοῦ $\overline{\mathbf{T}}$.

Ἐὰν δ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροτέρου ἀπὸ τοὺς κύκλους τούτους, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς πληροῖ τὰς συνθήκας τοῦ θεωρήματος. Πράγματι, ἂν $|z''-z'|<\delta$ καὶ ὁ z' εἶναι κεκαλυμμένος ἀπὸ τὸν κύκλον μὲ κέντρον ζ καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{2}\rho_\zeta$, θὰ εἶναι τότε $\delta \leqslant \frac{1}{2}\rho_\zeta$ · συνεπῶς, καὶ τὰ δύο σημεῖα z' καὶ z'' θὰ κεῖνται ἐντὸς τοῦ κύκλου $k(\zeta, \rho_\zeta)$ καὶ θὰ εἶναι ἄρα $|f(z'')-f(z')|<\varepsilon$.

II. Ὁ ὁρισμὸς τῆς *διαφορισιμότητος*, ὁ ὁποῖος καὶ πάλιν τυπικῶς εἶναι ὁ ἴδιος ὅπως καὶ εἰς τὸ πραγματικὸν πεδίον, ἠμπορεῖ νὰ διατυπωθῇ κατὰ τρεῖς διαφορετικὰς ἐπίσης μορφάς.

Μία συνάρτησις $w=f(z)$ ὡρισμένη εἰς τὸ $\mathbf{T}$ λέγεται *διαφορίσιμος* εἰς ἕνα σημεῖον ζ τοῦ $\mathbf{T}$ ἂν πληροῦται μία ἀπὸ τὰς ἀκολούθους τρεῖς ἰσοδυνάμους συνθήκας.

ΠΡΩΤΗ ΜΟΡΦΗ. Ὑπάρχει τὸ ὅριον

$$\lim_{z\to\zeta} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}.$$

Τὸ ὅριον τοῦτο παριστάνεται μὲ $f'(\zeta)$ ἢ μὲ $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\zeta}$ καὶ καλεῖται ἡ *παράγωγος* ἢ τὸ *διαφορικὸν πηλίκον* τῆς $f(z)$ εἰς τὸ σημεῖον ζ. Μὲ ἄλλους λόγους, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχίσωμεν εἰς τὸ σημεῖον ζ ἕνα νέον ἀριθμὸν $f'(\zeta)$ μὲ τὴν ἰδιότητα, ἂν δοθῇ ἕνας τυχὼν $\varepsilon>0$, νὰ εἶναι πάντοτε δυνατὴ ἡ εὕρεσις ἑνὸς $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιου, ὥστε ἡ ἀνισότης

$$\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}-f'(\zeta)\right|<\varepsilon$$

νὰ ἀληθεύῃ δι' ὅλα τὰ z τοῦ $\mathbf{T}$ διὰ τὰ ὁποῖα $|z-\zeta|<\delta$.

Τοῦτο δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς (κάπως ὀλιγώτερον ἀκριβολογημένον) τρόπον:

ΔΕΥΤΕΡΑ ΜΟΡΦΗ. Δι' ὅλα τὰ z τοῦ $\mathbf{T}$ τὰ ἐπαρκῶς πλησίον τοῦ ζ, τὸ *πηλίκον διαφορῶν*

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\frac{w-\omega}{z-\zeta}=\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{z=\zeta}$$

νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ πλησιάζῃ ὁσονδήποτε στενῶς ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν. Τὸν ἀριθμὸν τότε αὐτὸν σημειώνομεν $f'(\zeta)$.

ΤΡΙΤΗ ΜΟΡΦΗ. Ἐὰν $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, εἶναι μία τυχοῦσα ἀκολουθία ἀπὸ ἀριθμοὺς τοῦ $\mathbf{T}$ καὶ μὲ ὅρους διαφόρους μὲν ἀπὸ τὸ ζ ἀλλὰ μὲ ὅριον τὸ ζ, ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν

$$\Delta_n=\frac{f(z_n)-f(\zeta)}{z_n-\zeta}$$

νὰ ἔχῃ *πάντοτε* τὸ αὐτὸ ὅριον. Τὸ ἀνεξάρτητον τοῦτο ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τῆς ἀκολουθίας $\{z_n\}$ ὅριον σημειώνεται $f'(\zeta)$.

Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ἀναγνώστης γνωρίζει τοὺς κανόνας παραγωγίσεως, τοὺς ἰδίους τυπικῶς ὅπως καὶ εἰς τὸ πραγματικὸν πεδίον, καὶ ἰδιαιτέρως τὸν λεγόμενον «κανόνα ἀλληλουχίας παραγώγων» (Ketten regel, Chain rule). Γνωστὸν ἐπίσης πρέπει νὰ εἶναι εἰς τὸν ἀναγνώστην τὸ νόημα τῆς συνεχείας καὶ τῆς παραγωγισιμότητος διὰ τὴν ἑρμηνείαν μιᾶς συναρτήσεως $w=f(z)$ ὡς ἀπεικονίσεως τοῦ χωρίου ὁρισμοῦ τῆς f εἰς τὸ z-ἐπίπεδον ἐπὶ κάποιου χωρίου τοῦ w-ἐπιπέδου. Μὲ ἄλλους λόγους, ἡ συνέχεια σημαίνει ὅτι «γειτονικὰ» σημεῖα εἰς τὸ z-ἐπίπεδον ἀντιστοιχοῦν εἰς γειτονικὰ σημεῖα εἰς τὸ w-ἐπίπεδον —

1. Τὸ ἀνώτερον δηλαδὴ πέρας τῶν τιμῶν $|f(z'')-f(z')|$, διὰ δύο τυχόντα σημεῖα z', z'' τοῦ ἐν λόγῳ κύκλου καὶ ὁ ὁποῖος κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ $\overline{\mathbf{T}}$.

καὶ ἡ παραγωγισιμότης ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἀπεικόνισις εἶναι *σύμμορφος* [1] (βλ. *Στοιχεῖα*, Τμ. IV, κεφ. 10).

Μία συνάρτησις ἡ ὁποία εἶναι διαφορίσιμος εἰς κάθε σημεῖον ἑνὸς χωρίου λέγεται *διαφορίσιμος εἰς τὸ χωρίον*. Ἡ παράγωγος ἑπομένως θὰ εἶναι συνάρτησις ὁριζομένη εἰς τὸ χωρίον τοῦτο. Αἱ συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι εἶναι διαφορίσιμοι εἰς χωρία εἶναι αἱ μόναι περὶ τῶν ὁποίων ἔγινε λόγος εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον καί, ὡς θὰ δείξωμεν, εἶναι μεγάλης σπουδαιότητος. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν θὰ προσδώσωμεν εἰς αὐτὰς ἕνα εἰδικὸν ὄνομα.

Ὁρισμός. *Μία συνάρτησις ὡρισμένη καὶ διαφορίσιμος εἰς ὁλόκληρον ἕνα χωρίον* **T** *λέγεται (μονότιμος)* **ὁμαλὴ ἀναλυτικὴ** *συνάρτησις εἰς τὸ* **T** *ἤ, συντόμως,* **ἀναλυτικὴ** *ἢ ὁμαλὴ συνάρτησις. Τὸ χωρίον T καλεῖται χωρίον ὁμαλότητος τῆς συναρτήσεως.*

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτόν, ὁ χαρακτηρισμὸς μιᾶς συναρτήσεως ὡς ὁμαλῆς προσδίδεται εἰς αὐτὴν μόνον ἐν σχέσει πρὸς τὸ *χωρίον ὁμαλότητός της*· ὀνομάζομεν ὅμως ἐπίσης τὴν συνάρτησιν ὁμαλὴν καὶ εἰς κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου αὐτοῦ. Ἡ ὁμαλότης, συνεπῶς, εἰς ἕνα σημεῖον A συνεπάγεται αὐτομάτως τὴν ὁμαλότητα τῆς συναρτήσεως εἰς κάποιαν περιοχὴν τοῦ σημείου τούτου, ἀφοῦ τὸ σημεῖον A *καθ' ἑαυτὸ* θὰ πρέπει νὰ εἶναι **ἐσωτερικὸν** σημεῖον ἑνὸς χωρίου ὁμαλότητος. Αἱ στοιχειώδεις συναρτήσεις τὰς ὁποίας ἐμνημονεύσαμεν προηγουμένως εἶναι ὅλαι ὁμαλαὶ εἰς τὰ ἀντίστοιχα χωρία ὁρισμοῦ των. Ἡ συνάρτησις $f(z) = \mathbf{R}(z)$ εὔκολα φαίνεται ὅτι εἶναι μὲν συνεχὴς εἰς ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον ἀλλὰ ὄχι καὶ ὁμαλὴ ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἰς κάθε χωρίον.

Εἰς τὰ ἀκολουθοῦντα τμήματα τοῦ βιβλίου αὐτοῦ θὰ καταφανῇ ὅτι κάθε μέλος τῆς κλάσεως τῶν ὁμαλῶν συναρτήσεων ἐμφανίζει μίαν ἐκπληκτικῶς ἰσχυρὰν ἐσωτερικὴν δομήν. Αἱ

---

1. Αἱ γωνίαι κατ' αὐτὴν διατηροῦνται κατὰ μέγεθος καὶ φορὰν καὶ ἡ μεγέθυνσις ἢ σμίκρυνσις εἰς ἕνα σημεῖον εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς διευθύνσεως.

συναρτήσεις, ἑπομένως, αὗται ἔχουν εἰδικὴν σπουδαιότητα δι' ὅλας τὰς ἐφαρμογὰς εἰς τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας.

Ἀσκήσεις. 1. Ἐρευνήσατε διὰ τὴν συνέχειαν τῶν ἀκολούθων δύο συναρτήσεων:

α) $f(z) = 0$ διὰ $z = 0$ καὶ δι' ὅλα τὰ z διὰ τὰ ὁποῖα $|z| =$ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καὶ

$f(z) = \frac{1}{q}$ διὰ $|z| = \frac{p}{q}$ ὅπου p, q πρῶτοι μεταξύ τους φυσικοί.

β) $f(z)=0$ ἂν $z=0$, $f(z)=\sin\theta$ ἂν $z=r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, $r>0$.

Καὶ διὰ τὰς δύο συναρτήσεις, προσδιορίσατε τὰ σημεῖα συνεχείας καὶ ἀσυνεχείας αὐτῶν.

2. Εἶναι αἱ προηγούμεναι δύο συναρτήσεις διαφορίσιμοι εἰς ὡρισμένα σημεῖα; Τὸ αὐτὸ ἐρώτημα καὶ διὰ τὰς συναρτήσεις:

$$f(z) = |z|, \quad f(z) = \mathbf{R}(z), \quad f(z) = \arg z.$$

3. Ἡ συνάρτησις $f(z)$ ἂς εἶναι συνεχὴς ἐντὸς ἑνὸς κύκλου K (γενικώτερον, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς ἁπλῆς κλειστῆς καμπύλης C) καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι, διὰ κάθε συνοριακὸν σημεῖον ζ, ἔχει ὁρισθῆ διὰ τὴν συνάρτησιν μία συνοριακὴ τιμὴ $f(\zeta)$. Νὰ δειχθῆ ὅτι αἱ συνοριακαὶ αὗται τιμαὶ $f(\zeta)$ συνιστοῦν μίαν συνεχῆ συνάρτησιν κατὰ μῆκος τοῦ συνόρου τοῦ K (ἢ τῆς C).

§ 7. Αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις τῶν Cauchy - Riemann

Τὸ τί σημαίνει διὰ τὰς συναρτήσεις $u(x,y)$ καὶ $v(x,y)$ ἡ ἀπαίτησις ὅπως ἡ $f(z) = u + iv$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τὸ σημεῖον $\zeta = \xi + i\eta$ γίνεται φανερὸν διὰ τῆς ἑξῆς ἐπεξηγήσεως. Τὸ πηλίκον διαφορῶν

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{z\to\zeta} = \frac{[u(x,y+iv(x,y)] - [u(\xi,\eta) + iv(\xi,\eta)]}{(x+iy)-(\xi+i\eta)}$$

θὰ πρέπει νὰ τείνῃ πρὸς ἕνα καὶ μοναδικὸν πεπερασμένον ὅριον μὲ ὁποιονδήποτε τρόπον καὶ ἂν τείνῃ τὸ z πρὸς τὸ ζ. Ἰδιαιτέρως, τὸ ὅριον πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ὅταν τὸ z πλησιάζῃ πρὸς τὸ

ζ κινούμενον παραλλήλως πρὸς τὸν x-ἄξονα ἢ τὸν y-ἄξονα· ὅταν δηλαδή, διὰ ὡρισμένον $y=\eta$, τὸ x πλησιάζῃ πρὸς τὸ ξ ἢ ὅταν, διὰ $x=\xi$, τὸ y πλησιάζῃ πρὸς τὸ η. Ὁδηγούμεθα ἔτσι εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα.

Θεώρημα 1. *Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τὸ σημεῖον $\zeta=\xi+\eta$, θὰ ὑπάρχουν αἱ τέσσαρες μερικαὶ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων u καὶ v εἰς τὸ σημεῖον (ξ,η) :*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u_x(\xi,\eta),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=u_y(\xi,\eta),\quad \frac{\partial v}{\partial x}=v_x(\xi,\eta),\quad \frac{\partial v}{\partial y}=v_y(\xi,\eta).$$

Κατὰ τοὺς δύο τότε ἀνωτέρω τρόπους κινήσεως τοῦ z πρὸς τὸ ξ θὰ ἔχωμεν

$$(1)\qquad f'(\zeta)=u_x+iv_y,\quad f'(\zeta)=\frac{1}{i}\,(u_y+iv_y).$$

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου πορίζόμεθα (ὅπως καὶ εἰς τὸ πραγματικὸν πεδίον) τὸ ἀκόλουθον θεώρημα, τὸ ὁποῖον εἶναι θεμελιώδους σημασίας διὰ τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν.

Θεώρημα 2. *Ἐὰν μία συνάρτησις $f(z)$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς ἕνα χωρίον* **T** *καὶ μὲ παράγωγον ἴσην πρὸς μηδὲν εἰς κάθε σημεῖον τοῦ* **T**, *θὰ εἶναι τότε $f(z)\equiv c$ εἰς τὸ* **T**. *Συνεπῶς : Δύο συναρτήσεις ὁμαλαὶ εἰς τὸ αὐτὸ χωρίον* **T** *καὶ μὲ παραγώγους τὰς αὐτάς, θὰ διαφέρουν εἰς τὸ* **T** *κατὰ μίαν προσθετικὴν σταθεράν.*

Διότι τότε καὶ αἱ δύο μερικαὶ παράγωγοι τοῦ u, ὅπως καὶ τοῦ v, θὰ εἶναι μηδὲν πανταχοῦ ἐντὸς τοῦ **T**. Τὰ u καὶ τὰ v ἑπομένως, ἄρα καὶ ἡ $f(z)$ θὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα πρὸς σταθερὰς ἐντὸς τοῦ **T**.

Ἐπειδὴ αἱ δύο τιμαὶ εἰς (1) θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι, ὁδηγούμεθα ἐπίσης καὶ εἰς τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

Θεώρημα 3. *Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f(z)=u+iv$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τὸ σημεῖον $\zeta=\xi+i\eta$, θὰ ἰσχύουν εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ αἱ δύο ἰσότητες*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad\text{καὶ}\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

διὰ τὰς τέσσαρας μερικὰς παραγώγους τῶν συναρτήσεων $u(x,y)$ καὶ $v(x,y)$. *Ἰδιαιτέρως δὲ θὰ ἀληθεύουν διὰ κάθε σημεῖον ἑνὸς χωρίου ὁμαλότητος τῆς συναρτήσεως $f(z)$.*

Αἱ σπουδαῖαι δύο αὗται σχέσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἱκανοποιοῦν τὸ πραγματικὸν καὶ τὸ φανταστικὸν μέρος τῆς $f(z)$, ὀνομάζονται αἱ *(μερικαὶ)* **διαφορικαὶ ἐξισώσεις τῶν Cauchy - Riemann.** Ἡ σπουδαιότης δὲ αὐτῶν συνίσταται εἰς τὸ ὅτι εἶναι *χαρακτηριστικαὶ* διὰ τὰς ὁμαλὰς συναρτήσεις· διότι ἀληθεύει ἐπίσης καὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ Θεωρήματος 3, ὡς ἀμέσως κατωτέρω δεικνύομεν.

Θεώρημα 4. *Ἐὰν αἱ τέσσαρες μερικαὶ παράγωγοι τῶν u καὶ v ὡς πρὸς τὰ x καὶ y ὑπάρχουν εἰς κάθε σημεῖον ἑνὸς χωρίου* **T** *τοῦ z- ἢ xy-ἐπιπέδου, εἶναι συναρτήσεις συνεχεῖς εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ πληροῦν τὰς διαφορικὰς ἐξισώσεις τῶν Cauchy - Riemann, τότε ἡ συνάρτησις*

$$f(z)=u(x,y)+v(x,y)$$

εἶναι συνάρτησις ὁμαλὴ τοῦ z εἰς τὸ χωρίον **T**.

Ἀπόδειξις. Θὰ ἔχωμεν

$$f(z)-f(\zeta)=[u(x,y)+iv(x,y)]-[u(\xi,\eta)+iv(\xi,\eta)],$$

καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ὁλικοῦ διαφορικοῦ διὰ πραγματικὰς συναρτήσεις δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν, ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&u(x,y)-u(\xi,\eta)=\\&[u_x(\xi,\eta)+\alpha(x,y)](x-\xi)+[u_y(\xi,\eta)+\beta(x,y)](y-\eta)\\&v(x,y)-v(\xi,\eta)=\\&[v_x(\xi,\eta)+\gamma(x,y)](x-\xi)+[v_y(\xi,\eta)+\delta(x,y)](y-\eta),\end{aligned}\right.$$

ὅπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εἶναι συναρτήσεις τῶν x καὶ y ποὺ τείνουν εἰς τὸ μηδὲν ὅταν $(x,y)\to(\xi,\eta)$. Ἐπειδὴ δὲ προφανῶς

$$\left|\frac{x-\xi}{z-\zeta}\right|\leqslant 1,\quad\left|\frac{y-\eta}{z-\zeta}\right|\leqslant 1,$$

ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (2), καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὰς διαφορικὰς ἐξισώσεις τῶν Cauchy-Riemann συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\to u_x(\xi,\eta)+iv_x(\xi,\eta)$$

ὅταν $z\to\zeta$. Εἶναι λοιπὸν διαφορίσιμος ἡ $f(z)$ εἰς τὸ σημεῖον $\zeta(\xi,\eta)$, ἄρα καὶ πανταχοῦ ἐντὸς τοῦ **T**.

῞Οπως βλέπομεν, αἱ ἐξισώσεις τῶν Cauchy - Riemann χαρακτηρίζουν κατὰ μοναδικὸν τρόπον ἐκείνας τὰς συναρτήσεις $u(x,y)$ καὶ $v(x,y)$ αἱ ὁποῖαι ἠμπορεῖ νὰ εἶναι συνιστῶσαι μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως.

᾽Εὰν δὲ τώρα ὑποθέσωμεν ἐπὶ πλέον τὴν ὕπαρξιν καὶ τὴν συνέχειαν ἐντὸς τοῦ **T** τῶν δευτέρας τάξεως μερικῶν παραγώγων τῶν u καὶ v (πρᾶγμα πού, ὅπως θὰ ἀποδειχθῇ εἰς § 16, συμβαίνει αὐτομάτως), ἐκ τῶν σχέσεων Cauchy - Riemann συνεπαγόμεθα ὅτι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

῾Επομένως

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

καὶ ὁμοίως

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Αἱ συναρτήσεις δηλ. u καὶ v πληροῦν τὴν **διαφορικὴν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace**

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0.$$

᾽Εκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι οὔτε τὸ πραγματικὸν $u(x,y)$ οὔτε τὸ φανταστικὸν $v(x,y)$ μέρος μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $f(z)$ ἠμποροῦν νὰ ἐκλεγοῦν αὐθαιρέτως. Διότι ἡ κάθε μία ἐκ τῶν συναρτήσεων αὐτῶν πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace καὶ αἱ δύο δὲ μαζὶ τὰς ἐξισώσεις τῶν Cauchy - Riemann.

᾽Ασκήσεις. 1. Δείξατε ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν Cauchy - Riemann καὶ ἡ ἐξίσωσις τοῦ Laplace πληροῦνται ὑπὸ τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Π.χ. ὑπὸ τῶν

$$f(z)=z,\ z^2,\ z^n,\ e^z,\ \sin z,\ \cos z,\ \tan z,\ \text{κλπ.}$$

2. ᾽Αποδείξατε τὸ Θεώρημα 2 τῆς § 7 χωρὶς διάσπασιν τῆς $f(z)$ εἰς τὸ πραγματικὸν καὶ φανταστικόν της μέρος.

ΜΕΡΟΣ II

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 8. ῾Ορισμὸς τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος

Εἰς τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν, τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως $y=F(x)$ τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς x, λαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ὁρίων x_0 καὶ X, ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Διαιροῦμεν τὸ διάστημα $[x_0, X]$ (x_0 ἔστω $<X$) εἰς n μέρη καὶ κατὰ οἱονδήποτε τρόπον. Τὰ διαιρετικὰ σημεῖα ἂς εἶναι τὰ

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{\nu-1}<x_n=X.$$

᾽Ακολούθως, εἰς τὸ καθὲν διάστημα $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ ἐκλέγομεν ἕνα τυχὸν σημεῖον ξ_ν καὶ σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα

$$J_n=\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-x_{\nu-1})\,F(\xi_\nu).$$

῾Υποθέτομεν ὅτι ἡ διαιρετικὴ αὐτὴ διαδικασία συνεχίζεται διὰ $n=1, 2, 3\ldots$ καὶ κάθε φορὰν κατὰ οἱονδήποτε μὲν τρόπον ἀλλὰ τέτοιον, ὥστε τὰ πλάτη *ὅλων* τῶν διαστημάτων $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ νὰ τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν καθόσον τὸ n αὐξάνει. Θὰ ὑπάρχῃ τότε πάντοτε τὸ ὅριον

$$\lim_{n\to 8} J_n=J$$

καὶ θὰ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς κάθε φορὰν ἐκλογῆς τῶν διαιρετικῶν σημείων ἢ τῶν ἐνδιαμέσων σημείων ξ_ν. Μὲ ἄλλους λόγους, θὰ ὑπάρχη ἕνας ἀριθμὸς J τέτοιος ὥστε, διὰ κάθε δοθέντα $\varepsilon > 0$, νὰ ὑπάρχη ἕνας $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ διὰ τὸν ὁποῖον ἡ ἀνισότης

$$| J_n - J | < \varepsilon,$$

νὰ πληροῦται δι' ὅλα τὰ διαστήματα διὰ τὰ ὁποῖα

$$| x_\nu - x_{\nu-1} | < \delta.$$

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς J καλεῖται τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα καὶ συμβολίζεται

$$J = \int_{x_0}^{X} F(x)dx$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ἀναγνώστης γνωρίζει τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν διὰ τὸ πραγματικὸν ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα, καθὼς καὶ τὴν γεωμετρικήν του ἑρμηνείαν· ὅτι δηλ. εἶναι τοῦτο μία προσέγγισις ἑνὸς ἐπιπέδου ἐμβαδοῦ μέσῳ ἀθροίσματος ὀρθογωνίων.

Ἔστω τώρα $w = f(z)$ μία συνεχὴς συνάρτησις τοῦ z εἰς ἕνα χωρίον $\mathbf{T}$ (ἡ παραγωγισιμότης τῆς f δὲν εἶναι ἀπαραίτητος ἐπὶ τοῦ παρόντος), z_0 καὶ Z δύο τυχόντα σημεῖα τοῦ $\mathbf{T}$. Ὁ ἀκολουθῶν ὁρισμὸς τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος μιᾶς συναρτήσεως μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς εἶναι ἀνάλογος, ἀπὸ τυπικῆς μορφῆς, πρὸς ἐκεῖνον ποὺ ἐδώσαμεν ἀνωτέρω.

Συνδέομεν τὰ σημεῖα z_0 καὶ Z δι' ἑνὸς δρόμου k κειμένου ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$, διαιροῦμεν τὸν k κατὰ οἱονδήποτε τρόπον εἰς n μέρη

$$z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, , z_n = Z,$$

καὶ εἰς τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ τμήματα $z_{\nu-1} \cdots z_\nu$ ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως ἕνα σημεῖον ζ_ν. Θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ ἐπὶ τοῦ προκειμένου τὸ ἄθροισμα

$$J_n = \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1}) f(\zeta_\nu)$$

ἔχει ἐπίσης πάντοτε ὅριον

$$\lim_{n \to \infty} J^n = J,$$

καὶ ὅτι εἶναι τοῦτο ἀνεξάρτητον τόσον ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν

τῶν σημείων διαιρέσεως τοῦ δρόμου k ὅσον καὶ ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τῶν ἐνδιαμέσων σημείων ζ_ν — φθάνει τὰ μήκη ὅλων τῶν διαστημάτων νὰ τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ n αὐξάνη ἀπεριορίστως. Τὸ ὅριον ὅμως τοῦτο J *δὲν εἶναι καὶ* ἀνεξάρτητον τοῦ συνδέοντος τὰ σημεῖα z_0 καὶ Z δρόμου k. Θὰ ἀποδείξωμεν λοιπὸν τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς ἀριθμοῦ J μὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἂν δοθῇ ἕνας ὁποιοσδήποτε $\varepsilon > 0$, εἶναι δυνατὸν πάντοτε νὰ προσδιορισθῇ ἕνας $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιος, ὥστε νὰ εἶναι

$$| J_n - J | < \varepsilon$$

ἀρκεῖ τὰ μήκη ὅλων τῶν δρόμων $z_{\nu-1} \cdots z_\nu$ νὰ ἔχουν γίνη μικρότερα τοῦ δ.

Ἡ ὁριακὴ τιμὴ

$$J = \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1}) f(\zeta_\nu) \right\},$$

κατὰ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν νοουμένη, καλεῖται τὸ *ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τῆς $f(z)$ κατὰ μῆκος τοῦ δρόμου* k καὶ συμβολίζεται

$$\int_{z_0\,k}^{Z} f(z)dz \quad \text{ἤ, συντομώτερον,} \quad \int_k f(z)dz.$$

Μία ἁπλῆ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία, ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πραγματικῶν ὁλοκληρωμάτων, εἶναι ἐδῶ ἀδύνατος.

§ 9. Τὸ Θεώρημα τῆς ὑπάρξεως διὰ τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

Διὰ λόγους συντομογραφίας, τὰ ἀνωτέρω μερικὰ ἀθροίσματα (ἐκ n μερῶν) θὰ τὰ σημειώνωμεν Σ-ἀθροίσματα· ὅταν δὲ θὰ ὁμιλοῦμεν περὶ ἑνὸς τμήματος (a,b) τοῦ δρόμου, τὸ a θὰ σημαίνῃ πάντοτε τὴν ἀρχὴν τοῦ προσανατολισμένου τούτου τμήματος. Κατόπιν τῶν συμφωνιῶν αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν:

Λῆμμα 1. *Ἔστω (a, b) ἕνα τμῆμα k' καὶ μὲ μῆκος l' τοῦ δρόμου k καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως $f(z)$ ἐντὸς τοῦ k' εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν σ. Τὰ δύο τότε Σ-ἀθροίσματα, ποὺ σχηματίζονται ἐκ τοῦ τμήματος (a, b)*

διὰ $n=1$ καὶ $n=p\ (\geqslant 1)$, διαφέρουν μεταξύ των κατὰ ποσὸν μικρότερον τοῦ γινομένου $l\sigma$.

Ἀπόδειξις: Ἔστω $s=(b-a)f(\alpha_0)$ καὶ $s'=(a_1-a)f(\alpha_1)+ +(a_2-a_1)f(\alpha_2)+\cdots+(b-a_{p-1})f(\alpha_p)$ τὰ ἐν λόγῳ δύο ἀθροίσματα καὶ ὅπου ἐγράψαμεν $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ διὰ τὰ σημεῖα διαιρέσεως τοῦ τμήματος καὶ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ διὰ τὰ ἐνδιάμεσα σημεῖα. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, θὰ εἶναι

$$|\,f(\alpha_\nu)-f(\alpha_0)\,|<\sigma \text{ διὰ } \nu=1,2,\ldots,p.$$

Ἐπειδὴ τὸ s ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ εἰς τὴν μορφὴν

$$s=(a_1-a)\ f(\alpha_0)+(a_2-a_1)\ f(\alpha_0)+\cdots+(b-\alpha_{p-1})\ (f\alpha_0),$$

θὰ ἔχωμεν

$$|\,s-s'\,|<\sigma\{(\,|\,a_1-a\,|\,+\,|\,a_2-a_1)+\cdots \\ +(b-a_{p-1})\}\leqslant\sigma l',$$

ἀφοῦ τὸ μῆκος ἑνὸς ἐγγεγραμμένου τμηματικοῦ τόξου (πρβ. §4,1) δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ ὅλου τόξου (a,b).

Λῆμμα 2. *Ἂς εἶναι S ἕνα σταθερὸν Σ-ἄθροισμα, ἀποτελούμενον ἐκ n (ἔστω) μερῶν, διὰ τὸν δρόμον k, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ αἰωρήσεις τῆς $f(z)$ ἐντὸς τῶν n τούτων τμημάτων τοῦ k εἶναι ὅλαι μικρότεραι ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν σ_0, S' δὲ ἕνα νέον Σ-ἄθροισμα παραγόμενον ἀπὸ τὸ S διὰ προσθέσεως νέων σημείων διαιρέσεως εἰς τὸ S (διὰ μιᾶς περαιτέρω δηλ. ὑποδιαιρέσεως αὐτοῦ). Τότε, ἂν l σημαίνῃ τὸ μῆκος τοῦ δρόμου k, θὰ ἔχω-*

$$|\,S-S'\,|<l\sigma_0,$$

μεν μὲ ὁποιονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἐκλεγοῦν τὰ ἐνδιάμεσα σημεῖα ποὺ ὁρίζουν τὸ ἄθροισμα S'.

Ἀπόδειξις. Τὸ Λῆμμα 1 ἰσχύει διὰ τὸ καθένα ἀπὸ τὰ n τμήματα τοῦ δρόμου k. Ἑπομένως

$$|\,S'-S\,|<l_1\sigma_0+l_2\sigma_0+\cdots+l_n\sigma_0=l\sigma_0,$$

ὅπου $l_1, l_2, \ldots, l_n$ σημαίνουν τὰ μήκη τῶν n μερῶν τοῦ δρόμου.

Λῆμμα 3. *Ἂν ε τυχὼν δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός, ὑπάρχει ἕνας $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιος ὥστε, ἂν S_1 καὶ S_2 εἶναι δύο ὁποιαδήποτε Σ-ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο διαιρέσεις τοῦ δρόμου k εἰς τμήματα μὲ μήκη ὅλα μικρότερα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν δ, νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης*

$$|\,S_1-S_2\,|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ἀπόδειξις. Ἂς ἐκλεγῇ ὁ δ ἔτσι ὥστε

$$|\,f(z'')-f(z')\,|<\frac{\varepsilon}{4l}$$

δι' ὁποιαδήποτε δύο σημεῖα z' καὶ z'' τοῦ δρόμου k διὰ τὰ ὁποῖα $|\,z''-z'\,|<\delta$. Τοῦτο εἶναι πάντοτε δυνατὸν ἕνεκα τοῦ θεωρήματος ἐπὶ τῆς ὁμοιομόρφου (ὁμαλῆς) συνεχείας. Ἂν S_1 καὶ S_2 εἶναι δύο Σ-ἀθροίσματα μὲ ἀντιστοίχους ὑποδιαιρέσεις τμήματα τοῦ k μὲ μήκη μικρότερα ὅλα τοῦ ἀριθμοῦ δ, σχηματίζομεν μίαν τρίτην (λεπτοτέραν) διαίρεσιν μὲ σημεῖα διαιρέσεως τὸ σύνολον τῶν σημείων διαιρέσεως τῶν S_1 καὶ S_2. Φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ τρίτη αὐτὴ διαίρεσις εἶναι μία *περαιτέρω ὑποδιαίρεσις* τοῦ k. Ἂν λοιπὸν S_3 εἶναι ἕνα τυχὸν Σ-ἄθροισμα ἀνῆκον εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν αὐτήν, κατὰ τὸ Λῆμμα 2 θὰ ἔχωμεν

$$|\,S_1-S_3\,|<l\cdot\frac{\epsilon}{4l}=\frac{\epsilon}{4},$$

καὶ ὁμοίως

$$|\,S_2-S_3\,|<\tfrac{1}{4}\epsilon.$$

Ἄρα

$$\begin{aligned}|\,S_1-S_2\,|&=|\,(S_1-S_3)-(S_2-S_3)\,|\\&\leqq|\,S_1-S_3\,|+|\,S_2-S_3\,|<\tfrac{1}{2}\epsilon,\end{aligned}$$

Ὅ. ε. δ.

Λῆμμα 4. *Ἂς θεωρήσωμεν τὰ Σ-ἀθροίσματα ποὺ σχηματίζονται διὰ $n=1,2,3,\ldots$ Ἂν τὰ μήκη ὅλων τῶν ἀντιστοί-*

χων τμημάτων δι' ὅλας αὐτὰς τὰς διαιρέσεις τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ n αὐξάνη ἀπεριορίστως[1], *τὸ ὅριον*

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

θὰ ὑπάρχη.

'Απόδειξις. Διὰ δεδομένον $\varepsilon > 0$, ὁρίζομεν τὸν δ ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον Λῆμμα 3. Ἂν τώρα λάβωμεν τὸ n_0 ἐπαρκῶς μεγάλο, ὥστε τὰ μήκη ὅλων τῶν τμημάτων δι' ὅλα τὰ S_n μὲ $n \geqslant n_0$ νὰ εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὸν δ, θὰ ἰσχύη τότε τὸ Λῆμμα 3 δι' ὅλα αὐτὰ τὰ S_n. Θὰ συμβαίνη δηλαδὴ

$$|S_{n+p}-S_n| < \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$$

δι' ὅλα τὰ $n > n_0$ καὶ δι' ὅλα τὰ $p \geqslant 1$. Ἑπομένως (§3, Θεώρημα 4), θὰ ὑπάρχη τὸ ὅριον τοῦ S_n. Ἂν τὸ ὅριον τοῦτο ὀνομάσωμεν J, ἀνευρίσκομεν τὸ θεώρημα περὶ τοῦ ὁποίου ἔγινε λόγος εἰς τὸ τέλος τῆς προηγουμένης παραγράφου.

Θεώρημα. *'Εὰν δοθῇ ὁ τυχὸν θετικὸς ἀριθμὸς ε καὶ ὁρίσωμεν τὸν $\delta = \delta(\varepsilon)$ κατὰ τὸ Λῆμμα 3, ἡ ἀνισότης*

$$|J_n - J| < \varepsilon$$

θὰ ἀληθεύῃ διὰ κάθε Σ-ἄθροισμα J_n διὰ τὸ ὁποῖον τὰ μήκη ὅλων τῶν τμημάτων του εἶναι μικρότερα ἀπὸ δ.

'Απόδειξις. Ἂν, εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Λήμματος 4, τὸν ἀριθμὸν p ποὺ ἐμφανίζεται εἰς τὴν ἀνισότητα $|S_{n+p} - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ὑποθέσωμεν τείνοντα εἰς τὸ ∞, θὰ ἔχωμεν πρῶτον μὲν ὅτι

$$|S_n - J| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \text{ διὰ } n \geqslant n_0$$

καὶ δεύτερον, κατὰ τὸ Λῆμμα 3, ὅτι

$$|S_n - J_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

1. Τοῦτο σημαίνει: ἂν λ_ν εἶναι τὸ μῆκος τοῦ μακροτέρου τμήματος κατὰ τὴν ν-στὴν διαίρεσιν, θὰ συμβαίνη $\lambda_\nu \to 0$.

Ἑπομένως

$$|J_n - J| = |(S_n - J) - (S_n - J_n)|$$
$$\leqslant |S_n - J| + |S_n - J_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ἡ ὕπαρξις δηλαδὴ τοῦ ἀριθμοῦ J μὲ τὰς ὡς ἄνω ἰδιότητας — ἤ, ἄλλως, ἡ ὕπαρξις τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος — ἀπεδείχθη πλήρως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 1. Διὰ τὴν ἀπόδειξίν μας ἐχρησιμοποιήθη μόνον ἡ συνέχεια τῆς $f(z)$ κατὰ μῆκος τοῦ δρόμου k καὶ ὄχι ἡ συνέχεια εἰς ὁλόκληρον τὸ **T**. Δὲν ἀπαιτεῖται δηλαδὴ οὐδὲ καὶ ὁρισμὸς τῆς $f(z)$ ἐκτὸς τοῦ δρόμου k.

2. Ἡ ἔννοιά μας τοῦ ὁλοκληρώματος περιλαμβάνει τὸ πραγματικὸν ὁλοκλήρωμα (πρβ. ἀρχὴ τῆς § 8) ὡς εἰδικὴν περίπτωσιν. Φαίνεται τοῦτο ἂν ὡς δρόμον k λάβωμεν τμῆμα τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος καὶ ὡς $f(z)$ θεωρήσωμεν συνάρτησιν μὲ πραγματικὰς τιμὰς εἰς τὸ k.

Ἄσκησις. $F(z)$ ἂς εἶναι συνάρτησις συνεχὴς τοῦ z κατὰ μῆκος τοῦ k. Νὰ δείξετε ὅτι ἡ ὁριακὴ τιμὴ

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu - z_{\nu-1}|\, F(\zeta_\nu)\right\} = \int_k F(z)\, |dz|,$$

νοουμένη κατὰ τὰ προηγούμενα, πάντοτε ὑπάρχει.

§ 10. Ὑπολογισμὸς τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων

Τὸ πρόβλημα τοῦ ὑπολογισμοῦ εἰς τὴν πρᾶξιν τοῦ ἀριθμοῦ J, διὰ δοθεῖσαν συνάρτησιν $f(z)$ καὶ δοθέντα δρόμον k, εἶναι τελείως διαφορετικῆς φύσεως. Εἶναι τοῦτο ἐφικτὸν μόνον ὑπὸ ὡρισμένας περιοριστικὰς ὑποθέσεις.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ πραγματικαὶ συναρτήσεις

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

αἱ ὁποῖαι παριστάνουν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου ποὺ διαγράφει τὸν δρόμον k ὅταν τὸ t διατρέχη τὸ διάστημα $[\alpha,\beta]$, ἔχουν *συνεχεῖς παραγώγους* $x'(t)$ καὶ $y'(t)$.

Θὰ εἶναι τότε ὁ δρόμος k *εὐθυγραμμίσιμος*. Διαιροῦμεν αὐτὸν εἰς τμήματα διὰ διαιρέσεως τοῦ παραμετρικοῦ διαστήματος εἰς n μέρη, μέσῳ τῶν τιμῶν

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta,$$

ἐκλέγομεν ἐνδιαμέσους παραμετρικὰς τιμὰς $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ καὶ θέτομεν

$$z_\nu = z(t_\nu) \quad \text{διὰ} \quad \nu = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\zeta_\nu = z(\tau_\nu) \quad \text{διὰ} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Ἂν θέσωμεν διὰ συντομίαν

$$u[x(t), y(t) = \bar{u}(t), \quad v[x(t), y(t)] = \bar{v}(t),$$

ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν

$$\sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1}) f(\zeta_\nu)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} [(x_\nu - x_{\nu-1}) + i(y_\nu - y_{\nu-1})]\,[\bar{u}(\tau_\nu) + i\,\bar{v}(\tau_\nu)].$$

Δι' ἐκτελέσεως τῶν πολλαπλασιασμῶν ὁδηγούμεθα εἰς τέσσαρα πραγματικὰ Σ-ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα δι' ἐκλεπτύνσεως τῆς διαιρέσεως τείνουν πρὸς εὔκολα ἀναγνωριζόμενα ὅρια.

Παραδείγματος χάριν,

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1}) \bar{u}(\tau_\nu) \quad \text{τείνει πρὸς} \quad \int_{\alpha}^{\beta} \bar{u}(t) x'(t) dt.$$

Πράγματι, ἐκ τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, ἔχομεν

$$x_\nu - x_{\nu-1} = x(t_\nu) - x(t_{\nu-1}) = (t_\nu - t_{\nu-1})\, x'(\tau'_\nu),$$

ὅπου τ'_ν σημαίνει κάποιαν τιμὴν τοῦ t μεταξὺ $t_{\nu-1}$ καὶ t_ν. Ἕνεκα δὲ τῆς ὑποτεθείσης συνεχείας τοῦ $x'(t)$ εἰς τὸ διάστημα $[\alpha, \beta]$, θὰ εἶναι

$$x'(\tau'_\nu) = x'(\tau_\nu) + \epsilon_\nu$$

ὅπου ὅλα τὰ ϵ_ν τείνουν *ὁμοιομόρφως* πρὸς τὸ μηδὲν καθόσον

ἀπολεπτύνεται ἡ διαίρεσις[1]. Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι τὸ θεωρούμενον Σ-ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα

$$\sum_{\nu=1}^{n} (t_\nu - t_{\nu-1}) x'(\tau_\nu) \cdot \bar{u}(\tau_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} (t_\nu - t_{\nu-1}) \epsilon_\nu \cdot \bar{u}(\tau_\nu).$$

Ἀλλ' ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ εἶναι ἀκριβῶς ἐκεῖνο τὸ Σ-ἄθροισμα ποὺ τείνει πρὸς τὸ *πραγματικὸν* ὁλοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} \bar{u}(t)\, x'(t)\, dt$, ὁ δὲ δεύτερος ὅρος τείνει βεβαίως πρὸς τὸ μηδέν· διότι, διὰ δοθέντα $\varepsilon > 0$, ἠμπορεῖ νὰ γίνη μικρότερος κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀπὸ τὸ γινόμενον

$$\varepsilon(\beta - \alpha) \cdot \bar{u}_0$$

διὰ κατάλληλον ἐκλέπτυνσιν τῆς διαιρέσεως. $\bar{u}_0$ ἐδῶ σημαίνει ἕνα ἀνώτερον φράγμα τοῦ $|\bar{u}(t)|$ κατὰ μῆκος τοῦ k.

Ἀναλόγους ἑρμηνείας ἐπιδέχονται τὰ ἄλλα τρία Σ-ἀθροίσματα.

Κατόπιν τούτων, τὸ ὅριον J (τὸ ὡρισμένον δηλ. ὁλοκλήρωμά μας) πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ μιγαδικὸν ἀνωτέρω Σ-ἄθροισμα, ἔχει τιμὴν

$$(1) \qquad J = \int_{z_0\,(k)}^{Z} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \bar{u}x'dt - \int_{\alpha}^{\beta} \bar{v}y'dt + i\int_{\alpha}^{\beta} \bar{u}y'dt + i\int_{\alpha}^{\beta} \bar{v}x'dt$$

ἤ

$$(2) \qquad J = \int_{\alpha}^{\beta} (\bar{u} + i\bar{v})(x' + iy')dt,$$

---

1. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, διὰ δοθέντα τυχόντα $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει ἐπαρκῶς προχωρημένη ἀπολέπτυνσις τῆς διαιρέσεως τοῦ $[\alpha, \beta]$ ὥστε ὅλα τὰ ε_ν νὰ γίνουν μικρότερα ἀπὸ τὸν ε.

ἤ

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) dt; \tag{3}$$

καὶ τελικῶς

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = \int_{k} f(z) dz. \tag{4}$$

Εἰς τὸν τύπον τοῦτον, τὰ ὅρια εἰς τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα ὑπενθυμίζουν ὅτι τὸ z θεωρεῖται ὡς συνάρτησις τοῦ t, ἐνῶ εἰς τὸ δεύτερον μνημονεύεται μόνον ὁ δρόμος, ὡς τὸ μόνον οὐσιῶδες. Βλέπομεν δὲ ἐπιπροσθέτως ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἔρευνά μας ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τιμῆς τοῦ ὁλοκληρώματος μᾶς παρέχει μίαν βαθυτέραν ἐπίγνωσιν τοῦ περιεχομένου τοῦ συμβολισμοῦ ποὺ ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα.

Παράδειγμα 1. $f(z) = \dfrac{1}{z}$. $k : z(t) = \cos t + i \sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Ὁ δρόμος ἐδῶ εἶναι ὁ μοναδιαῖος κύκλος διαγραφόμενος κατὰ τὴν μαθηματικῶς θετικὴν φορὰν (ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου) καὶ ἐκ τοῦ σημείου $+1$ μέχρι καὶ πάλιν εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον $+1$. Κατὰ τὸν τύπον (3) θὰ ἔχωμεν

$$J = \int_{k} \frac{dz}{z} = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} (-\sin t + i \cos t)\, dt = i \int_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο χρησιμοποιεῖται συνεχῶς εἰς τὰ ἑπόμενα.

Παράδειγμα 2.

$$f(z) = \mathbf{R}(z) = x \cdot\ z_0 = 0,\ Z = 1 + i.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{z_0}^{Z} f(z) dz$ θὰ τὸ ὑπολογίσωμεν κατὰ μῆκος δύο διαφορετικῶν δρόμων.

α) Δρόμος k_1: Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα

$$z = (1 + i)\ t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Εὑρίσκομεν

$$J_1 = \int_0^1 t \cdot (1 + i)\, dt = (1 + i) \int_0^1 t\, dt = \tfrac{1}{2} (1 + i).$$

β) Δρόμος k_2: Ἀπὸ τὸ 0 μέχρι τὸ $+1$ κατὰ μῆκος εὐθείας γραμμῆς καὶ ἀπὸ τὸ $+1$ μέχρι τὸ $1 + i$ πάλιν ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Ὑπολογίζοντες χωριστὰ τὰ δύο μέρη καὶ προσθέτοντες τὰ ἐξαγόμενα, εὑρίσκομεν ὅτι

$$J_2 = \frac{1}{2} + i \neq J_1 = \frac{1}{2} (1 + i).$$

Πορίζόμεθα δηλαδὴ διαφορετικὰς τιμὰς κινούμενοι ἐπὶ διαφορετικῶν δρόμων (πρβ. § 6, Παρ/μα 2).

Τὰ ἑπόμενα παραδείγματα δεικνύουν ὅτι εἰς πολλὰς περιπτώσεις εἶναι ἁπλούστερον νὰ ἐπιστρέφωμεν εἰς τὸν ἀρχικὸν ὁρισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος ὡς ὁρίου ἀθροίσματος (§§ 8 καὶ 9).

Παράδειγμα 3. Ἔστω $\mathbf{T}$ ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον· $f(z) = 1$· δρόμος: ὁποιοσδήποτε.

Θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned} J_n &= \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1}) \cdot 1 \\ &= (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (Z - z_{n-1}) \\ &= Z - z_0. \end{aligned}$$

Συνεπῶς

$$\lim J_n = J = \int_{z_0}^{Z} dz = Z - z_0$$

κατὰ μῆκος τοῦ τυχόντος δρόμου. Εἰδικῶς, ἂν ὁ k εἶναι κλειστὸς δρόμος C,

$$\int_C dz = 0,$$

ἀφοῦ $z_0 = Z$.

Παράδειγμα 4. $\mathbf{T}$ ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον· $f(z) = z$· δρόμος ὁποιοσδήποτε.

Θὰ ἔχωμεν

$$J_n = \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1})\zeta_\nu,$$

ὅπου ζ_ν τυχὸν σημεῖον τοῦ τμήματος τοῦ δρόμου ἀπὸ $z_{\nu-1}$ μέχρι z_ν.

α) Ἂς λάβωμεν

$$\zeta_\nu = z_{\nu-1}.$$

Τὸ ἀντίστοιχον ἄθροισμα J'_n εἶναι

$$J'_n = (z_1 - z_0) z_0 + (z_2 - z_1) z_1 + \cdots + (Z - z_{n-1}) z_{n-1}.$$

β) Ἂς λάβωμεν

$$\zeta_\nu = z_\nu .$$

Τὸ ἀντίστοιχον ἄθροισμα J''_n εἶναι

$$J_n'' = (z_1 - z_0) z_1 + (z_2 - z_1) z_2 + \cdots (Z - z_{n-1}) Z.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$J'_n + J''_n = Z^2 - z_0^2$$

καὶ ἑπομένως

$$\lim (J'_n + J''_n) = 2J = Z^2 - z_0^2.$$

Ἄρα

$$J = \int_{z_0}^{Z} z dz = \frac{1}{2} (Z^2 - z_0^2)$$

διὰ δρόμον τελείως αὐθαίρετον. Ἂν k εἶναι ἕνας κλειστὸς δρόμος C,

$$\int_C z dz = 0.$$

Παράδειγμα 5. $\int (z - z_0)^m dz$· δρόμος k: κύκλος μὲ κέντρον z_0 καὶ ἀκτῖνα r διαγραφόμενος κατὰ τὴν θετικὴν φοράν. Ὁ δρόμος αὐτὸς ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$z = z_0 + r (\cos t + i \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

Εὑρίσκομεν

$$J = \int_0^{2\pi} [r(\cos t + i \sin t)]^m \cdot r(-\sin t + i \cos t)\, dt$$

$$= i r^{m+1} \int_0^{2\pi} [\cos (m+1) t + i \sin (m+1) t]\, dt.$$

Ἀλλ' ὡς γνωρίζομεν εἶναι

$$\int_0^{2\pi} \cos \mu t\, dt = 0 \quad \text{καὶ} \quad \int_0^{2\pi} \sin \mu t\, dt = 0$$

διὰ κάθε (θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν) ἀκέραιον $\neq 0$. Διὰ $\mu = 0$, τὰ ὁλοκληρώματα αὐτὰ εἶναι ἴσα μὲ

$$2\pi \text{ καὶ } 0,$$

ἀντιστοίχως. Διὰ τὸ ὁλοκλήρωμά μας λοιπὸν εἶναι

$$\int_k (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{διὰ } m = -1 \text{ (πρβ. Ἄσκησις 1),} \\ 0 & \text{διὰ κάθε ἄλλην ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ } m. \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τοῦ τελευταίου ὁλοκληρώματος διὰ τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

α) Ὁ k εἶναι τετράγωνον μὲ κέντρον z_0 καὶ πλευρὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας συν/νων.

β) Ὁ k εἶναι ἔλλειψις μὲ κέντρον z_0 καὶ ἄξονας παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας συντ/νων.

2. Ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_{-i}^{+i} |z|\, dz$ διὰ δρόμον

α) εὐθύγραμμον, β) κατὰ μῆκος τοῦ ἀριστεροῦ ἡμίσεος τοῦ μοναδιαίου κύκλου, γ) κατὰ μῆκος τοῦ δεξιοῦ ἡμίσεος τοῦ ἰδίου κύκλου.

§ 11. Θεωρήματα στοιχειώδη διὰ ὁλοκληρώματα

Τὰ ἀκολουθοῦντα στοιχειώδη θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ μὴ ἀναγραφόμενος ὁλοκληρωτέος θεωρεῖται πάντοτε ὁ $f(z)$, εἶναι πορίσματα ἄμεσα τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος ὡς ὁρίου ἀθροίσματος.

Θεώρημα 1.

$$\int_{z_0 \, k}^{Z} + \int_{Z \, k'}^{Z'} = \int_{z_0 \, (k+k')}^{Z'}$$

Δηλαδή: *Τὸ ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων ἐπὶ δύο διαδοχικῶν τμημάτων δρόμου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ ὁλοκλήρου τοῦ δρόμου. Ἡ γραφὴ $(k+k')$ διὰ τὸν δρόμον εἰς τὸ δεξιὸν ὁλοκλήρωμα σημαίνει ὅτι ἡ ὁλοκλήρωσις γίνεται πρῶτον ἀπὸ z_0 ἕως Z κατὰ μῆκος τοῦ k καὶ κατόπιν ἀπὸ Z ἕως Z' κατὰ μῆκος τοῦ k'.*

Ὁμοίως,

$$\int_{z_0 \, k}^{Z} = \int_{z_0 \, k_1}^{z'} + \int_{z' \, k_2}^{Z},$$

ὅπου z' εἶναι σημεῖον τοῦ k μεταξὺ z_0 καὶ Z διαιροῦν τὸν k εἰς δύο μέρη k_1 καὶ k_2.

Θεώρημα 2.

Ὁμοίως:

$$\int_{z_0 \, k}^{Z} = -\int_{Z \, k}^{z_0}.$$

Δηλαδή: *Δύο ὁλοκληρώσεις ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ δρόμου ἀλλὰ κατ' ἀντιθέτους φορὰς ἔχουν τιμὰς ποὺ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ τὸ πρόσημόν των μόνον. Ἐὰν τὴν μίαν φορὰν παραστήσωμεν μὲ $+k$ καὶ τὴν ἄλλην μὲ $-k$, ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν συντομώτερον*

$$\int_{-k} = -\int_{+k} \quad \text{ἢ} \quad \int_{+k} + \int_{-k} = \int_{(+k)+(-k)} = 0.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωμάτων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ δρόμου ἀλλὰ κατ' ἀντιθέτους φορὰς εἶναι τὸ μηδέν.

Θεώρημα 3.

$$\int_k cf(z)dz = c\int_k f(z)dz$$

Δηλαδή: *Ἕνας σταθερὸς παράγων ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐκτὸς τοῦ συμβόλου ὁλοκληρώσεως.*

Θεώρημα 4.

$$\int_k [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int_k f_1(z)dz + \int_k f_2(z)dz.$$

Δηλαδή: *Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ ἀθροίσματος δύο (ἢ περισσοτέρων, πεπερασμένου πάντως πλήθους) συναρτήσεων ἐπί τινος δρόμου k εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωμάτων τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τοῦ k. Μὲ ἄλλους λόγους, ἕνα ἄθροισμα (πεπερασμένου πλήθους συναρτήσεων) ἠμπορεῖ νὰ ὁλοκληρωθῇ κατὰ ὅρους.*

Θεώρημα 5.

$$\left|\int_k f(z)dz\right| \leqq Ml,$$

ὅπου M παριστάνει ἕνα (θετικὸν) ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ $|f(z)|$ δι' ὁποιοδήποτε z τοῦ δρόμου k, καὶ l εἶναι τὸ μῆκος τοῦ k.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ σπουδαίου αὐτοῦ τύπου προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος. Πράγματι,

$$J_n = \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1}) f(\zeta_\nu),$$

καὶ ἑπομένως

$$|J_n| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu - z_{\nu-1}|\,|f(\zeta_\nu)| \leqq M \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu - z_{\nu-1}|.$$

Τὸ δεξιὰ ἄθροισμα παριστάνει, ὡς γνωρίζομεν, τὸ μῆκος τοῦ τμηματικοῦ τόξου ποὺ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν δρόμον k καὶ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα $z_0, z_1, \ldots, Z$. Ἔχει ἄρα μῆκος μικρότερον ἢ ἴσον πρὸς τὸ l διὰ κάθε n. *Ἐπομένως*,

$$|J_n| \leqslant Ml \text{ διὰ κάθε } n$$

καὶ ἄρα $$\lim |J_n| = J \leqslant Ml. \qquad \text{Ο.ε.δ.}$$

Διὰ τὸ πρῶτον λ.χ. Παράδειγμα τῆς § 10, θὰ ἔχωμεν, χωρὶς κανένα ὑπολογισμόν, ὅτι

$$\left|\int_k \frac{dz}{z}\right| \leqq 1\cdot 2\pi = 2\pi,$$

ἀφοῦ $|z| = 1$ διὰ κάθε σημεῖον τοῦ μοναδιαίου κύκλου k **καὶ** $l = 2\pi$ διὰ τὸν κύκλον τοῦτον.

ΑΣΚΗΣΙΣ. Σχετικῶς μὲ τὴν Ἄσκησιν τῆς § 9, δείξατε χωρὶς κανένα ὑπολογισμόν, ὅτι

$$\left|\int_k f(z)dz\right| \leqq \int_k |f(z)|\,|dz|.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CAUCHY ΔΙΑ ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

§ 12. Διατύπωσις τοῦ Θεωρήματος

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος μιᾶς συναρτήσεως μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς, ἡ τιμὴ αὐτοῦ δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰ ὅρια ὁλοκληρώσεως z_0 καὶ Z (ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πραγματικοῦ ὁλοκληρώματος) ἀλλ' ἐπίσης, καὶ οὐσιωδῶς, ἀπὸ τὸν δρόμον ὁλοκληρώσεως k ποὺ συνδέει τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα. (Πρβ. § 10, Παρ. 2). Ὑπάρχει ὅμως ἕνα θεώρημα τὸ ὁποῖον μᾶς λέγει ὅτι, ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις τὰς ὁποίας θὰ δώσωμεν ἀμέσως κατωτέρω, τὸ ὁλοκλήρωμα αὐτὸ ἔχει τιμὴν ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὸν δρόμον ὁλοκληρώσεως ὅταν ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ὄχι μόνον συνεχής, ὅπως ὑπετέθη μέχρι τώρα, ἀλλὰ καὶ διαφορίσιμος.

Τὸ θεώρημα τοῦτο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ ὄνομα τοῦ μαθηματικοῦ ποὺ τὸ ἀνεκάλυψε, λέγεται **Θεώρημα τοῦ Cauchy διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα** καὶ ἔχει σπουδαιότητα *θεμελιώδη* δι' ὁλόκληρον τὴν Θεωρίαν τῶν Συναρτήσεων.

Τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων

Πρώτη μορφή. *Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις* $w=f(z)$ *εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ἕνα χωρίον* **T** *ἁπλῆς συνοχῆς,* z_0 *καὶ* Z *δύο ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ* **T**. *Τὸ ὁλοκλήρωμα τότε*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$$

θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν πάντοτε τιμὴν δι' ὁποιονδήποτε δρόμον ὁλοκληρώσεως κείμενον ἐντὸς τοῦ **T** *καὶ συνδέοντα τὰ σημεῖα* z_0 *καὶ* Z.

Κατὰ τὴν πρότασιν αὐτήν, ἂν k_1 καὶ k_2 εἶναι δύο τέτοιοι διαφορετικοὶ δρόμοι, θὰ πρέπει νὰ συμβαίνῃ

$$\int_{k_1} f(z)dz = \int_{k_2} f(z)dz \quad \text{ἢ} \quad \int_{k_1} - \int_{k_2} = 0. \tag{47}$$

Σύμφωνα μὲ ἐκεῖνα ποὺ ἐγράψαμεν εἰς τὴν Παράγραφον 11,1 καὶ 2, εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν εἶναι δυνατὸν νὰ δοθῇ καὶ ἡ ἑξῆς ἑρμηνεία : Τὸ ὁλοκλήρωμα κατὰ μῆκος ἑνὸς δρόμου, ὁ ὁποῖος ἀρχίζει καὶ τερματίζεται εἰς τὸ σημεῖον z_0—κατὰ μῆκος δηλαδὴ ἑνὸς *κλειστοῦ* (ἂν καὶ ὄχι ἀναγκαίως ἁπλοῦ) δρόμου k, μὲ ὅλα τὰ σημεῖα του ἐσωτερικὰ τοῦ $\mathbf{T}$—ἔχει τιμὴν ἴσην μὲ μηδέν. Ὁδηγούμεθα ἔτσι ἀπὸ τὴν πρώτην μορφὴν τοῦ θεωρήματος εἰς τὴν ἀκόλουθον μορφήν του :

Δευτέρα μορφή. *Ἂν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ ἁπλῆς συνοχῆς χωρίον $\mathbf{T}$, τότε*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

ἂν C σημαίνῃ ἕνα τυχόντα (ὄχι ἀναγκαίως ἁπλοῦν) κλειστὸν δρόμον κείμενον ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$.

Ἀντιστρόφως, ἡ πρώτη μορφὴ εἶναι συνέπεια ἄμεσος τῆς δευτέρας. Διότι, ἂν k_1 καὶ k_2 εἶναι δύο τυχόντες δρόμοι μεταξὺ τῶν z_0 καὶ Z καὶ κείμενοι ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$, δι' ἑνώσεως τοῦ k_2 μὲ τὸν k_1 σχηματίζεται ἕνας κλειστὸς (ἀλλ' ὄχι πάντοτε ἁπλοῦς) δρόμος διὰ τὸν ὁποῖον θὰ ἔχωμεν

$$0 = \int_{k_1} - \int_{k_2} \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad \int_{k_2} = \int_{k_1} .$$

Κατὰ ταῦτα, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεμελιῶδες θεώρημα εἰς τὴν δευτέραν του μορφήν. Τοῦτο θὰ γίνῃ εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον εἰς τρία βήματα : Πρῶτον, διὰ τὴν περίπτωσιν ὅπου ὁ δρόμος C εἶναι τρίγωνον· κατόπιν, ὅταν ὁ C

εἶναι τυχὸν πολύγωνον καὶ τέλος, ὅταν ὁ C εἶναι τυχὼν κλειστὸς δρόμος.

Εἰς τὰ Παραδείγματα 3 καὶ 4 τῆς Παραγράφου 10 ἀπεδείξαμεν ἤδη τὸ Θεώρημα τοῦ Cauchy διὰ δύο εἰδικὰς συναρτήσεις, τὰς $f(z) = 1$ καὶ $f(z) = z$. Διότι ἐδείξαμεν ἐκεῖ ὅτι εἶναι

$$\int_C dz = 0 \quad \text{καὶ} \quad \int_C zdz = 0$$

δι' ἕνα τυχόντα κλειστὸν δρόμον C.

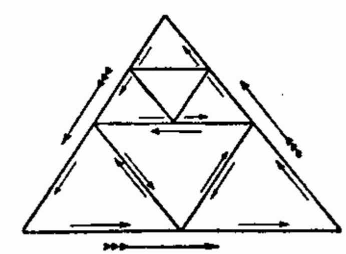
§ 13. Ἀπόδειξις τοῦ Θεμελιώδους Θεωρήματος

Μέρος 1. Ὁ C εἶναι ἕνα τυχὸν τρίγωνον T κείμενον ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$.

Διαιροῦμεν τὸ T εἰς τέσσαρα ἴσα ὑποτρίγωνα[1] T^{I}, T^{II}, T^{III}, T^{IV} μέσῳ τμημάτων παραλλήλων πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ T, κατὰ τὸ σχῆμα 1. Θὰ ἔχωμεν τότε

$$\int_T = \int_{T^{\mathrm{I}}} + \int_{T^{\mathrm{II}}} + \int_{T^{\mathrm{III}}} + \int_{T^{\mathrm{IV}}} ,$$

ἂν ὅλοι οἱ δρόμοι ὁλοκληρώσεως διαγράφωνται κατὰ τὴν μαθηματικῶς θετικὴν φοράν. Πράγματι, κατὰ τὰς ὁλοκληρώσεις εἰς τὸ δεξιὸν μέλος καὶ κατὰ τὰς φορὰς τῶν εἰς τὸ σχῆμα βελῶν διὰ τὸ καθὲν τρίγωνον, τὰ τρία ἐνδιάμεσα τμήματα διαγράφονται δὶς καὶ κατ' ἀντιθέτους φορὰς καὶ αἱ τιμαὶ ἑπομένως τῶν ὁλοκληρωμάτων ἐπ' αὐτῶν εἶναι τὸ μηδέν. Δὲν ἀπομένει λοιπὸν διὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν ὁλοκληρωμάτων τούτων παρὰ



Σχῆμα 1.

1. Ὁ ὅρος «τρίγωνον» χρησιμοποιεῖται κατὰ δύο ἐννοίας εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτήν : κατὰ τὴν μίαν σημαίνει τὸν δρόμον καὶ κατὰ τὴν ἄλλην τὸ ὑπὸ τοῦ δρόμου αὐτοῦ περιοριζόμενον κλειστὸν χωρίον. Ἐκ τῶν συμφραζομένων ὅμως κάθε φορὰν γίνεται φανερὸν πάντοτε ποίαν ἔννοιαν ἔχομεν ὑπ' ὄψει.

τὸ ἄθροισμα μόνον τῶν τιμῶν τῶν ὁλοκληρωμάτων κατὰ μῆκος τῶν μὴ κοινῶν πλευρῶν τῶν ἐν λόγῳ τριγώνων. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἴσον προφανῶς πρὸς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου μέλους.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ἀπὸ τὰ τέσσαρα ὁλοκληρώματα εἰς τὸ δεξιὸν μέλος, θὰ πρέπει διὰ ἕνα τουλάχιστον ἐξ αὐτῶν, τοῦ ὁποίου τὸν δρόμον παριστάνομεν μὲ T_1, νὰ συμβαίνη

$$\left|\int_T\right| \leqq 4\left|\int_{T_1}\right| .$$

Διότι δὲν εἶναι δυνατὸν τὸ καθένα ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τετάρτου τοῦ ὅλου τριγώνου.

Τὴν προηγουμένην συλλογιστικὴν ἐργασίαν ἐφαρμόζομεν πάλιν ἐπὶ τοῦ ὑποτριγώνου T_1. Τὸ T_1 θὰ περιέχῃ καὶ ἐδῶ τουλάχιστον ἕνα ὑποτρίγωνον T_2 διὰ τὸ ὁποῖον

$$\left|\int_{T_1}\right| \leqq 4\left|\int_{T_2}\right|,$$

καὶ ἑπομένως

$$\left|\int_T\right| \leqq 4^2\left|\int_{T_2}\right|.$$

Συνεχίζοντες κατὰ τὸν τρόπον αὐτόν, εὑρίσκομεν μίαν ἀκολουθίαν ἀπὸ ὅμοια τρίγωνα $T, T_1, T_2, \ldots, T_n \ldots$, τέτοια ὥστε τὸ καθένα T_n κεῖται ἐντὸς τοῦ προηγουμένου του, ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ καὶ πληροῖ τὴν σχέσιν

$$\left|\int_T\right| \leqq 4^n\left|\int_{T_n}\right| \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Κατὰ τὸ Θεώρημα τῶν ἀλληλενθέτων συνόλων, θὰ ὑπάρχῃ ἕνα καὶ μόνον σημεῖον z_0 τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι κοινὸν εἰς

ὅλα τὰ σύνολα T_n · συνεπῶς, τὸ σημεῖον z_0 θὰ ἀνήκῃ ἐπίσης εἰς τὸ χωρίον $\mathbf{T}$.

Ἔστω ε ἕνας αὐθαιρέτως μικρὸς θετικὸς ἀριθμός. Ἐπειδὴ ἡ $f(z)$ θὰ πρέπει νὰ ἔχῃ παράγωγον εἰς τὸ z_0, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ (βλ. §6, II, μορφὴ πρώτη) ἕνας ἀριθμὸς $\delta > 0$ τέτοιος ὥστε, δι' ὅλα τὰ z διὰ τὰ ὁποῖα $|z - z_0| < \delta$, νὰ συμβαίνῃ

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \epsilon\,|z - z_0|,$$

ἤ

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \eta \cdot (z - z_0)$$

μὲ

$$|\eta| = |\eta(z)| < \epsilon.$$

Ἐκλέγομεν τώρα τὸν n ἐπαρκῶς μεγάλον, ὥστε τὸ T_n νὰ κεῖται ὁλόκληρον ἐντὸς τῆς περιοχῆς τοῦ z_0 ποὺ χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὴν ἀνισότητα $|z - z_0| < \delta$. Ὅλα τότε τὰ z, ποὺ εἶναι ἢ ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ T_n ἢ σημεῖα τοῦ συνόρου τοῦ T_n, θὰ πληροῦν τὴν ἀνισότητα αὐτήν. Ὁδηγούμεθα ἔτσι εἰς τὴν ἰσότητα

$$\int_{T_n} f(z)dz = \int_{T_n} f(z_0)dz - \int_{T_n} z_0 f'(z_0)dz + \int_{T_n} zf'(z_0)dz + \int_{T_n} \eta\cdot(z - z_0)dz.$$

Σύμφωνα μὲ τὰ εἰς §11,3 καὶ τὴν παρατήρησιν εἰς τὸ τέλος τῆς προηγουμένης παραγράφου, θὰ ἔχωμεν

$$\int_{T_n} f(z)dz = 0 + 0 + 0 + \int_{T_n} \eta\cdot(z - z_0)dz.$$

Ἀλλά, κατὰ τὴν §11,5,

$$\left|\int_{T_n} f(z)dz\right| < \epsilon\cdot\frac{s_n}{2}\cdot s_n = \frac{\epsilon}{2}\cdot s_n^2,$$

ὅπου s_n σημαίνει τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου T_n. Πράγματι, $|z-z_0|$ εἶναι ἡ ἀπόστασις δύο σημείων ἐντὸς ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου T_n, ἡ ὁποία εἶναι τὸ πολὺ ἴση μὲ τὴν ἡμιπερίμετρον $\frac{s_n}{2}$ τοῦ T_n · s_n εἶναι τὸ μῆκος τοῦ δρόμου T_n καὶ $|\eta| < \varepsilon$. Καὶ ἐπειδή, ἀφ' ἑτέρου,

$$s_1 = \frac{s}{2},\ s_2 = \frac{s_1}{2} = \frac{s}{2^2}, \ldots, s_n = \frac{s}{2^n}$$

(s = ἡ περίμετρος τοῦ T), θὰ ἔχωμεν τελικῶς

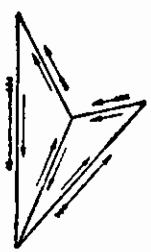
$$\left|\int_T f(z)dz\right| \leqq 4^n \left|\int_{T_n} f(z)dz\right| \leqq 4^n\cdot\frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{s^2}{4^n} = \frac{\epsilon}{2}\cdot s^2.$$

Ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς ε ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ ἐπαρκῶς μικρός, ὥστε τὸ τελευταῖον μέλος τῆς σχέσεως αὐτῆς νὰ καταστῇ ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρός. Καὶ ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀριθμὸς σταθερός, συμπεραίνομεν ἀναγκαίως ὅτι

$$\int_T f(z)dz = 0.$$

Μέρος II. Ὁ δρόμος C εἶναι τυχὸν κλειστὸν πολύγωνον P, ἐνδεχομένως αὐτοτεμνόμενον, κείμενον ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$.

Καὶ ἂν μὲν ὁ C εἶναι τετράπλευρον Q μὴ αὐτοτεμνόμενον (Σχ. 2), ἠμπορεῖ πάντοτε νὰ διαιρεθῇ διὰ μιᾶς διαγωνίου του, κειμένης εἰς τὸ ἐσωτερικόν του, εἰς δύο τρίγωνα T καὶ T' ἀνήκοντα εἰς τὸ χωρίον $\mathbf{T}$ καὶ διὰ τὰ ὁποῖα θὰ ἔχωμεν πάλιν



Σχῆμα 2.

$$\int_Q = \int_T + \int_{T'} = 0.$$

Ἂν δὲ ὁ C εἶναι τυχὸν κλειστὸν πολύγωνον P μὴ αὐτοτεμνόμενον, ἠμπορεῖ καὶ αὐτό, κατὰ τὸ Λῆμμα 2 τῆς §4, νὰ διαιρεθῇ εἰς τρίγωνα μέσῳ διαγωνίων κειμένων ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ P. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὁλοκλήρωμα κατὰ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι τὸ μηδέν, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωμάτων τούτων θὰ εἶναι τὸ μηδὲν—καὶ ἴσον πρὸς τὸ ὁλοκλήρωμα κατὰ μῆκος τοῦ συνόρου τοῦ πολυγώνου P· διότι τὰ ὁλοκληρώματα κατὰ μῆκος τῶν διαγωνίων ἔχουν τιμὰς ἀντιθέτους διὰ τὴν καθεμίαν διαγώνιον, ἀφοῦ διαγράφεται αὐτὴ δὶς καὶ κατ' ἀντιθέτους φοράς[1]. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι

$$\int_P f(z)dz = 0.$$

Τέλος, κατὰ τὸ Λῆμμα 1 τῆς §4, ἕνα κλειστὸν πολύγωνον P, τὸ ὁποῖον αὐτοτέμνεται, ἠμπορεῖ νὰ διαιρεθῇ εἰς πεπερασμένον πλῆθος κλειστῶν πολυγώνων, τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα εἶναι ἁπλοῦν καὶ διαγράφεται ἐξ ὁλοκλήρου ἢ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἢ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν—καί, ἐνδεχομένως, εἰς πεπερασμένον πλῆθος εὐθυγράμμων τμημάτων, δὶς καὶ κατ' ἀντιθέτους φορὰς διαγραφομένων. Ἐὰν δὲ ὁλοκληρώσωμεν κατὰ μῆκος τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ μέρη αὐτὰ καὶ προσθέσωμεν, φανερὸν εἶναι ὅτι λαμβάνομεν καὶ πάλιν

$$\int_P f(z)dz = 0.$$

Μέρος III. Ὁ δρόμος C εἶναι τυχὼν κλειστὸς δρόμος κείμενος ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$.

Ἂν δοθῇ θετικὸς ε ὁσονδήποτε μικρός, θὰ δείξωμεν ὅτι εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ εὕρωμεν ἕνα κατάλληλον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν δρόμον C πολύγωνον P, διὰ τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι

$$\left|\int_C - \int_P\right| < \epsilon.$$

1. Βλ. Watson, ἔνθα ἀνωτέρω σελ. 16, Θεώρημα II.

Τότε ὅμως, κατὰ τὸ Μέρος II, θὰ ἔχωμεν

$$\left|\int_C\right| < \varepsilon, \text{ δηλαδὴ } \int_C = 0.$$

Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, ὑπενθυμίζομεν ὅτι, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος, εἶναι

$$\int_C = \lim J_n = \lim \sum_{\nu=1}^{\nu} (z_\nu - z_{\nu-1}) f(\zeta_\nu), \ (z_0 = z_n).$$

Ἀφοῦ δοθῇ ἕνας αὐθαίρετος $\varepsilon > 0$, ἐκλέγομεν μίαν διαίρεσιν διὰ τῶν σημείων z_ν ἐπαρκῶς πυκνὴν καί, ἐπομένως, n ἀρκετὰ μεγάλο ὥστε νὰ συμβαίνῃ:

1) Τὸ $\left|\int_C - J_n\right|$ νὰ παραμένῃ μικρότερον τοῦ $\frac{\varepsilon}{2}$ · τοῦτο εἶναι πάντοτε δυνατὸν κατὰ τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς § 9.

2) Τὰ μήκη ὅλων τῶν τμημάτων δρόμου νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ $\frac{\rho}{2}$, ὅπου ρ ὁ ἀριθμὸς ποὺ ὁρίζεται κατὰ τὸ Λῆμμα 3 τῆς § 4, ὑπὸ τοῦ C ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$.

3) Τὰ μήκη αὐτὰ νὰ εἶναι ἐπίσης μικρότερα ἑνὸς ἀριθμοῦ δ τέτοιου ὥστε, διὰ $|z'' - z'| < \delta$, νὰ εἶναι

$$\left|f(z'') - f(z')\right| < \frac{\varepsilon}{2l} \quad (l \text{ τὸ μῆκος τοῦ } C)$$

ὅπου z' καὶ z'' εἶναι ἢ δύο σημεῖα τοῦ C ἢ σημεῖα τοῦ $\mathbf{T}$ ποὺ ἀπέχουν ἀπὸ τὸν C ἀποστάσεις τὸ πολὺ ἴσας πρὸς $\frac{\rho}{2}$. Εἰδικῶς δέ, ἂν z εἶναι σημεῖον τῆς *χορδῆς* $z_{\nu-1} \cdots z_\nu$, ἠμποροῦμεν νὰ θέσωμεν

$$f(z) = f(\zeta_\nu) + \eta_\nu \quad \text{μὲ} \quad |\eta_\nu| < \frac{\varepsilon}{2l}.$$

Τὴν ὕπαρξιν τοῦ ἀριθμοῦ δ ἐγγυᾶται τὸ θεώρημα ἐπὶ τῆς ὁμοιομόρφου συνεχείας.

Κατόπιν τούτων, ἂν γράψωμεν τὰς χορδὰς $\overline{z_0 z_1}, \overline{z_1 z_2}, \ldots, \overline{z_{\nu-1} z_\nu} = \overline{z_{\nu-1} z_0}$, εὑρίσκομεν ἕνα πολύγωνον P τὸ ὁποῖον, κατὰ τὸ 2), κεῖται ὁλόκληρον ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$. Δι' ὁλοκληρώσεων κατὰ μῆκος τῆς καθεμίας πλευρᾶς τοῦ P καὶ ἀθροίσεως, λαμβάνομεν τὰς ἰσότητας

$$\int_P = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} f(z)dz = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} (f(\zeta_\nu) + \eta_\nu)dz$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu) \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} dz + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} \eta_\nu dz = J_n + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} \eta_\nu dz,$$

ἀπὸ τὰς ὁποίας προκύπτει ὅτι

$$\left|\int_P - J_n\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\epsilon}{2l} |z_\nu - z_{\nu-1}| \leqq \frac{\epsilon}{2}$$

καὶ ἐπομένως

$$\left|\int_C - \int_P\right| = \left|\left(\int_C - J_n\right) - \left(\int_P - J_n\right)\right|$$

$$\leqq \left|\int_C - J_n\right| + \left|\int_P - J_n\right| \leqq \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$

Ἀνευρέθη λοιπὸν τὸ πολύγωνον P περὶ τοῦ ὁποίου ἔγινε λόγος εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ἀποδείξεως καὶ ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει. Θὰ εἶναι δηλαδὴ

$$\int_C f(z)dz = 0, \quad \text{Ο.ε.δ.}$$

Μία σύντομος περιγραφὴ τοῦ τρίτου μέρους τῆς ἀποδείξεως εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἐπειδὴ τὸ ὁλοκλήρωμα κατὰ μῆκος ἑνὸς τυχόντος κλειστοῦ πολυγώνου ἔχει πάντοτε τιμὴν ἴσην μὲ μηδέν, ἕνας δὲ αὐθαίρετος δρόμος C ἠμπορεῖ νὰ προσεγγισθῆ ὁσονδήποτε στενῶς δι' ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν πολυγώνου, τὸ ὁλοκλήρωμα κατὰ μῆκος τοῦ κλειστοῦ δρόμου C δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διαφέρη ἀπὸ τὸ μηδέν.

§ 14. Συνέπειαι ἁπλαῖ καὶ ἐπεκτάσεις

Τὸ Θεώρημα τοῦ Cauchy εἶναι ἡ ἀφετηρία διὰ σχεδὸν ὅλας τὰς βαθυτέρας ἐρεύνας τὰς ἀναφερομένας εἰς τὰς ἀναλυτικὰς συναρτήσεις. Τοῦτο ἄλλωστε θὰ γίνη φανερὸν καὶ ἀπὸ ὅλα τὰ ἀκολουθοῦντα κεφάλαια. Πρὸς τὸ παρόν, θὰ ἀναφέρωμεν μερικὰς ἁπλᾶς συνεπείας καὶ ἐπεκτάσεις.

1. Ἐὰν $\mathbf{T}$ εἶναι ἕνα *τυχὸν* χωρίον καὶ $f(z)$ μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἰς τὸ $\mathbf{T}$, τότε

$$\int_C f(z)dz = 0 \tag{1}$$

δι' ἕνα κλειστὸν δρόμον C ἐσωτερικὸν ἑνὸς ἁπλῆς συνοχῆς ὑποχωρίου $\mathbf{T}'$ τοῦ $\mathbf{T}$, ἂν βέβαια ὑπάρχη ἕνα ἁπλῆς συνοχῆς ὑποχωρίον $\mathbf{T}'$ τοῦ $\mathbf{T}$ ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖται ὁ δρόμος C.

2. Ἐπειδὴ ὁ δρόμος C εἶναι ἕνα συνεχές, κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς § 4,3, ἡ δυνατότης τῆς καταστάσεως, περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν εἰς τὸ 1., ὑπάρχη πάντοτε ὅταν τὸ συμπλήρωμα τοῦ $\mathbf{T}$ περιέχεται ὁλόκληρον εἰς τὸ *ἐξωτερικὸν χωρίον* ποὺ ὁρίζεται εἰς τὸ ἐπίπεδον διὰ τοῦ συνεχοῦς C. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τούτου δὲν ἔχωμεν παρὰ νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὸ Λῆμμα 4, § 4 καὶ νὰ ἐκλέξωμεν εἰς αὐτὸ τὸν ἀριθμὸν ε μικρότερον ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν τοῦ C ἀπὸ τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον τοῦ $\mathbf{T}$. Τὸ ἐσωτερικὸν τότε τοῦ P μᾶς δίδει τὸ ἁπλῆς συνοχῆς ὑποχωρίον $\mathbf{T}'$ τοῦ $\mathbf{T}$ τὸ ὁποῖον ζητεῖται εἰς 1. Ἰδιαιτέρως, ἡ ἐξίσωσις (1) ἰσχύει πάντοτε ὅταν C εἶναι ἁπλοῦς κλειστὸς δρόμος ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$ καὶ μὲ τὸ ἐσωτερικόν του κείμενον ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$.

3. Ἠμποροῦμεν ἐπὶ τοῦ προκειμένου νὰ προχωρήσωμεν κάπως βαθύτερον: Ἡ ἐξίσωσις (1) ἀληθεύει δι' ἕνα ἁπλοῦν κλειστὸν δρόμον C καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ὑποθέτομεν μόνον ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ συνάρτησις τόσον ἐπὶ τοῦ C ὅσον καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C.

Τὴν ἀπόδειξιν τούτου ἔδωσε ὁ *E. Camke*, Math. Zeitschr., 35 (1932), ss. 539 - 543.

Ἀλλὰ καὶ ἂν γνωρίζωμεν διὰ τὴν $f(z)$ μόνον ὅτι εἶναι ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C, ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ἔχει ὁρισθῆ μία συνοριακὴ τιμὴ $f(z)$ διὰ κάθε σημεῖον z τοῦ C (πρβ. § 6), ἡ ἐξίσωσις (1) ἰσχύει καὶ πάλιν διὰ τὰς συνοριακὰς αὐτὰς τιμάς, αἱ ὁποῖαι συνιστοῦν αὐτομάτως μίαν συνεχῆ συνάρτησιν κατὰ μῆκος τοῦ C (πρβ. § 6, Ἄσκ. 3). Ἡ ἐπέκτασις αὐτὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Cauchy διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα — καὶ ἡ ὁποία δὲν εἶναι καθόλου ἀφ' ἑαυτῆς φανερὰ — ἀπεδείχθη διὰ πρώτην φορὰν ἀπὸ τὸν S. Pollard[1].

4. C_1 καὶ C_2 ἂς εἶναι δύο ἁπλοῖ κλειστοὶ δρόμοι, μὲ τὸν C_2 κείμενον ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ φραγμένου χωρίου τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τοῦ C_1. Τὰ σημεῖα M τοῦ ἐπιπέδου ποὺ κεῖνται καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C_1 καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ C_2 σχηματίζουν ἕνα χωρίον τὸ ὁποῖον λέγεται συντόμως τὸ ***δακτυλιοειδὲς χωρίον*** (*) ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τοὺς δρόμους C_1 καὶ C_2. Ἂν καὶ οἱ δύο αὐτοὶ δρόμοι εὑρίσκωνται ἐντὸς ἑνός, αὐθαιρέτου κατὰ τὰ ἄλλα χωρίου $\mathbf{T}$, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ συνάρτησις, θὰ ἔχωμεν τὸ

Θεώρημα 1. *Θὰ εἶναι*

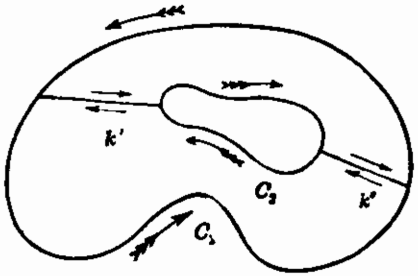
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

ἂν ὁ δακτύλιος ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τοὺς δρόμους C_1 καὶ C_2 ἀνήκη ὁλόκληρος εἰς τὸν $\mathbf{T}$, ἂν οἱ δύο δρόμοι εἶναι προσανατολισμένοι κα-

1. S. Pollard, Proc. London Math. Soc., 21 (1923), pp. 456 - 482. Βλέπε ἐπίσης H. Heilbronn, Math. Zeitschr., 37 (1933), s. 37 - 38· T. Estermann, αὐτ. s. 556 - 560, J.L. Walsh, Proc. Nat. Acad. Sci., 19 (1933), pp. 540 - 541. Ἡ καλλιτέρα πάντως ἐργασία ἐπὶ τοῦ προκειμένου, μὲ χρησιμοποίησιν τοῦ ὁλοκληρώματος Lebesgue, εἶναι τοῦ V.V. Golubev. Zap. Univ., otd. fiz. - mat. 29 (1916), εἰς τὴν ρωσικὴν γλῶσσαν,

(*) Σ.Μ. Διὰ περισσοτέραν συντομίαν θὰ γράφωμεν *δακτύλιος*, ἁπλῶς.

τὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἀνεξαρτήτως τοῦ ἂν τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C_2 ἀνήκῃ ἢ δὲν ἀνήκῃ ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸ $\mathbf{T}$.



Σχῆμα 3.

Ἀπόδειξις. Τοὺς δρόμους C_1 καὶ C_2 (Σχ.3) συνδέομεν μεταξύ τους διὰ δύο μὴ ἀλληλοτεμνομένων δρόμων k' καὶ k'', οἱ ὁποῖοι κεῖνται ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ δακτυλίου[1]. Διαιρεῖται ἔτσι ὁ δακτύλιος εἰς δύο ἁπλῆς συνοχῆς ὑποχωρία, ἐντὸς τῶν ὁποίων, καθὼς καὶ ἐπὶ τῶν συνόρων των, ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική. Κατὰ τὴν 2., τὰ ὁλοκληρώματα κατὰ μῆκος τῶν συνόρων τούτων εἶναι ἴσα μὲ μηδέν, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμά τους. Καὶ ἐπειδή, σύμφωνα μὲ τὰ εἰς §11,2 τὰ ὁλοκληρώματα κατὰ μῆκος τῶν βοηθητικῶν αὐτῶν δρόμων ἔχουν τιμὰς ἀντιθέτους, οἱ δὲ δρόμοι C_1 καὶ C_2 διαγράφονται κατὰ τὴν αὐτὴν (θετικὴν) φοράν, τὸ ἐν λόγῳ ἄθροισμα ἀνάγεται εἰς τὸ

$$\int_{+C_1} + \int_{-C_2} = 0, \quad \text{δηλαδὴ} \quad \int_{C_1} = \int_{C_2} . \qquad \text{Ο.ε.δ.}$$

1. Εὔκολα φαίνεται ὅτι τέτοιοι βοηθητικοὶ δρόμοι εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν. Πράγματι, ἂς θεωρήσωμεν δύο ἡμιακτῖνας r_1 καὶ r_2 ἐξ ἑνὸς σημείου z_0 εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C_2. Ἄν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ z_0, τὸ πρῶτον σημεῖον συναντήσεως τῆς r_1 μὲ τὸν C_1 παραστήσωμεν μὲ B καὶ τὸ τελευταῖον σημεῖον συναντήσεως τοῦ τμήματος $z_0 \cdots B$ μὲ τὸν C_2 παραστήσωμεν μὲ A, ὁ δρόμος τότε $A \cdots B$ εἶναι ἕνας τέτοιος βοηθητικὸς δρόμος. Μὲ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ ἕνα ἄλλον ἐπὶ τῆς ἡμιακτῖνος r_2.

Παράδειγμα. Ἀπὸ τὸ Παράδ. 5 §10, εἴδομεν ὅτι

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

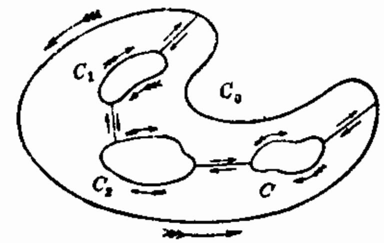
ἂν C κύκλος μὲ κέντρον z_0. Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, τὸ ὁλοκλήρωμα θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἁπλοῦς, κλειστὸς καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν διαγραφόμενος δρόμος C, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὁποίου κεῖται τὸ σημεῖον z_0. Ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς δρόμους αὐτούς, ἔστω ὁ C_1, μαζὶ μὲ ἕνα ἐπαρκῶς μικρὸν κύκλον, ἔστω ὁ C_2, περὶ τὸ z_0, πληροῦν τὰς ὑποθέσεις τοῦ Θεωρήματος 1. Τὸ ἀνάλογον ἰσχύει καὶ διὰ κάθε ὁλοκλήρωμα εἰς τὸ ἴδιον Παράδειγμα.

5. Τὸ θεώρημα ποὺ ἀκολουθεῖ ἀποδεικνύεται μὲ ἐντελῶς ὅμοιον τρόπον.

Θεώρημα 2. *Ὁ C_0 ἂς εἶναι ἕνας ἁπλοῦς κλειστὸς δρόμος. Ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ἁπλοὺς κλειστοὺς δρόμους $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ἂς εὑρίσκεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C_0 ἀλλ' εἰς τὸ ἐξωτερικὸν ὅλων τῶν ἄλλων* (πρβ. Σχ. 4 ὅπου $m = 3$). *Θὰ εἶναι τότε,*

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_m} f(z)dz,$$

ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι 1) ὅλοι οἱ δρόμοι καὶ οἱ μεταξὺ τοῦ C_0 καὶ C_μ ($\mu = 1,2, \ldots, m$) δακτύλιοι κεῖνται ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς ἑνὸς χωρίου $\mathbf{T}$, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἡ $f(z)$ εἶναι συνάρτησις ἀναλυτική, καὶ 2) ὅλοι οἱ δρόμοι εἶναι προσανατολισμένοι κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν.



Σχῆμα 4.

Ἡ μέθοδος ἀποδείξεως ὑποδεικνύεται ἀπὸ τὴν φορὰν τῶν βελῶν εἰς τὸ Σχῆμα 4.

Παράδειγμα. Δι' ἀναλύσεως τοῦ ὁλοκληρωτέου εἰς δύο κλάσματα εὑρίσκομεν ὅτι

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz = \int_{C_1} \frac{dz}{z} + \int_{C_2} \frac{dz}{z-1} = 4\pi i,$$

ἂν ἐκ τῶν σημείων 0, 1 ὁ C περικλείῃ καὶ τὰ δύο, ἐνῷ ὁ C_1 μόνον τὸ 0 καὶ ὁ C_2 μόνον τὸ 1.

6. Εἴμεθα τώρα εἰς θέσιν νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ὕπαρξιν *παραγουσῶν (ἢ ἀρχικῶν συναρτήσεων)* διὰ δοθείσας ἀναλυτικὰς συναρτήσεις. Ἀποδεικνύομεν πρῶτον τὴν ἀκόλουθον πρότασιν.

Θεώρημα 3. *Ἐὰν $f(z)$ εἶναι συνάρτησις συνεχὴς εἰς τὸ ἁπλῆς συνοχῆς χωρίον* $\mathbf{T}$, z_0 *τυχὸν ἀλλὰ σταθερὸν σημεῖον τοῦ* $\mathbf{T}$, *τὸ δὲ ὁλοκλήρωμα*[1]

$$(1) \qquad \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου ὁλοκληρώσεως (ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$ *κειμένου), ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος αὐτοῦ θὰ εἶναι, ἐντὸς τοῦ* $\mathbf{T}$, *μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις* $F(z)$ *τοῦ ἄνω ὁρίου ὁλοκληρώσεως* z. *Διὰ τὴν συνάρτησιν δὲ αὐτὴν* $F(z)$ *θὰ εἶναι*

$$F'(z) = f(z)$$

διὰ κάθε z *ἐντὸς τοῦ* $\mathbf{T}$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἡ $F(z)$ εἶναι μονότροπα προσδιωρισμένη διὰ τοῦ θεωρηθέντος ὁλοκληρώματος. Διὰ τὸ

1. Τὴν μεταβλητὴν ὁλοκληρώσεως εἰς ἕνα ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα ἠμποροῦμεν φυσικὰ νὰ παραστήσωμεν μὲ ὁποιονδήποτε τρόπον. Ἐδῶ, ὅπως καὶ εἰς τὰ ἀκολουθοῦντα μέρη, τὴν ὀνομάζομεν ζ ἐνῷ z θὰ σημαίνῃ ἕνα σημεῖον αὐθαίρετον μὲν ἀλλὰ σταθερὸν κατὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν.

ὑπόλοιπον μέρος τοῦ θεωρήματος, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν (βλ. § 6. II, Μορφὴ πρώτη) ὅτι, διὰ κάθε $\varepsilon > 0$, εἶναι

$$\left| \frac{F(z') - F(z)}{z' - z} - f(z) \right| < \epsilon$$

ἐὰν τὸ z' εἶναι ἐπαρκῶς πλησίον τοῦ z. Ἐπειδὴ τὸ z εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ $\mathbf{T}$, μία ὡρισμένη περιοχὴ τοῦ z θὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$· ἐντὸς αὐτῆς ἂς ὑποθέσωμεν κείμενον τὸ z'. Κατὰ τὴν § 11, 1, θὰ ἔχωμεν

$$F(z') - F(z) = \int_{z}^{z'} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Σύμφωνα μὲ τὴν ὑπόθεσιν, ὁ δρόμος ὁλοκληρώσεως ἠμπορεῖ νὰ ἐκλεγῇ αὐθαιρέτως· ἂς ὑποθέσωμεν αὐτὸν εὐθύγραμμον. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι συνεχής, ἠμποροῦμεν νὰ θέσωμεν

$$f(\zeta) = f(z) + \eta,$$

ὅπου

$$|\eta| < \epsilon$$

δι' ὅλα τὰ ζ τοῦ τμήματος $z \ldots z'$, ἐφ' ὅσον ἡ περιοχὴ τοῦ z, ἐντὸς τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τὸ z', ἔχει ἐκλεγῇ καταλλήλως μικρά. Θὰ εἶναι τότε

$$F(z') - F(z) = (z' - z)f(z) + \int_{z}^{z'} \eta\,d\zeta,$$

ὁπότε, κατὰ τὴν § 11,5,

$$|F(z') - F(z) - (z' - z)f(z)| < \epsilon\,|z' - z|.$$

Ἀλλ' ἡ σχέσις αὐτὴ συνεπάγεται τὴν εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ἀποδείξεως ἀνισότητα.

Παράδειγμα. Σύμφωνα μὲ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, τὸ $\displaystyle\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$

εἶναι συνάρτησις ἀναλυτικὴ εἰς κάθε χωρίον ἁπλῆς συνοχῆς τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ σημεῖον $+1$ ἀλλὰ ὄχι τὸ σημεῖον 0 — τὸ «δεξιὸν» π.χ. ἡμιεπίπεδον (πρβ. §2,f).

Πόρισμα. Αἱ ὑποθέσεις τοῦ Θεωρήματος 3 πληροῦνται προφανῶς ὅταν ἡ $f(z)$ εἶναι συνάρτησις ἀναλυτικὴ εἰς τὸ **T**. Ἑπομένως : *Κάθε ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἰς ἕνα ἁπλῆς συνοχῆς χωρίον ἔχει εἰς αὐτὸ παράγουσαν συνάρτησιν.* Ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ ὁλοκληρώματος (1) τοῦ Θεωρήματος 3. Ὅπως δὲ θὰ ἀποδειχθῇ εἰς τὸ Θεώρημα 4, τῆς §16, ἡ ἀνεξαρτησία τοῦ ὁλοκληρώματος (1) ἀπὸ τὸν δρόμον ὁλοκληρώσεως, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἰσχὺν τοῦ Θεωρήματος 3, *τότε μόνον ὑπάρχει* ὅταν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ συνάρτησις ἐντὸς τοῦ **T**. Αἱ μόναι δηλαδὴ συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ἔχουν παραγούσας εἶναι αἱ ἀναλυτικαὶ συναρτήσεις.

7. Ἠμποροῦμεν τώρα νὰ διατυπώσωμεν τὸ ἑπόμενον θεώρημα τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἀντίστοιχον τοῦ Θεμελιώδους θεωρήματος τοῦ Διαφορικοῦ καὶ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ.

Θεώρημα 4. *Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ ἁπλῆς συνοχῆς χωρίον* **T** *καὶ $F(z)$ εἶναι μία παράγουσα τῆς $f(z)$ εἰς τὸ* **T**, *θὰ ἔχωμεν*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) \tag{2}$$

ἂν τὰ σημεῖα z_0, z_1 καὶ ὁ δρόμος ὁλοκληρώσεως κεῖνται ἐντὸς τοῦ **T**.

Πράγματι, κατὰ τὸ Πόρισμα τοῦ Θεωρήματος 3 καὶ τὸ Θεώρημα 2 τῆς §7, τὸ ὁλοκλήρωμα (1) καὶ ἡ ἐν λόγῳ παράγουσα συνάρτησις $F(z)$ δὲν ἠμποροῦν νὰ διαφέρουν παρὰ μόνον κατὰ μίαν προσθετικὴν σταθεράν :

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) + c.$$

Ἂν θέσωμεν $z = z_0$, εὑρίσκομεν $c = -F(z_0)$ καὶ ὁδηγούμεθα τότε εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) διὰ $z = z_1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5

ΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ CAUCHY

§ 15. Ὁ θεμελιώδης τύπος

Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν πλέον σπουδαίαν συνέπειαν τοῦ θεωρήματος τοῦ Cauchy, **τὸν ὁλοκληρωτικὸν τύπον τοῦ Cauchy.**

Θεώρημα. *Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ἕνα χωρίον* **T**, *ὁ τύπος*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

ἰσχύει διὰ κάθε ἁπλοῦν, κλειστὸν καὶ θετικῶς προσανατολισμένον δρόμον C καὶ διὰ κάθε σημεῖον z εἰς τὸ ἐσωτερικόν του, ἀρκεῖ ἡ καμπύλη αὐτὴ καὶ τὸ ἐσωτερικόν της νὰ ἀνήκουν ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸ χωρίον **T**.

Τὸ θεώρημα αὐτὸ μᾶς λέγει ὅτι ἐὰν γνωρίζωμεν διὰ μίαν συνάρτησιν ὅτι εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ἕνα χωρίον **T** καὶ μὲ τιμὰς γνωστοὺς ἀριθμοὺς κατὰ μῆκος ἑνὸς ἁπλοῦ καὶ κλειστοῦ, ἐντὸς τοῦ **T**, δρόμου C καὶ τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τὸ **T**, αἱ τιμαὶ τότε τῆς συναρτήσεως ἐντὸς τοῦ C προσδιορίζονται μονότροπα. Ἀπὸ τὴν ἑρμηνείαν αὐτὴν γίνεται φανερὰ ἡ πολὺ μεγάλη σπουδαιότης τοῦ θεωρήματος· διότι μᾶς βεβαιώνει τοῦτο ὅτι αἱ τιμαὶ μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως ἔχουν ἕνα τόσον ἰσχυρὸν σύνδεσμον μεταξύ των, ὥστε αἱ τιμαί της κατὰ μῆκος τοῦ συνόρου τοῦ C νὰ καθορίζουν τελείως τὰς τιμάς της εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C. Μία ὁμοία κατάστασις εἶναι προφανῶς ἀδύνατος εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πλέον γενικῶν, ἄρα καὶ τῶν πλέον αὐθαιρέτως ὁριζομένων συναρτήσεων ποὺ ἐξετάσαμεν εἰς τὴν Παράγραφον 5. Θὰ διαπιστώσωμεν μάλιστα ἀργότερον ὅτι ὁ ἐν λόγῳ σύνδεσμος εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα πολὺ περισσότερον ἰσχυρὸς παρ' ὅσον ἀφήνεται νὰ φανῇ ἀπὸ τὸ θεώρημα αὐτό.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Κατὰ τὸ Θεώρημα 3,§ 11 καὶ τὸ Θεώρημα 1 §14 (Παράδειγμα),ὁ πρῶτος ὅρος δεξιὰ εἶναι $J_1 = f(z)$(1).$\Big($Διότι $\int \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$ (Παρ/μα σελ. 65) καὶ $J_1 = f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{dz}{\zeta - z} = \frac{2\pi i}{2\pi i} f(z) = f(z).\Big)$

Εἰς τὸν δεύτερον ὅρον, J_2, δεξιά, ὁ δρόμος C ἠμπορεῖ νὰ ἀντικατασταθῇ (Θεώρημα 1, §14) δι' ὁποιουδήποτε ἄλλου ἁπλοῦ κλειστοῦ δρόμου, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C, καὶ ὁ ὁποῖος νὰ περιέχῃ τὸ σημεῖον z: ἀπὸ ἕνα κύκλον k π.χ. μὲ ἀκτῖνα μικρὰν καὶ κέντρον τὸ z. Ὥστε

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Ἂς ἐκλέξωμεν τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ κύκλου k ἀρκετὰ μικρὰν ὥστε νὰ συμβαίνῃ

$$| f(\zeta) - f(z) | < \varepsilon$$

διὰ κάθε σημεῖον ζ τοῦ k· εἶναι δὲ τοῦτο δυνατὸν ἕνεκα τῆς συνεχείας τῆς $f(\zeta)$. Κατὰ τὰ εἰς §11,5, θὰ ἔχωμεν τότε

$$| J_2 | \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon$$

καὶ ἐπομένως $J_2 = 0$. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(z), \qquad \text{O.ε.δ.}$$

(1) *Διότι ζ ἐδῶ εἶναι ἡ μεταβλητὴ ὁλοκληρώσεως καὶ τὰ z καὶ $f(z)$ θεωροῦνται σταθερά.*

§ 16. Ὁλοκληρωτικοὶ τύποι διὰ τὰς παραγώγους

Ἐὰν k εἶναι ἕνας τυχὼν δρόμος καὶ $\varphi(z)$ μία συνάρτησις ὡρισμένη καὶ συνεχὴς κατὰ μῆκος τοῦ k, τὸ ὁλοκλήρωμα

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

θὰ ἔχῃ μίαν ὡρισμένην τιμὴν διὰ κάθε z τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ k· ὁρίζει συνεπῶς μίαν μονότιμον συνάρτησιν $f(z)$ διὰ σημεῖα ποὺ δὲν ἀνήκουν εἰς τὸν δρόμον k. Διὰ τὴν συνάρτησιν αὐτὴν ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Θεώρημα 1. *Ἡ συνάρτησις $f(z)$ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα (1) εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς κάθε χωρίον* $\mathbf{T}$ *τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει σημεῖα τοῦ k καὶ ἔχει παράγωγον διδομένην διὰ τοῦ τύπου*

$$(2) \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta.$$

Ἀπόδειξις. Θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν (§6, II, Μορφὴ τρίτη) ὅτι, διὰ κάθε σταθερὸν z τοῦ $\mathbf{T}$, εἶναι

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta\right\} = 0,$$

ἀρκεῖ τὸ z_n νὰ κεῖται ἐπίσης εἰς τὸ $\mathbf{T}$ καὶ νὰ τείνῃ πρὸς τὸ z. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τοῦ τύπου (1) ἔχομεν

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad \text{καὶ} \quad f(z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_n}d\zeta.$$

Ἑπομένως:

$$\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi(\zeta)}{z_n - z}\left[\frac{1}{\zeta - z_n} - \frac{1}{\zeta - z}\right]d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_n)}d\zeta.$$

Ἂν λοιπὸν τὴν ἐντὸς τῶν ἀγκίστρων παράστασιν εἰς (3) καλέσωμεν A_n, θὰ εἶναι

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_k \varphi(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_n)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right]d\zeta$$

$$= \frac{z_n - z}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z_n)}d\zeta.$$

Ἔστω M ἕνα ἀνώτερον φράγμα τῶν τιμῶν $|\varphi(\zeta)|$ κατὰ μῆκος τοῦ k. Ἐὰν καλέσωμεν d τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου z ἀπὸ τὸν δρόμον k καὶ ἐκλέξωμεν τὸν n ἀρκετὰ μεγάλον φυσικὸν ὥστε νὰ εἶναι

$$|z - z_n| < \frac{d}{2},$$

ἀπὸ τὰ εἰς § 11,5 γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ ἀνισότης

$$|A_n| < \frac{|z_n - z|}{2\pi}\cdot\frac{2M}{d^3}\cdot l$$

θὰ ἰσχύῃ δι' ὅλα αὐτὰ τὰ n. Ἑπομένως

$$A_n \to 0. \qquad \text{Ο.ε.δ.}$$

Τὸ περιεχόμενον τοῦ τύπου (2) εἶναι ὅτι τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως $f(z)$ ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν δι' ἁπλῆς παραγωγίσεως ὡς πρὸς z ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως (1). Μὲ τελείως ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι τὴν παραγώγισιν αὐτὴν ἠμποροῦμεν νὰ ἐπαναλάβωμεν ὁσασδήποτε φοράς.

Θεώρημα 2. *Ἡ συνάρτησις $f(z)$ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸν τύπον (1) ἔχει παραγώγους πάσης τάξεως εἰς τὸ* **T**, *αἱ ὁποῖαι δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους*

(4) $$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^3}d\zeta,$$

καὶ γενικῶς ἀπὸ τὸν τύπον

(5) $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

διὰ $n = 1, 2, \ldots$

Ὑποδεικνύομεν τὴν ἀπόδειξιν τοῦ πρώτου τύπου (4). Ἀπὸ τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$B_n = \frac{f'(z_n) - f'(z)}{z_n - z} - \frac{2!}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^3}d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_k \varphi(\zeta)\left[\frac{1}{z_n - z}\left(\frac{1}{(\zeta - z_n)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right) - \frac{2}{(\zeta - z)^3}\right]d\zeta.$$

Ὁ τύπος (4) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ὁριακὴν σχέσιν $B_n \to 0$. Πράγματι, ἡ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν παράστασις εἰς τὸν ὁλοκληρωτέον εἶναι ἴση μὲ

$$(z_n - z)\frac{3\zeta - z - 2z_n}{(\zeta - z)^3(\zeta - z_n)^2}$$

καὶ ἐὰν τὸ M_1 ἔχει ὅμοιον νόημα πρὸς τὸ νόημα τοῦ M ἀνωτέρω, θὰ εἶναι $|B_n| < \frac{|z_n - z|}{2\pi}\cdot\frac{4M_1}{d^5}\cdot l$. Τοῦτο ὅμως σημαίνει ὅτι $B_n \to 0$. Ο.ε.δ.

Κατόπιν τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ, εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ συναγάγωμεν μίαν σπουδαίαν ἰδιότητα τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων. Μία μονότιμος συνάρτησις λέγεται ἀναλυτικὴ ἁπλῶς καὶ μόνον ὅταν ἔχῃ παράγωγον, ὅπως δὲ γνωρίζομεν προκειμένου περὶ πραγματικῶν συναρτήσεων μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς, ἡ ἰδιότης αὐτὴ οὐδὲν συνεπάγεται ἐπὶ τῆς φύσεως τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως· οὐδὲ κἂν ὅτι εἶναι αὐτὴ συνεχής. Δι' ἀναλυτικὰς ὅμως συναρτήσεις μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς, ἔχομεν τὸ ἀκόλουθον σπουδαῖον καὶ θεμελιῶδες θεώρημα.

Θεώρημα 3. *Ἐὰν μία μονότιμος συνάρτησις $f(z)$ μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς εἶναι ὡρισμένη εἰς ἕνα χωρίον* **T** *καὶ ἔχῃ εἰς αὐτὸ πρώτην παράγωγον, θὰ ὑπάρχουν τότε καὶ ὅλαι αἱ ἀνωτέρας τάξεως παράγωγοι αὐτῆς (καὶ θὰ εἶναι ἑπομένως συνεχεῖς) εἰς τὸ* **T**.

Ἀπόδειξις : Ἔστω z ἕνα σημεῖον αὐθαίρετον εἰς τὸ **T** καὶ C ἕνας τυχὼν ἁπλοῦς καὶ κλειστὸς δρόμος ποὺ περιέχει τὸ z καὶ μὲ τὸ ἐσωτερικόν του περιεχόμενον εἰς τό **T**. Κατὰ τὸ Θεώρημα 1, ἀφοῦ ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι συνεχὴς κατὰ μῆκος τοῦ C, τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

θὰ εἶναι συνάρτησις ἀναλυτικὴ καὶ διαφορίσιμος ὁσασδήποτε φορὰς ἐντὸς τοῦ C.Καὶ ἐπειδὴ ἀκόμη, κατὰ τὸν ὁλοκληρωτικὸν τύπον τοῦ Cauchy τῆς § 15, ἡ συνάρτησις αὐτὴ δὲν εἶναι ἄλλη ἀπὸ τὴν ἰδίαν τὴν $f(z)$, θὰ ἔχῃ παραγώγους πάσης τάξεως εἰς τὸ z — ἄρα καὶ εἰς κάθε σημεῖον τοῦ **T**, ἀφοῦ τὸ z εἶναι ἕνα τελείως αὐθαίρετον σημεῖον τοῦ χωρίου αὐτοῦ.

Πόρισμα. *Ἐκτὸς τοῦ θεμελιώδους τύπου, ἰσχύουν ἐπιπροσθέτως καὶ οἱ τύποι*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ὑπὸ τὰς ἰδίας προϋποθέσεις.

Ἐκ τοῦ θεμελιώδους τούτου συμπεράσματος προκύπτει ἡ ἀλήθεια καὶ τοῦ *ἀντιστρόφου* τοῦ θεωρήματος τοῦ Cauchy διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα.

Θεώρημα 4. *Ἐὰν ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ ἁπλῆς συνοχῆς χωρίον* **T** *καὶ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

διὰ κάθε κλειστὸν δρόμον C κείμενον ἐντὸς τοῦ **T**, *ἡ συνάρτησις $f(z)$ θὰ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ* **T**. **(Θεώρημα τοῦ Morera).**

Ἀπόδειξις : Ὅπως εἰς τὴν συναγωγὴν τῆς πρώτης μορφῆς τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος ἐκ τῆς δευτέρας μορφῆς (§ 12), συμπεραίνομεν καὶ ἐδῶ ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὸν δρόμον ὁλοκληρώσεως καί, ἑπομένως (πρβ. § 14, Θεώρημα 3), ὅτι παριστάνει μίαν συνάρτησιν $F(z)$ ἀναλυτικὴν εἰς τὸ **T** καὶ διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $F'(z) = f(z)$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀναλυτικὴ αὐτὴ συνάρτησις $F(z)$ θὰ ἔχῃ, κατὰ τὰ προηγούμενα, δευτέραν παράγωγον εἰς τὸ **T**, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ $f(z)$ θὰ ἔχῃ πρώτην παράγωγον εἰς τὸ **T**. Εἶναι, ἄρα, ἡ $f(z)$ συνάρτησις ἀναλυτικὴ εἰς τὸ **T**.

Ἄσκησις. Δώσατε μίαν πλήρη ἀπόδειξιν τοῦ τύπου (5) διὰ $n = 3$ καί, γενικῶς, διὰ τυχόντα φυσικὸν ἀριθμὸν n.

ΜΕΡΟΣ III

ΣΕΙΡΑΙ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΤΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6

ΣΕΙΡΑΙ ΜΕ ΟΡΟΥΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ

Ὅπως παρετηρήσαμεν ἤδη εἰς τὴν Παράγραφον 3, ὑποθέτομεν τὸν ἀναγνώστην ἐξοικειωμένον μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ἀπείρων σειρῶν μὲ ὅρους σταθεροὺς μιγαδικοὺς ἀριθμούς. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν τώρα νὰ περάσωμεν ἀμέσως εἰς μίαν περισσότερον γενικὴν μελέτην τῶν σειρῶν μὲ ὅρους μεταβλητούς.

§ 17. Τὸ πεδίον συγκλίσεως

Ἔστω

$$f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

μία ἄπειρος ἀκολουθία μὲ ὅρους συναρτήσεις αὐθαιρέτους (§ 5) καὶ ἂς καλέσωμεν z ὡρισμένα σημεῖα τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὰ πεδία ὁρισμοῦ ὅλων τῶν συναρτήσεων αὐτῶν. Ἂν z εἶναι ἕνα τέτοιο σημεῖον, ἡ σειρὰ

$$f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

ἠμπορεῖ νὰ συγκλίνῃ ἢ νὰ μὴ συγκλίνῃ. Τὸ σύνολον **M** ὅλων τῶν σημείων z, διὰ τὰ ὁποῖα ὁρίζονται οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς *καὶ* διὰ τὰ ὁποῖα συγκλίνει αὐτή, ὀνομάζεται τὸ *πεδίον συγκλίσεως* τῆς δοθείσης σειρᾶς.

Αἱ συνήθεις δυναμοσειραὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς εἰδικὰς ὑποθέσεις

$$f_n(z) = a_n z^n \quad \text{ἢ} \quad f_n(z) = a_n(z - z_0)^n.$$

Ἡ πρώτη σημαντικὴ ἰδιότης τῶν δυναμοσειρῶν τούτων εἶναι ὅτι τὸ πεδίον **M** συγκλίσεώς των ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα ἑνὸς κύκλου περὶ τὸ z_0—καλουμένου *κύκλου συγκλίσεως* τῆς δυναμοσειρᾶς—καί, ἐνδεχομένως, ἀπὸ ὡρισμένα σημεῖα τῆς περιφερείας του. Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ ἀποδείξωμεν διὰ μιᾶς μεθόδου, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ταυτοχρόνως καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου συγκλίσεως.

Διὰ τὴν ἀκολουθίαν ἀπὸ τοὺς μὴ ἀρνητικοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς

$$(1) \qquad |a_0|, |a_1|, |\sqrt{a_2}|, \ldots, |\sqrt[n]{a_n}|, \ldots,$$

ἡ ὁποία εἶναι βεβαίως φραγμένη πρὸς τὰ ἀριστερά, ἀποδεικνύομεν τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

Θεώρημα. *Ἐὰν ἡ ἀκολουθία* (1) *εἶναι φραγμένη καὶ πρὸς τὰ δεξιά, θέτομεν*

a) $\qquad r = \dfrac{1}{\mu}$ *ἂν* $\mu > 0$,

b) $\qquad r = \infty$ *ἂν* $\mu = 0$,

ὅπου μ *εἶναι τὸ μεγαλύτερον ὅριον* (§ 3) *τῆς ἀκολουθίας. Ἂν δὲ ἡ ἀκολουθία* (1) *δὲν εἶναι φραγμένη πρὸς τὰ δεξιὰ (ὁπότε* $\mu = +\infty$*), θέτομεν*

c) $\qquad r = 0$ *διὰ* $\mu = +\infty$.

Καὶ διὰ τὰς τρεῖς ἑπομένως περιπτώσεις καὶ μὲ τὴν κατάλληλον κάθε φορὰν ἑρμηνείαν, ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν

$$r = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ἡ σειρὰ τότε $\Sigma a_n (z - z_0)^n$ *θὰ εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα διὰ* $|z - z_0| < r$ *καὶ ἀπολύτως ἀποκλίνουσα διὰ* $|z - z_0| > r$. **(Θεώρημα τῶν Cauchy - Hadamard).**

Ἀπόδειξις. Ἐὰν γράψωμεν z ἀντὶ $z - z_0$, φανερὸν εἶναι ὅτι ὑποθέτομεν $z_0 = 0$.

a) Ἂν $0<\mu<+\infty$, τότε

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \mu\,|z| \begin{cases} <1 \text{ ἐὰν } |z| < \dfrac{1}{\mu}, \\ >1 \text{ ἐὰν } |z| > \dfrac{1}{\mu}. \end{cases}$$

Κατὰ τὸ κριτήριον συνεπῶς τῆς ρίζης (*Στοιχ.* § 28), ἡ $\Sigma a_n z^n$ θὰ εἶναι σειρὰ ἀπολύτως συγκλίνουσα διὰ τὰ πρῶτα z καὶ ἀπολύτως ἀποκλίνουσα διὰ τὰ δεύτερα z.

b) Ἂν $\mu=0$, θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ $\Sigma a_n z^n$ συγκλίνει διὰ κάθε $z = z_1 (\neq 0)$. Ἀλλ' εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, δι' ὅλα σχεδὸν τὰ n θὰ εἶναι

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \epsilon, \quad \text{π.χ.} \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2\,|z_1|}$$

ἄρα

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z_1^n|} \leqq \tfrac{1}{2},$$

καὶ ἡ σύγκλισις τῆς σειρᾶς προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὸ κριτήριον τῆς ρίζης.

c) Ἀντιστρόφως, ἂν ἡ $\Sigma a_n z^n$ συγκλίνη δι' ἕνα $z = z_1 \neq 0$, ἡ ἀκολουθία $\{a_n z_1^n\}$ θὰ εἶναι φραγμένη, ἄρα καὶ ἡ ἀκολουθία $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ θὰ εἶναι ἐπίσης φραγμένη. Συνεπῶς, ἂν $\mu=\infty$, εἶναι ἀδύνατον νὰ συγκλίνη ἡ σειρὰ διὰ $z \neq 0$.

Ὅπως παρατηροῦμεν, τὸ θεώρημα δὲν μᾶς λέγει τίποτε περὶ τῆς συγκλίσεως ἢ ἀποκλίσεως τῆς σειρᾶς εἰς τὰ συνοριακὰ σημεῖα τοῦ κύκλου συγκλίσεως. Πράγματι, ἡ συμπεριφορὰ τῆς σειρᾶς διὰ τὰ σημεῖα αὐτὰ ποικίλει ἀπὸ τῆς μιᾶς περιπτώσεως εἰς τὴν ἄλλην. Παραδείγματος χάριν, ἡ σειρὰ Σz^n εἶναι ἀποκλίνουσα δι' ὅλα τὰ συνοριακὰ σημεῖα, ἡ $\sum \frac{z^n}{n^2}$ συγκλίνει εἰς ὅλα τὰ συνοριακὰ σημεῖα σημεῖα ἐνῷ ἡ $\sum \frac{z^n}{n}$ συγλίνει δι' ὡρισμένα μόνον συνοριακὰ σημεῖα [1].

---

1. **Καὶ διὰ τὰς τρεῖς αὐτὰς περιπτώσεις, $r=1$.**

Ἂν ἡ $f_n(z)$ εἶναι συνάρτησις κάπως περίπλοκος, ὁ προσδιορισμὸς τοῦ πεδίου συγκλίσεως παρουσιάζει συνήθως δυσκολίας. Εἰς ὅλας πάντως τὰς περιπτώσεις, τὸ ἄθροισμα μιᾶς σειρᾶς $\Sigma f_n(z)$ εἶναι ἀριθμὸς ὡρισμένος εἰς κάθε σημεῖον z τοῦ πεδίου **M** συγκλίσεώς της καί, ἑπομένως (§ 5), ὁρίζεται μία συνάρτησις $f(z)$ δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ **M**. Ἡ ἄπειρος σειρὰ εἶναι ὁ *κανὼν* διὰ τοῦ ὁποίου θὰ πρέπει νὰ ὁρίζεται, κατὰ τὴν § 5, μία συνάρτησις. Λέγομεν ἔτσι: *Ἡ σειρὰ παριστάνει τὴν συνάρτησιν* $f(z)$ *εἰς τὸ* **M** ἢ *ἡ* $f(z)$ *ἠμπορεῖ νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς σειρὰν εἰς τὸ* **M**· π.χ., ἡ $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ παριστάνει τὴν συνάρτησιν $\frac{1}{1-z}$ εἰς τὸν μοναδιαῖον κύκλον, ἤ, ἡ $\frac{1}{1-z}$ ἠμπορεῖ νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς σειρὰν εἰς τὸν κύκλον αὐτόν.

Ἐπειδὴ ἀπὸ ἐκεῖνα ποὺ ἐξεθέσαμεν εἰς τὰ προηγούμενα ἀνεγνωρίσθη πλέον ἡ ἰδιαιτέρα σπουδαιότης τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων, ἀνακύπτει τὸ ἐρώτημα: Πότε μία σειρὰ παριστάνει ἀναλυτικὴν συνάρτησιν;

Διὰ νὰ εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ δώσωμεν μίαν γενικὴν ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτό, ἔχομεν ἀνάγκην τῆς ἐννοίας τῆς *ὁμοιομόρφου* ἢ *ὁμαλῆς συγκλίσεως*, τὴν ὁποίαν θὰ ἀναπτύξωμεν εἰς τὴν ἀκολουθοῦσαν παράγραφον.

Ἀσκήσεις 1. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀκτὶς συγκλίσεως τῆς δυναμοσειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ διὰ τὰς περιπτώσεις:

$$\text{α) } a_n = \frac{1}{n^n}\cdot \quad \text{β) } a_n = n^{\sigma \varepsilon \nu}, \quad \text{γ) } a_n = \frac{n!}{n^n}\cdot$$

2) Νὰ προδιορισθῇ τὸ πεδίον συγκλίσεως τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ὅταν:

$$\text{α) } f_n(z) = \frac{1}{n^z} = e^{-z \log n}, \quad (\log n \geqslant 0)\cdot \text{ β) } f_n(z) = \frac{z^n}{1-z^n}\cdot$$

Νὰ προσδιορισθοῦν δηλαδὴ τὰ πεδία συγκλίσεως τῶν σειρῶν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \qquad \text{καὶ} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}.$$

§ 18. Ὁμοιόμορφος ἢ ὁμαλὴ σύγκλισις

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πεδίον συγκλίσεως τῆς σειρᾶς $\Sigma f_n(z)$ εἶναι τὸ **M**. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἂν z_1 εἶναι ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ **M** καὶ δοθῆ $\varepsilon > 0$, ἠμποροῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν ἕνα ἀκέραιον $n_1 = n_1(\varepsilon)$ τέτοιον ὥστε

$$|f_{n+1}(z_1) + f_{n+2}(z_1) + \cdots + f_{n+p}(z_1)| < \varepsilon$$

δι' ὅλα τὰ $n \geqslant n_1$ καὶ δι' ὅλα τὰ $p \geqslant 1$. Ἂν ἐκλέξωμεν ἕνα ἄλλο σημεῖον z_2 τοῦ **M**, τότε, ὁμοίως, ἠμποροῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν ἕνα n_2, κλπ. Ὥστε, διὰ δοθέντα ε, εἰς κάθε σημεῖον z τοῦ **M** ἀντιστοιχίζεται ἕνας ἀκέραιος $n_z = n_z(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος ὁποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους ἀπὸ διαδοχικοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς, μετὰ τὸν ὅρον τάξεως n_z καὶ διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν z, νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ε. Ἂς λάβωμεν n_z ὅσον τὸ δυνατὸν μικρότερον ἀκέραιον διὰ δοθέντας τοὺς ἀριθμοὺς ε καὶ z. Τὸ μέγεθος τοῦ n_z ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὡς ἕνα μέτρον τῆς **ταχύτητος συγκλίσεως**: ἂν n_z εἶναι πολὺ μεγάλος, ἡ σειρὰ συγκλίνει βραδέως εἰς τὸ σημεῖον z καὶ ἂν ἀρκετὰ μικρὸς ἡ σύγκλισις εἶναι ταχεῖα.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὑπάρχει ἕνας ἀριθμὸς N ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς n_z ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ διάφορα σημεῖα z τοῦ **M**. Τότε, ἂν $n \geqslant N$ καὶ $p \geqslant 1$ ὁποιοσδήποτε φυσικός, θὰ ἔχωμεν

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

διὰ *κάθε* σημεῖον z τοῦ **M**· διότι ὁ n εἶναι τώρα μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ κάθε n_z. Τοῦτο δὲ σημαίνει ὅτι τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος συγκλίσεως, διὰ τὴν ὁποίαν ὡμιλήσαμεν ἀνωτέρω, ἔχει νόημα δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ **M**.

Ὁδηγούμεθα ἔτσι εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς ***ὁμοιομόρφου συγκλίσεως*** μιᾶς σειρᾶς.

Ὁρισμός. *Λέγομεν ὅτι ἡ σειρὰ $\Sigma f_n(z)$* ***συγκλίνει ὁμοιομόρφως*** *ἢ* ***ὁμαλῶς*** *εἰς τὸ σημειοσύνολον* **M**[1] *ὅταν, δοθέντος $\varepsilon > 0$, ὑπάρχη ἕνας καὶ μόνον θετικὸς ἀκέραιος $N = N(\varepsilon)$ (ἐξαρτώμενος ἀπὸ τὸ ε καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ z) τέτοιος, ὥστε*

$$(1) \qquad |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

δι' ὅλους τοὺς $n > N$, δι' ὅλους τοὺς $p \geqslant 1$ καὶ δι' ὅλα τὰ z τοῦ **M**.

Ἐπειδὴ τὴν σειρὰν ὑπεθέσαμεν συγκλίνουσαν εἰς τὸ z καὶ ἑπομένως ὅτι ἐπιτρέπεται τὸ p νὰ τείνη εἰς τὸ ἄπειρον, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ προκύπτει ὅτι ἐὰν ἡ σειρὰ συγκλίνη ὁμοιομόρφως εἰς τὸ **M**, θὰ εἶναι

$$(2) \qquad \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} f_\nu(z) \right| \leqq \epsilon$$

δι' ὅλα τὰ z τοῦ **M** καὶ δι' ὅλους τοὺς $n \geqslant N$.

Σύμφωνα μὲ τὴν παρατήρησιν αὐτήν, ἡ σειρὰ $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ π.χ. *δὲν* συγκλίνει ὁμοιομόρφως εἰς τὸ πεδίον συγκλίσεώς της (τὸν μοναδιαῖον κύκλον)· διότι, διὰ ὁποιονδήποτε n, ἡ $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} z^\nu = \frac{z^{n+1}}{1-z}$ ἠμπορεῖ νὰ λάβη τιμὰς ὁσονδήποτε μεγάλας, ἀρκεῖ τὸ z νὰ ἐκλεγῆ ἐπὶ τοῦ τμήματος $0 \ldots +1$ ἐπαρκῶς πλησίον τοῦ $+1$. Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ φαίνεται ἐπίσης ὅτι μία δυναμοσειρὰ ***δὲν εἶναι ἀπαραίτητον*** νὰ συγκλίνη ὁμοιομόρφως εἰς ὁλόκληρον τὸν κύκλον συγκλίσεώς της. Πράγματι, ἔχομεν σχετικῶς τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Θεώρημα 1. *Μία δυναμοσειρὰ συγκλίνει ὁμοιομόρφως εἰς*

---

1. Ὅταν ὁμιλοῦμεν περὶ ὁμοιομόρφου συγκλίσεως θὰ ἐννοοῦμεν πάντοτε *εἰς ἕνα ἄπειρον σημειοσύνολον* καὶ οὐδέποτε εἰς μεμονωμένα σημεῖα· ἰδιαιτέρως, θεωροῦμεν ὁμοιόμορφον σύγκλισιν εἰς χωρία.

κάθε κύκλον ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος καὶ ὁμόκεντρος πρὸς τὸν κύκλον συγκλίσεώς της. Ἡ ὁμοιομορφία δηλαδὴ τῆς συγκλίσεως ἠμπορεῖ νὰ διαταράσσεται μόνον εἰς σημεῖα κείμενα πλησίον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου συγκλίσεως.

Ἀπόδειξις: Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σειρὰ $\Sigma a^n (z-z_0)^n$ ἔχει ἀκτῖνα συγκλίσεως $r>0$. Ἔστω $0<\rho<r$ καὶ z αὐθαίρετον σημεῖον μὲ ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ z_0: $|z-z_0|\leqslant\rho$. Θὰ εἶναι τότε

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu (z-z_0)^\nu\right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu| \rho^\nu$$

δι' ὅλα τὰ z αὐτά. Ἀλλ' ἡ σειρὰ $\Sigma |a_n| \rho^n$ εἶναι συγκλίνουσα, ἀφοῦ τὸ σημεῖον $z=z_0+\rho$ εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου συγκλίσεως. Συνεπῶς, ἂν δοθῇ ἕνας $\varepsilon>0$, ὑπάρχει ἀκέραιος N τέτοιος ὥστε

$$|a_{n+1}|\rho^{n+1}+\cdots+|a_{n+p}|\rho^{n+p}<\varepsilon$$

δι' ὅλους τοὺς $n\geqslant N$ καὶ δι' ὅλους τοῦ $p\geqslant 1$. Ἀλλὰ τότε προφανῶς

$$|a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots+a_{n+p}(z-z_0)^{n+p}|<\varepsilon$$

δι' ὅλα τὰ $|z-z_0|\leqslant\rho$, ὅλους τοὺς $n\geqslant N$ καὶ ὅλους τοὺς $p\geqslant 1$. Ο.ε.δ.

Ἀκολουθεῖ τὸ ἑπόμενον γενικὸν κριτήριον διὰ τὴν ὁμοιόμορφον σύγκλισιν, τὸ λεγόμενον **Μ-κριτήριον τοῦ Weierstrass**.

Θεώρημα 2. *Ἐὰν διὰ τοὺς θετικοὺς ἀκεραίους $M_0, M_1, \ldots M_n, \ldots$ συμβαίνῃ*

$$|f_n(z)|\leqslant M_n \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

δι' ὅλα τὰ z ἑνὸς ὑποπεδίου **M′** *τοῦ πεδίου συγκλίσεως* **M** *τῆς σειρᾶς $\Sigma f_n(z)$, ἡ δὲ σειρὰ*

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

συγκλίνει, ἡ σειρὰ τότε $\Sigma f_n(z)$ συγκλίνει ὁμοιομόρφως εἰς τὸ **M′**.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι τελείως ἀνάλογος πρὸς ἐκείνην τῆς εἰ-

δικῆς περιπτώσεως ποὺ ἐθεωρήσαμεν εἰς τὸ προηγούμενον Θεώρημα 1.

Ἀσκήσεις 1. Σπουδάσατε τὰς σειρὰς τῆς Ἀσκήσεως 2, §17 ὡς πρὸς τὸ θέμα τῆς ὁμοιομόρφου συγκλίσεως.

2) Ἀποδείξατε ὅτι ἡ δυναμοσειρὰ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ συγκλίνει ὁμοιομόρφως εἰς *ὁλόκληρον* τὸν κύκλον συγκλίσεώς της.

§ 19. Ὁμοιομόρφως συγκλίνουσαι σειραὶ ἀναλυτικῶν συναρτήσεων

Κάμνομεν τώρα μίαν περαιτέρω ὑπόθεσιν, ὅτι ὅλαι αἱ συναρτήσεις $f_n(z)$ εἶναι ἀναλυτικαί. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις ποὺ παριστάνει τότε ἡ σειρὰ $\Sigma f_n(z)$ εἶναι ἐπίσης ἀναλυτική. Μὲ περισσοτέραν ἀκριβολογίαν:

Ἔστω $f_0(z), f_1(z), \ldots$ μία ἄπειρος ἀκολουθία ἀπὸ συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι εἶναι ὅλαι ἀναλυτικαὶ εἰς τὸ αὐτὸ ἁπλῆς συνοχῆς χωρίον **T**, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σειρὰ $\Sigma f_n(z)$ εἶναι *ὁμοιομόρφως* συγκλίνουσα εἰς κάθε κλειστὸν ὑποχωρίον **T′**, τοῦ **T**[1]. Θὰ ἰσχύουν τότε τὰ ἑξῆς τρία θεωρήματα.

Θεώρημα 1. *Ἡ σειρὰ $\Sigma f_n(z)$ παριστάνει μίαν συνάρτησιν $F(z)$ συνεχῆ εἰς τὸ* **T**.

Θεώρημα 2. *Ἡ σειρὰ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν δι' ὁλοκληρώσεως κατὰ ὅρους τῆς $\Sigma f_n(z)$ κατὰ μῆκος ἑνὸς δρόμου k εἰς τὸ* **T** *συγκλίνει καὶ ἔχει ἄθροισμα τὸ $\int_k F(z)dz$. Συμβολικῶς:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_k f_n(z)dz \quad \text{συγκλίνει πρὸς τὸ} \quad \int_k F(z)dz.$$

Θεώρημα 3. *Ἡ $F(z)$ εἶναι συνάρτησις ἀναλυτικὴ εἰς τὸ* **T**. *Κάθε δὲ σειρὰ μὲ ὅρους τὰς παραγώγους p-τάξεως τῶν ὅρων τῆς $\Sigma f_n(z)$ συγκλίνει πανταχοῦ εἰς τὸ* **T**, *καὶ μάλιστα ὁμοιομόρφως*

1. Εἰς κάθε χωρίον δηλαδὴ **T′** τὸ ὁποῖον, μαζὶ μὲ τὰ συνοριακά του σημεῖα, περιέχεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ χωρίου **T**.

$\sum_{\nu=0}^{\infty}$

εἰς κάθε ὑποχωρίον κλειστὸν $\mathbf{T}'$ *τοῦ* $\mathbf{T}$, *ἔχουσα ἄθροισμα τὴν παράγωγον p-τάξεως τῆς* $F(z)$ *εἰς αὐτό. Συμβολικῶς καὶ διὰ* $p \pm 0$:

Ἡ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *συγκλίνει εἰς* $\mathbf{T}$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* $F^{(p)}(z)$.

Ἀπόδειξις :

1. Ἂν δοθοῦν z_0 εἰς τὸ $\mathbf{T}$ καὶ $\varepsilon > 0$, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι

$$| F(z) - F(z_0) | = | \Sigma f_n(z) - \Sigma f_n(z_0) | < 3\varepsilon$$

δι' ὅλα τὰ z τοῦ $\mathbf{T}$ ποὺ εἶναι ἐπαρκῶς πλησίον τοῦ z_0. Ἐκλέγομεν πρὸς τοῦτο ἕνα κύκλον $\mathbf{T}'$ μὲ κέντρον z_0 καὶ ὁποῖος κεῖται, μαζὶ μὲ τὸ σύνορόν του, ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$. Ἂν θέσωμεν

$$\sum_{n=0}^{N} f_n(z) = A(z) \quad \text{καὶ} \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) = R(z) \quad ,$$

θὰ ὑπάρχῃ, κατὰ τὴν § 18, ἕνας N τέτοιος ὥστε

$$| R(z) | \leqslant \varepsilon$$

δι ὅλα τὰ z τοῦ $\mathbf{T}'$. Ἂς περιορίσωμεν τώρα τὸ z ἐντὸς μιᾶς τόσον μικρᾶς περιοχῆς τοῦ z_0 ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}'$ ὥστε νὰ εἶναι

$$| A(z) - A(z_0) | < \varepsilon$$

διὰ ὅλα τὸ z τῆς περιοχῆς αὐτῆς. Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ μιὰ τέτοια περιοχή, ἀφοῦ $A(z)$ εἶναι ἄθροισμα πεπερασμένου πλήθους συνεχῶν συναρτήσεων, συνεχὴς ἄρα συνάρτησις. Θὰ ἔχωμεν τότε

$$| F(z) - F(z_0) | \leqq | A(z) - A(z_0) | + | R(z) | + | R(z_0) | < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon,$$

Ο.ε.δ.

2. Ἐπειδὴ τὴν $f(z)$ ἀπεδείξαμεν συνάρτησιν συνεχῆ, τὸ εἰς τὸ δεύτερον θεώρημα $\int_k F(z)\, dz$ ὑπάρχει δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις. Πράγματι, κατὰ τὸ Θεώρημα 4 τῆς §11, εἶναι

$$\int_k F(z)dz = \int_k A(z)dz + \int_k R(z)dz.$$

Ἀλλά, κατὰ τὴν ἰδίαν πρότασιν

$$\int_k A(z)dz = \int_k f_0(z)dz + \int_k f_1(z)dz + \cdots + \int_k f_N(z)dz.$$

Ἑπομένως

$$\left| \int_k F(z)dz - \sum_{n=0}^{N} \int_k f_n(z)dz \right| = \left| \int_k R(z)dz \right| \leqq \epsilon \cdot l,$$

ὅπου l σημαίνει τὸ μῆκος τοῦ δρόμου k. Καὶ ἐπειδὴ τὸν ἀριθμὸν $\varepsilon \cdot l$ ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ὁσονδήποτε μικρόν, διὰ κατάλληλον ἐκλογὴν τοῦ ε, ἡ ἀνισότης αὐτὴ σημαίνει ὅτι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_k f_n(z) \text{ συγκλίνει πρὸς τὸ } \int_k F(z)dz.$$

Κατόπιν τούτων γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ ὁμοιόμορφος σύγκλισις τῆς $\Sigma f_n(z)$ κατὰ μῆκος τοῦ δρόμου k εἶναι ἐπαρκὴς καὶ ἠμποροῦμεν συνεπῶς νὰ διατυπώσωμεν τὸ ἀκόλουθον θεώρημα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπέκτασις τοῦ θεωρήματος τῆς § 11,4.

Θεώρημα 4. *Μία ἄπειρος σειρὰ μὲ ὅρους συναρτήσεις συνεχεῖς ἠμπορεῖ νὰ ὁλοκληρωθῇ κατὰ ὅρους, ἀρκεῖ νὰ συγκλίνῃ ὁμοιομόρφως κατὰ μῆκος τοῦ δρόμου ὁλοκληρώσεως.*

3. Ἐὰν C εἶναι ἕνας τυχὼν κλειστὸς δρόμος κείμενος ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$, ἡ σειρὰ $\Sigma f_n(z)$ θὰ συγκλίνῃ ὁμοιομόρφως κατὰ μῆκος τοῦ C. Κατὰ τὸ Θεώρημα 2, ἑπομένως, θὰ εἶναι

$$\int_C F(z)dz = \int_C \left(\sum f_n(z)\right) dz = \sum \int_C f_n(z)dz,$$

ἀφοῦ ἕκαστος ὅρος τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι ἴσος μὲ μηδέν, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy δι' ὁλοκληρώματα. Καὶ ἐπειδὴ ὁ δρόμος C ὑπετέθη τυχὼν ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$, ἡ συνάρτησις $F(z)$ θὰ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Morera (§ 16, Θεώρημα 4).

Ἔστω τώρα $\mathbf{T}'$ ἕνα τυχὸν κλειστὸν ὑποχωρίον τοῦ $\mathbf{T}$. Τότε, σύμφωνα μὲ τὸ Λῆμμα 3 τῆς § 4, ἠμποροῦμεν νὰ ἐκλέξωμεν τὸν δρόμον C ἔτσι, ὥστε νὰ ἐγκλείῃ μὲν τὸ $\mathbf{T}'$ ἀλλὰ χωρὶς νὰ ἔχῃ κανένα κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ $\mathbf{T}'$ — συνεπῶς, μὲ ἀπόστασιν ρ τοῦ C ἀπὸ τοῦ $\mathbf{T}'$ ἀριθμὸν θετικόν. Διὰ τὴν παράγωγον p-τάξεως τῆς $F(z)$ εἰς τὸ σημεῖον z τοῦ $\mathbf{T}$ (καὶ ὑπάρχει ἀσφαλῶς ἡ παράγωγος αὐτή) εὑρίσκομεν, διὰ τοὺς ἰδίους λόγους ὡς ἀνωτέρω, ὅτι

$$F^{p}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p!}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}(z),$$

καὶ ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀποδεικνύει τὸ δεύτερον μέρος τοῦ θεωρήματος. Ὅτι δὲ ἡ σειρὰ αὐτὴ πράγματι συγκλίνει ὁμοιομόρφως εἰς τὸ $\mathbf{T}$ διὰ σταθερὸν p, τοῦτο εἶναι συνέπεια τῆς ἁπλῆς ἀνισότητος

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+r} f_\nu^{(p)}(z)\right| = \left|\frac{p!}{2\pi i}\int_C \frac{\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+r} f_\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}d\zeta\right| \leqq \frac{p!}{2\pi}\cdot l\,\frac{\epsilon}{\rho^{p+1}}.$$

(Βλέπε σχετικῶς τὴν ἀκολουθοῦσαν Ἄσκησιν 2).

Ἐφαρμογαὶ εἰς τὰς δυναμοσειράς.

1. Ἔστω $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ἡ σειρὰ $\Sigma f_n(z)$ γίνεται ἡ δυναμοσειρὰ $\Sigma a_n(z - z_0)^n$, διὰ τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀκτὶς συγκλίσεως $r > 0$, καὶ ἂς καλέσωμεν ρ ἕνα ἀριθμὸν μεταξὺ 0 καὶ r $(0 < \rho < r)$. Ὁ κύκλος τότε $|z - z_0| < r$ ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ ὡς τὸ χωρίον $\mathbf{T}$, καὶ ὁ ὁμόκεντρός του κύκλος μὲ ἀκτῖνα ρ ὡς τὸ ὑποχωρίον $\mathbf{T}'$ (§ 18, Θεώρημα 1). Θὰ ἔχωμεν τότε τὸ θεώρημα.

Θεώρημα 5. *Μία δυναμοσειρὰ $\Sigma a_n(z - z_0)^n$ παριστάνει, ἐντὸς τοῦ κύκλου συγκλίσεώς της, μίαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν $f(z)$. Αἱ παράγωγοί της λαμβάνονται διὰ παραγωγίσεων τῆς δυναμοσειρᾶς κατὰ ὅρους καὶ αἱ ἀντίστοιχοι δυναμοσειραὶ ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα συγκλίσεως μὲ τὴν ἀρχικὴν δυναμοσειράν:*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)a_n(z - z_0)^{n-p}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\ldots(n+p)a_{n+p}(z - z_0)^n$$

$$= p!\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+p}{p}a_{n+p}(z - z_0)^n$$

$$|z - z_0| < r.$$

συγκλίνει διὰ $|z - z_0| < \rho$. Εἰδικῶς εἶναι

$$f^{p}(z_0) = p!\,a_p,\quad a_p = \frac{1}{p!}f^{p}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}}d\zeta,$$

ὅπου C ἡ περιφέρεια $|z - z_0| = \rho$. Ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου τύπου καὶ γράφοντες n ἀντὶ p ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον χρήσιμον ἀνισότητα, τὴν **ἀνισότητα τοῦ Cauchy**:

$$|a_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\rho\cdot\frac{M}{\rho^{n+1}} = \frac{M}{\rho^n},$$

ὅπου M παριστάνει τὸ μέγιστον τῆς $|f(z)|$ ἐπὶ τῆς περιφερείας $|z - z_0| = \rho$.

Ἀσκήσεις. 1) Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν αἱ σειραὶ εἰς τὴν Ἄσκησιν 2, § 17 παριστάνουν (ἐντὸς τῶν πεδίων συγκλίσεώς των) ἀναλυτικὰς συναρτήσεις.

2. Ἀναφορικῶς εἰς τὰς ἀσκήσεις τῶν §§ 9 καὶ 11, νὰ δείξετε ὅτι ἄν, ἐκτὸς τῶν σειρῶν $\Sigma f_n(z)$, καὶ αἱ σειραὶ $\Sigma|f_n(z)|$ συγκλίνουν ὁμοιομόρφως ἐπίσης εἰς κάθε χωρίον $\mathbf{T}'$, τὸ Θεώρημα 3 τότε ἠμπορεῖ νὰ «ὀξυνθῇ» περισσότερον διὰ τῆς προσθήκης ὅτι αἱ σειραὶ $\Sigma f_n^{(p)}(z)$, διὰ σταθερὸν p, συγκλίνουν ὁμοιομόρφως εἰς τὸ $\mathbf{T}'$.

$\Sigma |f_n^{(p)}(z)|$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7

ΤΟ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΕΙΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑΝ

Τὰ θεωρήματα τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου μᾶς ἔδειξαν ὅτι τὴν ἰδιότητα τῶν δυναμοσειρῶν νὰ παριστάνουν, ἐντὸς τῶν πεδίων συγκλίσεώς των, ἀναλυτικὰς συναρτήσεις συμμερίζονται καὶ σειραὶ πολὺ γενικώτεραι, ὅπως εἶναι αἱ *ὁμοιομόρφως* συγκλίνουσαι σειραὶ μὲ ὅρους συναρτήσεις ἀναλυτικάς. Ἡ μεγάλη ἑπομένως σπουδαιότης τῶν δυναμοσειρῶν διὰ τὴν σπουδὴν τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ βασίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς. Τὸ ἀντίστροφον μᾶλλον συμβαίνει: ἐπὶ τοῦ ὅτι κάθε ἀναλυτικὴ συνάρτησις ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ διὰ μιᾶς δυναμοσειρᾶς. Τὸ σύνολον ἔτσι ὅλων τῶν δυνατῶν δυναμοσειρῶν μᾶς παρέχει καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν διανοητῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων.

§ 20. Θεωρήματα ἀναπτύγματος καὶ ταυτότητος διὰ δυναμοσειράς.

Θεώρημα 1. *Ἔστω $f(z)$ συνάρτησις ἀναλυτικὴ εἰς ἕνα ὡρισμένον χωρίον* $\mathbf{T}$ *καὶ z_0 ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ* $\mathbf{T}$. *Θὰ ὑπάρχῃ τότε μία καὶ μόνον μία δυναμοσειρά, τῆς μορφῆς*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

ἡ ὁποία συγκλίνει εἰς μίαν ὡρισμένην περιοχὴν τοῦ z_0 καὶ παριστάνει ἐκεῖ τὴν συνάρτησιν $f(z)$. Διὰ τὴν σειρὰν δὲ αὐτὴν θὰ εἶναι

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z).$$

Ἡ σειρὰ συγκλίνει τουλάχιστον εἰς τὸν μέγιστον κύκλον μὲ κέντρον z_0 καὶ ὁ ὁποῖος περιέχει μόνον σημεῖα τοῦ $\mathbf{T}$, *ἐνῶ τὸ ἀκριβὲς πεδίον συγκλίσεως τῆς σειρᾶς εἶναι ὁ μέγιστος κύκλος (μὲ ἀκτῖνα ἔστω r) μὲ κέντρον z_0, εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ὁποίου ἡ $f(z)$ ἢ ὁρίζεται ἢ εἶναι ὁριστὴ ὡς διαφορίσιμος συνάρτησις.* **(Θεώρημα ἀναπτύγματος· ἀνάπτυγμα τοῦ Taylor).**

Ἀπόδειξις: Ἔστω z ἕνα τυχὸν ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου $(z_0 : r)$. Θὰ πρέπει πρῶτον νὰ δείξωμεν ὅτι, διὰ δοθείσας (τάν) τιμὰς τῶν a_n, ἡ σειρὰ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ συγκλίνει καὶ ἔχει ἄθροισμα } f(z).$$

Ἐπειδὴ $|z - z_0| = \rho < r$, ἠμποροῦμεν νὰ ἐκλέξωμεν ἕνα ρ_1 ὥστε $\rho < \rho_1 < r$. Ἔστω ζ ἕνα αὐθαίρετον σημεῖον τῆς περιφερείας k_1 τοῦ κύκλου $(z_0 : \rho_1)$. Τότε

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Ἡ εἰδικὴ αὐτὴ γεωμετρικὴ σειρὰ συγκλίνει ὁμοιομόρφως ὡς πρὸς ζ κατὰ μῆκος τοῦ δρόμου k_1 (§ 18, Θεώρημα 2), ἀφοῦ

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{\rho}{\rho_1} < 1.$$

Τὸ ἴδιον δὲ ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν σειρὰν

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

Ἂν λοιπὸν ὁλοκληρώσωμεν κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν κατὰ μῆκος τοῦ k_1, ἡ ὁλοκλήρωσις εἰς τὸ δεξιὸν μέλος ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ ὅρους καὶ γνωρίζομεν ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2 τῆς § 19 ὅτι ἡ προκύπτουσα σειρὰ συγκλίνει. Διὰ διαιρέσεως διὰ $2\pi i$ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{k_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n d\zeta\ ,$$

καὶ ἀπὸ αὐτήν, κατὰ τὰς §§ 15 καὶ 16, ὅτι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\cdot(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z - z_0)^n,$$

Ο.ε.δ.

Τὸ ὅτι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦτο εἶναι καὶ τὸ μόνον δυνατὸν διὰ τὴν συνάρτησιν $f(z)$ προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὸ ἀκολουθοῦν **Θεώρημα ταυτότητος διὰ δυναμοσειράς.**

Θεώρημα 2. *Ἐὰν καὶ αἱ δύο δυναμοσειραὶ*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z - z_0)^n \quad \text{καὶ} \quad \sum_{n=0}^{\infty}b_n(z - z_0)^n$$

ἔχουν τὴν ἰδίαν θετικὴν ἀκτῖνα συγκλίσεως τὰ δὲ ἀθροίσματά τους εἶναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ ἢ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα μιᾶς περιοχῆς τοῦ z_0 ἢ δι' ἄπειρον πλῆθος ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ (διαφορετικῶν ὅμως μεταξύ τους καὶ ἀπὸ τὸ z_0) ἀλλὰ μὲ ὁρικὸν σημεῖον τὸ z_0, αἱ δύο τότε σειραὶ θὰ εἶναι ταυτοτικαί.

Ἀπόδειξις: Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι διὰ $z = z_0$ εἶναι $a_0 = b_0$. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ πρῶτοι m συντελεσταὶ καὶ εἰς τὰ δύο ἀναπτύγματα ἀπεδείχθησαν ἴσοι, ἀντιστοίχως. Θὰ ἔχωμεν τότε

$$a_{m+1} + a_{m+2}(z - z_0) + \cdots = b_{m+1} + b_{m+2}(z - z_0) + \cdots$$

δι' ὅλα τὰ ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεῖα αὐτὰ z. Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν ἐπιτρέψωμεν εἰς τὸ z νὰ πλησιάζῃ τὸ σημεῖον z_0, κινούμενον ὅμως ἐπὶ τῶν σημείων τούτων καὶ μόνον, καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ δυναμοσειραὶ αὐταὶ παριστάνουν συνεχεῖς συναρτήσεις, τότε, ἀπὸ τὴν § 6, I, Μορφὴ τρίτη, συμπεραίνομεν ὅτι

$$b_{m+1} = a_{m+1}\,.$$

Τοῦτο ὅμως σημαίνει ὅτι αἱ δύο δυναμοσειραὶ ταυτίζονται.

Παράδειγμα. Εἰς § 14,6 ἐδείχθη ὅτι ἡ $f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ εἶναι συνάρτησις ἀναλυτικὴ τοῦ z, ἐὰν τόσον τὸ z ὅσον καὶ ὁ (ὁποιοσδήποτε) δρόμος ὁλοκληρώσεως εὑρίσκωνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δεξιοῦ ἡμιεπιπέδου. Ἐπιδέχεται συνεπῶς ἡ $f(z)$ ἀνάπτυγμα κατὰ δυναμοσειρὰν εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ $z_0 = +1$ π.χ. καὶ μὲ ἀκτῖνα r τουλάχιστον τὴν μονάδα. Ἐπειδὴ ἐδῶ εἶναι

$$f'(z) = \frac{1}{z}, f''(z) = -\frac{1}{z^2}, \cdots, f^n(z) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{z^n}, \cdots,$$

θὰ ἔχωμεν διὰ $z = z_0 = 1$,

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2}, \cdots, a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \cdots,$$

καὶ ἑπομένως τὸ ἀκόλουθον ἀνάπτυγμα διὰ τὴν $f(z)$:

$$f(z) = (z - 1) - \frac{1}{2}(z - 1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z - 1)^n + \cdots$$

τὸ καὶ μόνον δυνατόν. Ὅπως δὲ βλέπομεν $r = 1$.

Ἀνάπτυγμα μιᾶς συναρτήσεως μιᾶς *πραγματικῆς* μεταβλητῆς εἰς δυναμοσειρὰν δὲν ὑπάρχει πάντοτε, ἀκόμη καὶ ἐὰν ἡ συνάρτησις ἔχῃ παραγώγους πάσης τάξεως. Ἐπὶ τοῦ προκειμένου ὅμως ὅ,τι συναγάγαμεν προέκυψε ἀπὸ τὴν *ὕπαρξιν* ἁπλῶς τῆς *πρώτης* παραγώγου.

Τὸ ἀνωτέρω ἀνάπτυγμα συγκλίνει, ὡς ἐτονίσαμεν ἤδη, εἰς τὸν μέγιστον κύκλον K περὶ τὸ z_0 καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὁποίου ἡ $f(z)$ παραμένει ὡρισμένη ἢ *ὁριστὴ* ὡς διαφορίσιμος συνάρτησις. Τὸ ἐπίθετον τοῦτο σημαίνει τὰ ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι ὡρίσθη ἡ $f(z)$ εἰς τὸ χωρίον $\mathbf{T}$ καὶ K ἕνας κύκλος περὶ τὸ z_0 ὁ ὁποῖος ἠμπορεῖ νὰ περιέχῃ καὶ σημεῖα μὴ ἀνήκοντα εἰς τὸ $\mathbf{T}$. Ἠμπορεῖ νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν τὴν συνάρτησιν $f(z)$ εἰς σημεῖα τοῦ K τὰ ὁποῖα νὰ μὴ εἶναι σημεῖα τοῦ $\mathbf{T}$ καὶ κατὰ τέτοιον τρόπον ὥστε ἡ προκύπτουσα συνάρτησις νὰ εἶναι διαφορίσιμος εἰς ὁλόκληρον τὸν κύκλον K. Ἡ δυναμοσειρά μας τότε θὰ συγκλίνῃ τουλάχιστον εἰς τὸν K.

Ἐπιπλέον, ἔστω K_0 ὁ μέγιστος κύκλος περὶ τὸ z_0 μὲ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα· ὁ κύκλος K_0 θὰ εἶναι τότε ὁ ἀκριβὴς κύκλος συγκλίσεως τῆς δυναμοσειρᾶς. Ἄς σημειωθῇ ὅτι εἶναι δυναταὶ αἱ ἑξῆς δύο ἄκραι περιπτώσεις: Ὁ K_0 μπορεῖ νὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ χωρίου $\mathbf{T}$, εἰς τὸ ὁποῖον ὡρίσθη ἀρχικῶς ἡ $f(z)$, ἢ νὰ εἶναι ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον. Ἐὰν ὑπάρχῃ κάποιο σημεῖον τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγκλεισθῇ εἰς ἕνα κύκλον συγκλίσεως μιᾶς δυναμοσειρᾶς ποὺ παριστάνει τὴν $f(z)$ [1], τὸ σημεῖον αὐτὸ ὀνομάζεται *ἀνώμαλον σημεῖον* τῆς συναρτήσεως.

Τὰ ἰδιαιτέρως ἀξιοσημείωτα αὐτὰ πράγματα θὰ ἐξετάσωμεν μὲ κάθε λεπτομέρειαν εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον καὶ εἰς τὸ Μέρος IV. Πρὸς τὸ παρὸν ὅμως, δύο μόνον εἰδικὰ συμπεράσματα ἠμποροῦμεν νὰ συναγάγωμεν ἀπὸ τὰ θεωρήματά μας.

Τὸ θεώρημα ποὺ ἀκολουθεῖ λέγεται **Θεώρημα τοῦ Weierstrass διὰ διπλᾶς σειρὰς** καὶ χρησιμοποιεῖται συνήθως ἐπωφελῶς διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀναπτύγματος εἰς δυναμοσειρὰν μιᾶς δοθείσης συναρτήσεως.

Θεώρημα 3. *Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ συναρτήσεις*

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)}(z - z_0)^k,$$

$(n=0, 1, 2, \ldots)$, *εἶναι ἀναλυτικαὶ τουλάχιστον διὰ* $|z - z_0| < r$, *καθὼς καὶ ὅτι ἡ σειρὰ*

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \\ &= [a_0^{(0)} + a_1^{(0)}(z - z_0) + \cdots + a_k^{(0)}(z - z_0)^k + \cdots] \\ &\quad + [a_0^{(1)} + a_1^{(1)}(z - z_0) + \cdots + a_k^{(1)}(z - z_0)^k + \cdots] \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + [a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(z - z_0) + \cdots + a_k^{(n)}(z - z_0)^k + \cdots] \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

συγκλίνει ὁμοιομόρφως διὰ $|z - z_0| \leqslant \rho < r$ *καὶ διὰ ὅλα τὰ*

1 Σ.Μ. Ὡς ἐσωτερικὸν (δηλαδή, μὴ συνοριακὸν) σημεῖον τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

$\rho < r$. *Οἱ συντελεσταὶ τότε εἰς κάθε στήλην εἶναι ὅροι σειρᾶς συγκλινούσης καὶ ἂν θέσωμεν*

$$a_k^{(0)} + a_k^{(1)} + \cdots + a_k^{(n)} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_k^{(n)} = A_k$$

διὰ $k = 0, 1, \ldots$, *ἡ σειρὰ*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(z - z_0)^k$$

θὰ εἶναι ἡ δυναμοσειρὰ διὰ τὴν $F(z)$, *μὲ πεδίον συγκλίσεως τουλάχιστον* $|z - z_0| < r$ [1].

Ἀπόδειξις: Κατὰ τὸ Θεώρημα 3 τῆς § 19, ἡ $F(z)$ εἶναι συνάρτησις ἀναλυτικὴ διὰ $|z - z_0| < r$ καὶ ἠμπορεῖ νὰ ἀναπτυχθῇ, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 1, εἰς δυναμοσειρὰν ἐντὸς τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Ὁ συντελεστὴς k-τάξεως εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν θὰ εἶναι τότε ἴσος μὲ

$$\frac{1}{k!}F^{(k)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f_n^{(k)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k^{(n)} = A_k,$$

καὶ συμπληρώνεται ἔτσι ἡ ἀπόδειξις.

Ἀποδεικνύομεν τέλος τὸ ἀξιοσημείωτον καὶ πολὺ σπουδαῖον

Θεώρημα 4. *Μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις* $f(z)$ *δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἕνα μέγιστον μέτρον* [2] *εἰς ἕνα σημεῖον* z_0 *ἑνὸς χωρίου ἀναλυτικότητος τῆς συναρτήσεως, ἐκτὸς ἂν ἡ* $f(z)$ *ἔχῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν* $f(z_0)$ *εἰς κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου αὐτοῦ.*

Ἀπόδειξις: Εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ z_0 ἔχομεν

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad (\text{μὲ } r < 0).$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνας τουλάχιστον ἀπὸ τοὺς συντελε-

1. Αὐτὰ σημαίνουν ὅτι, ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις, αἱ σειραὶ μὲ ὅρους σειρᾶς μποροῦν νὰ προστεθοῦν κατὰ ὅρους.

2. Τιμὴν δηλ. τῆς ὁποίας τὸ μέτρον (ἢ modulus) νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ ἴσον ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς $f(z)$ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ z_0.

στὰς μετὰ τὸν $a_0 = f(z_0)$ εἶναι διάφορος ἀπὸ τὸ μηδέν. Ἔστω a_m $(m \geqslant 1)$ ὁ πρῶτος ἀπὸ τοὺς συντελεστὰς αὐτούς. Ἃς θέσωμεν

$a_0 = Ae^{ia}$, $a_m = A'e^{ia'}(A' > 0)$, $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$ (μὲ $0 < \rho < r$).

Θὰ ἔχωμεν τότε

$$f(z) = Ae^{ia} + A'e^{ia'}\rho^m e^{im\varphi} + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots.$$

Ἐκλέγομεν τώρα τὴν γωνίαν φ ὥστε νὰ εἶναι $\alpha' + m\varphi = \alpha$[1]. Ἡ συνάρτησις $f(z)$ γράφεται τώρα $f(z) = (A + A'\rho^m)e^{ia} + a^{m+1} + \cdots$ καὶ ἑπομένως

$$\begin{aligned} f(z) &= (A + A'\rho^m)e^{ia} + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots, \\ |f(z)| &\geqq A + A'\rho^m - (|a_{m+1}|\rho^{m+1} + \cdots) \\ &\geqq A + \rho^m[A' - (|a_{m+1}|\rho + \cdots)]. \end{aligned}$$

Ἕνεκα τῆς συνεχείας τῆς ἐντὸς τῆς παρενθέσεως δυναμοσειρᾶς, ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν εἰς αὐτὴν καταλλήλως μικρὰν τιμὴν ρ_0 τοῦ ρ ὥστε νὰ εἶναι $(|a_{m+1}|\rho_0 + \cdots) < \frac{1}{2}A'$. Τότε ὅμως θὰ ἔχωμεν

$$|f(z)| > A + \frac{1}{2}A'\rho^m > |f(z_0)|$$

δι' ὅλα τὰ ρ διὰ τὰ ὁποῖα $0 < \rho < \rho_0$. Καὶ τοῦτο σημαίνει ὅτι, δι' ὅλα τὰ σημεῖα z τὰ κείμενα ἀρκετὰ πλησίον τοῦ z_0 καὶ ἐπὶ μιᾶς ἀκτῖνος ἀπὸ τὸ z_0, θὰ εἶναι $|f(z)| > |f(z_0)|$.

Τὸ ἑπόμενον θεώρημα τὸ ὁποῖον λέγεται *ἀρχὴ τοῦ μεγίστου μέτρου* δὲν εἶναι παρὰ μία ἄλλη μορφὴ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Θεώρημα 5. *Τὸ μέγιστον μέτρον μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως εἰς ἕνα κλειστὸν καὶ φραγμένον χωρίον λαμβάνεται πάντοτε ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ χωρίου αὐτοῦ.*

Ἄσκησις. Νὰ ἀναπτύξετε τὰς σειρὰς τῆς Ἀσκήσεως 2,

1. Ἀπὸ τὰς ἡμιευθείας δηλαδὴ ἀπὸ τὸ z_0 ἐκλέγομεν μίαν ειδικὴν ἐξ αὐτῶν.

§ 17 εἰς δυναμοσειρὰς καὶ μὲ κέντρα $z_0 = +2$, $z_0 = 0$ διὰ τὴν πρώτην καὶ δευτέραν, ἀντιστοίχως.

§ 21 Τὸ Θεώρημα τῆς ταυτότητος διὰ Ἀναλυτικὰς συναρτήσεις.

Τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy καὶ τὸ ἀνάπτυγμα κατὰ Taylor μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως (τὸ ὁποῖον εὕρομεν μέσῳ τοῦ θεωρήματος τοῦ Cauchy) μᾶς ὡδήγησεν εἰς πολὺ σημαντικὰ συμπεράσματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα φανερώνεται ἡ ἀληθὴς φύσις τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων. Ἀρχίζομεν μὲ μερικὰς προκαταρκτικὰς παρατηρήσεις πρὸς αὐτὴν τὴν κατεύθυνσιν.

Εἰς τὴν Παράγραφον 5 ἐδόθη ἡ πλέον γενικὴ ἔννοια τῆς συναρτήσεως. Ἡ ἔννοια αὐτὴ περιλαμβάνει τόσον γενικὰς συναρτήσεις ὥστε εἶναι ἀδύνατον νὰ συναγάγωμεν ὁ,τιδήποτε περὶ τῆς συμπεριφορᾶς μιᾶς τέτοιας συναρτήσεως εἰς ἕνα μέρος τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της $\mathbf{M}$ ἀπὸ τὴν συμπεριφοράν της εἰς ἕνα ἄλλο μέρος τοῦ πεδίου αὐτοῦ. Διὰ παράδειγμα, ἔστω $\mathbf{M}$ ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον καὶ $f(z) = 3i$ διὰ $|z| \leqslant 1$. Τίποτε δὲν ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν περὶ τῶν τιμῶν τῆς $f(z)$ διὰ $|z| > 1$· διότι εἰς τὸν τόπον τοῦτον ἠμποροῦμεν νὰ προσδώσωμεν τιμὰς εἰς τὴν συνάρτησιν σύμφωνα μὲ ἕνα τελείως ἄλλον ὁριστικὸν αὐτῶν κανόνα (πρβ. τὸ παράδειγμα τῆς σελ. 26). Ἡ κατάστασις ἀλλάζει ἐὰν ἀπαιτηθῇ ἀπὸ τὴν $f(z)$ νὰ εἶναι συνεχής· διότι, διὰ τὸ ἴδιον παράδειγμα, θὰ πρέπει ἡ $f(z)$ νὰ ἔχῃ τιμὰς κειμένας πλησίον τοῦ $3i$ διὰ σημεῖα z πλησίον τοῦ μοναδιαίου κύκλου. Ὅπως βλέπομεν, ἡ συνθήκη συνεχείας ἐπιβάλλει περιορισμοὺς εἰς τὴν συνάρτησιν· ἐπειδὴ εἰσάγει ὡρισμένην συνοχὴν μεταξὺ τῶν τιμῶν της, κάποιο εἶδος συμφυοῦς διαδοχικότητος μεταξὺ αὐτῶν. Ἡ συνοχὴ αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ εἴπωμεν κάτι διὰ τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως εἰς ἕνα μέρος τοῦ z- ἐπιπέδου ὅταν γνωρίζωμεν τὰς τιμάς της εἰς ἕνα ἄλλο ἀλλὰ *προσκείμενον* εἰς τὸ πρῶτον μέρος. Καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ἐσωτερικὸς αὐτὸς σύνδεσμος γίνεται ἰσχυρότερος διὰ περιορισμοῦ τῆς συναρτήσεως εἰς περισσότερον εἰδικὰς κλάσεις. Ἕνα παράδειγμα ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν συναρτήσεων μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς x θὰ διαφωτίσῃ τὰ πράγματα.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἔρευνά μας ἀφορᾶ εἰς τὴν κλάσιν τῶν ἀκεραίων ρητῶν συναρτήσεων (πολυωνύμων) τρίτου βαθμοῦ (τῶν καμπύλων δηλαδὴ τρίτου βαθμοῦ):

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \ (a_\nu\,,\ x,\ y \text{ πραγματικοὶ ἀριθμοί}).$$

Μία τέτοια συνάρτησις ὁρίζεται τελείως διὰ πολὺ ὀλίγων συνθηκῶν (ἢ ἐπιταγμάτων). Ἐὰν π.χ., γνωρίζωμεν ὅτι ἡ καμπύλη διέρχεται διὰ τεσσάρων εἰδικῶν καὶ διαφορετικῶν μεταξύ των σημείων (ἂν δηλαδὴ γνωρίζωμεν τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως διὰ τέσσαρας διαφορετικὰς τιμὰς τοῦ x), ἡ συνάρτησις καθορίζεται πλήρως, ὁσονδήποτε πλησίον ἀλλήλων καὶ ἂν κεῖνται τὰ σημεῖα αὐτά. Τὴν συμπεριφορὰν τότε τῆς καμπύλης, μαζὶ μὲ ὅλας τὰς ὁμαλὰς ἢ ἀνωμάλους ἰδιομορφίας της, εἰς ὁλόκληρον τὸ xy-ἐπίπεδον ἠμποροῦμεν νὰ συναγάγωμεν ἀπὸ τὴν συμπεριφορὰν τῆς συναρτήσεως εἰς ἕνα αὐθαιρέτως μικρὸν διάστημα. Ἡ κλάσις τῶν πολυωνύμων τρίτου βαθμοῦ ἐμφανίζει ἕνα πολὺ ἰσχυρὸν ἐσωτερικὸν σύνδεσμον, μέσῳ τοῦ ὁποίου συνδέονται μεταξύ των αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως. Ἐπειδὴ δὲ τὰ φυσικὰ φαινόμενα καθεαυτὰ παρουσιάζουν σύμφυτον κανονικότητα, εἶναι φυσικὸν νὰ ἀναμένωμεν ὅτι αἱ συναρτήσεις μιᾶς τέτοιας ἐσωτερικῆς δομῆς θὰ πρέπει νὰ παίζουν ὅλως ἰδιαίτερον ρόλον εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν.

Κατόπιν τούτων, εἶναι ἐξόχως ἀξιοσημείωτον τὸ γεγονὸς ὅτι μέσῳ τοῦ *ἁπλοῦ* ἐπιτάγματος τῆς διαφορισιμότητος — τοῦ *ἐπιτάγματος*, δηλαδή, *ἀναλυτικότητος* — ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν πλέον γενικῶν συναρτήσεων μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς ἐξελέγη μία κλάσις συναρτήσεων ἡ ὁποία νὰ ἔχη τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

Ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος, ἡ κλάσις αὐτὴ νὰ εἶναι ἐπίσης πολὺ γενικὴ καὶ νὰ περιλαμβάνη ὅλας σχεδὸν τὰς συναρτήσεις ποὺ ἐμφανίζονται εἰς τὰς ἐφαρμογάς. Ἀπὸ τὸ ἄλλο δέ, μία συνάρτησις ἀνήκουσα εἰς τὴν κλάσιν αὐτὴν νὰ παρουσιάζη ἕνα τόσον ἰσχυρὸν ἐσωτερικὸν σύνδεσμον ὥστε, ἀπὸ τὴν συμπεριφοράν της ἐντὸς ἑνὸς χωρίου ὁσονδήποτε μικροῦ τοῦ z-ἐπιπέδου, νὰ γίνεται δυνατὴ ἡ συναγωγὴ τῆς συμπεριφορᾶς της εἰς ὁλόκληρον τὸ ἀπομένον μέρος τοῦ ἐπιπέδου. Μολονότι προτρέχοντες, ἀναφέρομεν ἐδῶ τὸ πλέον σπουδαῖον εὕρημα ἀπὸ τὴν ἔρευναν τῶν ἐν λόγῳ συναρτήσεων, εἰς τὴν ἀπόδειξιν δηλαδὴ τοῦ ὅτι μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις, μὲ ὅλας της τὰς ὁμαλὰς καὶ ἀνωμάλους ἰδιότητας, ὁρίζεται τελείως ὅταν εἶναι γνωσταὶ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως κατὰ μῆκος ἑνὸς μικροῦ τόξου. Μὲ ἄλλας λέξεις, δύο ἀναλυτικαὶ συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν τὰς αὐτὰς τιμὰς κατὰ μῆκος ἑνὸς τόξου, ταυτίζονται τελείως.

Ἕνα πρῶτον θεώρημα πρὸς αὐτὴν τὴν κατεύθυνσιν εἶναι ὁ τύπος τοῦ Cauchy (πρβ. τὰ σχόλια εἰς τὴν σελίδα 69), ὁ ὁποῖος μᾶς παρέχει τὴν ἱκανότητα νὰ συναγάγωμεν τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς ἁπλοῦ κλειστοῦ δρόμου C ἀπὸ τὰς τιμάς της εἰς τὰ σημεῖα τοῦ συνόρου. Ἕνα δεύτερον συμπέρασμα τοῦ ἰδίου εἴδους εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἀναφέραμεν, σχετικῶς μὲ τὸ θεώρημα ἐπὶ τοῦ ἀναπτύγματος, ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ ἀληθοῦς κύκλου συγκλίσεως μιᾶς δυναμοσειρᾶς. Καὶ πράγματι ἐθεωρήσαμεν ἐκεῖ τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα οὐδὲ κὰν ἀνήκουν εἰς τὸ χωρίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως.

Μὲ βάσιν τὸ θεώρημα ἐπὶ τοῦ ἀναπτύγματος, εἴμεθα εἰς θέσιν τώρα νὰ φθάσωμεν εἰς ἕνα συμπέρασμα τὸ ὁποῖον θὰ μᾶς ὁδηγήση εἰς τὸ θεώρημα ποὺ ἀναφέραμεν καὶ πέραν μάλιστα ἀπὸ αὐτό. Ἕνεκα δὲ τῆς μεγάλης σπουδαιότητος τῆς προτάσεως ταύτης διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων, θεωρεῖται αὐτὴ ὡς ἡ πλέον θεμελιώδης μετὰ τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα.

Τὸ θεώρημα τῆς ταυτότητος διὰ συναρτήσεις ἀναλυτικάς. *Ἐὰν δύο συναρτήσεις εἶναι ἀναλυτικαὶ εἰς ἕνα χωρίον* **T** *καὶ ἐὰν ταυτίζωνται*

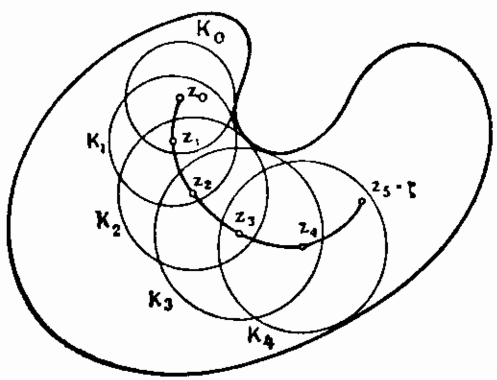
ἢ α) εἰς μίαν περιοχὴν ὁσονδήποτε μικρὰν ἑνὸς σημείου z_0 *τοῦ* **T**,

ἢ β) κατὰ μῆκος ἑνὸς τμήματος δρόμου, ὁσονδήποτε μικροῦ καὶ τερματιζομένου εἰς τὸ z_0,

ἢ γ) μόνον εἰς ἕνα ἄπειρον πλῆθος σημείων διαφορετικῶν μεταξύ των καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ z_0 *ὡς ὁρικὸν σημεῖον,* *αἱ δύο αὐταὶ συναρτήσεις θὰ εἶναι ἴσαι*[1] *εἰς κάθε σημεῖον τοῦ* **T**.

᾿Απόδειξις: ῍Ας παραστήσωμεν τὰς δύο συναρτήσεις μὲ $f_1(z)$ καὶ $f_2(z)$ καὶ ἔστω K_0 ὁ μέγιστος κύκλος μὲ κέντρον z_0 καὶ μὲ σημεῖα κείμενα ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ **T**. ῞Ενεκα τοῦ θεωρήματος διὰ τὸ ἀνάπτυγμα, καὶ αἱ δύο συναρτήσεις ἠμποροῦν νὰ ἀναπτυχθοῦν εἰς δυναμοσειρὰς αἱ ὁποῖαι νὰ συγκλίνουν τουλάχιστον εἰς τὸν K_0. ῞Ενεκα δὲ τῶν ὑποθέσεών μας, τὸ θεώρημα τῆς ταυτότητος διὰ δυναμοσειρὰς συνεπάγεται τὴν ταυτότητα τῶν δύο ἀναπτυγμάτων. Εἶναι ἄρα $f_1(z)=f_2(z)$ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ K_0.

῎Εστω τώρα ζ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ **T**. Θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι καὶ εἰς τὸ σημεῖον ζ θὰ εἶναι $f_1(\zeta)=f_2(\zeta)$. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, συνδέομεν τὰ z_0 καὶ ζ δι' ἑνὸς δρόμου k, ὁ ὁποῖος κεῖται τελείως ἐντὸς τοῦ **T** (βλ. Σχῆμα 5), καὶ ἔστω



Σχῆμα 5

ρ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὴν ὕπαρξιν ἀπεδείξαμεν εἰς τὸ Λῆμμα 3, § 4. Διαιροῦμεν κατόπιν τὸν δρόμον k μὲ οἱονδήποτε τρόπον (μέσῳ σημείων $z_0, z_1 \ldots z_{m-1}, z_m=\zeta$) εἰς τμήματα δρόμου μὲ μήκη μικρότερα ὅλα ἀπὸ ρ καὶ γράφομεν περὶ τὸ καθένα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ z_ν τὸν μέγιστον κύκλον k_ν ὁ ὁποῖος κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ **T**. ᾿Επειδὴ αἱ ἀκτῖνες ὅλων

[1] Σ.Μ. Δηλαδή, θὰ λαμβάνουν τὴν αὐτὴν τιμήν.

τῶν περιφερειῶν αὐτῶν εἶναι μεγαλύτεραι ἢ ἴσαι πρὸς ρ, ἡ κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς θὰ περιέχῃ τὸ κέντρον τῆς ἑπομένης της. Διὰ τὸ σύνολον τῶν κύκλων τούτων λέγομεν ὅτι ἀποτελεῖ αὐτὸ μίαν *ἅλυσον κύκλων*.

᾿Αναπτύσσομεν τώρα τὰς συναρτήσεις $f_1(z)$ καὶ $f_2(z)$ εἰς δυναμοσειρὰς περὶ ἕκαστον τῶν κέντρων z_ν, ὡς ἐκάμαμεν προηγουμένως διὰ $\nu=0$: Διὰ τὴν κάθε περίπτωσιν, τὰ ἀναπτύγματα αὐτὰ συγκλίνουν τουλάχιστον εἰς τὸν κύκλον K_ν καί, ὅπως εἴδομεν προηγουμένως, ταυτίζονται εἰς τὸν κύκλον K_0· ταυτίζονται συνεπῶς αἱ $f_1(z)$ καὶ $f_2(z)$ εἰς τὸ σημεῖον z_1 (κείμενον ἐντὸς τοῦ K_0) καθὼς καὶ εἰς κάποιαν *περιοχὴν* τοῦ z_1. ᾿Αλλά, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς ταυτότητος δυναμοσειρῶν, τὰ δύο ἀναπτύγματα ταυτίζονται εἰς τὸν K_1 καὶ ἑπομένως αἱ δύο συναρτήσεις θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι *εἰς* τὸ σημεῖον z_2 *καὶ* εἰς μίαν περιοχὴν περὶ τὸ z_2· θὰ ἔχουν δηλαδὴ τὰ ἴδια ἀναπτύγματα εἰς τὸν k_2, κλπ. Τὸ βῆμα m-τάξεως κατὰ τοὺς συλλογισμοὺς αὐτοὺς σημαίνει ὅτι: αἱ δύο συναρτήσεις ταυτίζονται εἰς τὸ $z_m=\zeta$ (καὶ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ ζ). Συμπληρώνεται ἔτσι ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος.

῾Η μέθοδος τὴν ὁποίαν ἐχρησιμοποιήσαμεν διὰ τὴν ἀπόδειξιν καλεῖται **μέθοδος τῆς ἁλύσεως κύκλων**, ὅπως ἄλλωστε καὶ δικαιολογεῖται ἡ ὀνομασία αὐτὴ ἐκ τοῦ σχήματος.

Εἰς τὸ κεφάλαιον ποὺ ἀκολουθεῖ θὰ ἀσχοληθοῦμεν περισσότερον λεπτομερῶς μὲ τὰς πλέον ἐνδιαφερούσας συνεπείας τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος. ᾿Εδῶ, θὰ θεωρήσωμεν μόνον μερικὰ πολὺ ἁπλᾶ πορίσματά του, ἀφοῦ πρῶτα προτάξωμεν, διὰ τὴν περισσότερον σκόπιμον διατύπωσίν τους, τὸν ἑπόμενον ὁρισμόν.

῾Ορισμός. *῞Ενα σημεῖον z_0 ἑνὸς χωρίου ἀναλυτικότητος τῆς συναρτήσεως $f(z)$ ὀνομάζεται* **ρίζα** *τῆς συναρτήσεως ἐὰν $f(z_0)=0$. Γενικῶς, ἐὰν $f(z_0)=a$, τὸ z_0 λέγεται ἕνα a-σημεῖον τῆς $f(z)$.*

Θὰ ἔχωμεν τότε:

Θεώρημα 1. *῎Εστω $f(z)$ μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἰς τὸ* **T** *καὶ a τυχὼν ἀριθμός. Θὰ ἔχῃ τότε ἡ $f(z)$ τὸ πολὺ πεπερα-*

σμένον πλῆθος ἀπὸ α-σημεῖα εἰς κάθε κλειστὸν ὑποχωρίον **T**′ *τοῦ* **T**, *ἐκτὸς ἂν ἡ* $f(z)$ *εἶναι πανταχοῦ ἴση μὲ α.*[1]

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ ἔχει ἄπειρον πλῆθος ἀπὸ α-σημεῖα εἰς τὸ **T**′. Θὰ ὑπάρχει τότε ἕνα ὁρικὸν σημεῖον z_0 διὰ τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ τὸ ὁποῖον θὰ κεῖται εἰς τὸ **T**′, ἄρα καὶ εἰς τὸ **T**. Ἀλλ' ἡ συνάρτησις ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς α εἰς *κάθε* σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου εἶναι βεβαίως πανταχοῦ ἀναλυτική, συνεπῶς καὶ εἰς τὸ **T**· θὰ συνέπιπτε ἄρα (κατὰ τὸ θεώρημα τῆς ταυτότητος) ἡ $f(z)$ πρὸς τὴν συνάρτησιν ταύτην.

Εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἠμποροῦμεν νὰ δώσωμεν καὶ τὴν ἑξῆς διατύπωσιν, ἡ ὁποία προσφέρεται συχνὰ περισσότερον εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

Θεώρημα 2. *Ἐὰν ἡ* $f(z)$ *εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς* z_0, *ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν ἕνα τόσον μικρὸν κύκλον περὶ τὸ* z_0, *ὥστε εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἡ* $f(z)$ *οὐδέποτε νὰ λαμβάνη τὴν τιμὴν* $f(z_0)$*— ἐκτὸς ἂν ἡ* $f(z)$ *ἔχη πανταχοῦ τὴν αὐτὴν τιμὴν* $f(z_0)$.

Θεώρημα 3. *Ἐὰν αἱ συναρτήσεις* $f_1(z)$ *καὶ* $f_2(z)$ *εἶναι ἀναλυτικαὶ εἰς τὸ* **T** *καὶ τόσον αὐταὶ ὅσον καὶ ὅλαι αἱ παράγωγοί των ταυτίζωνται εἰς ἕνα καὶ μόνον σημεῖον* z_0 *τοῦ* **T**, *αἱ συναρτήσεις αὐταὶ θὰ ταυτίζωνται.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν αἱ ἐν λόγῳ συναρτήσεις ἀναπτυχθοῦν εἰς δυναμοσειρὰς περὶ τὸ κέντρον z_0, λαμβάνομεν ταυτιζομένας σειράς· διότι οἱ συντελεσταί των, μὲ ἐξαίρεσιν ἴσως ἀριθμητικῶν παραγόντων, θὰ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι παράγωγοι τῶν συναρτήσεων εἰς τὸ z_0 καὶ ἴσαι, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. Κατὰ τὸ θεώρημα, ἄρα, τῆς ταυτότητος, αἱ συναρτήσεις f_1 καὶ f_2 θὰ εἶναι ἴσαι πανταχοῦ εἰς τὸ **T**.

Θεώρημα 4. *Ἐὰν τὸ ὁμαλὸν σημεῖον* z_0 *εἶναι ἕνα α-σημεῖον τῆς μὴ σταθερᾶς συναρτήσεως* $f(z)$, *θὰ ὑπάρχη πάντοτε ἕνας ὡρισμένος θετικὸς ἀκέραιος α τέτοιος, ὥστε ἡ συνάρτησις*

$$f_1(z) = \frac{f(z) - a}{(z - z_0)^{\alpha}}$$

νὰ εἶναι δυνατόν, δι' ὅλα τὰ διαφορετικὰ ἀπὸ τὸ z_0 *σημεῖα κάποιας περιοχῆς τοῦ* z_0, *νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς δυναμοσειράν,*

$$f_1(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots,$$

μὲ τὸν πρῶτον συντελεστήν της διάφορον ἀπὸ τὸ μηδέν.

Ἀπόδειξις: Εἰς τὸ ἀνάπτυγμα $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ τοῦ $f(z)$ περὶ τὸ κέντρον z_0, $a_0 = a$ καὶ ἕνας τουλάχιστον ἀπὸ τοὺς ἀκολουθοῦντας συντελεστὰς δὲν εἶναι τὸ μηδέν. Ἂν a_α εἶναι ὁ πρῶτος ἀπὸ τοὺς συντελεστὰς αὐτούς, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$f(z) - a = a_\alpha(z - z_0)^\alpha + a_{\alpha+1}(z - z_0)^{\alpha+1} + \cdots, \quad (a_\alpha \neq 0),$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν διαβάζεται ἀμέσως ὁ ἰσχυρισμός μας. Φυσικὰ $b_0 = a_\alpha$ καὶ $b_\nu = a_{\alpha+\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Ὁ ἀριθμὸς α λέγεται ἡ τάξις τοῦ α-σημείου z_0. Κατὰ ταῦτα, κάθε σημεῖον ἔχει μίαν ὡρισμένην (θετικὴν καὶ ἀκεραίαν) τάξιν.[1]

Ἀσκήσεις 1. Ἐὰν ὁ ἁπλοῦς κλειστὸς δρόμος C καὶ τὸ ἐσωτερικόν του κεῖται ἐντὸς ἑνὸς χωρίου ἀναλυτικότητος τῆς $f(z)$, ὁ δρόμος C θὰ ἐγκλείῃ *πεπερασμένον* μόνον πλῆθος ἀπὸ ρίζας (γενικώτερον: ἀπὸ α-σημεῖα) τῆς $f(z)$.

2. Ἡ συνάρτησις $\sin \dfrac{1}{1-z}$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ μοναδιαίου κύκλου καὶ ἔχει ἐκεῖ *ἄπειρον πλῆθος* ἀπὸ ρίζας: $1 - \dfrac{1}{k\pi}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὴν

---

1. Ἕνα ὁρικὸν σημεῖον ἑνὸς συνόλου ἀπὸ α-σημεῖα δὲν κεῖται ποτὲ εἰς μίαν περιοχὴν ἀναλυτικότητος καὶ ἀναγκαίως θὰ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον τῆς $f(z)$ — ἐκτὸς ἂν ἡ $f(z)$ εἶναι πανταχοῦ ἴση μὲ α. Ἤ: ἕνα ἄπειρον πλῆθος ἀπὸ α-σημεῖα δὲν ἠμπορεῖ νὰ κεῖται εἰς κάθε περιοχὴν ἑνὸς ὁμαλοῦ σημείου — ἐκτὸς ἂν ἡ $f(z)$ εἶναι παντοῦ ἴση μὲ α.

1. Ἐὰν $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ z_0 καὶ $f(z_0) \neq a$, εἶναι συνήθως πρόσφορον νὰ ὀνομάζεται τὸ σημεῖον z_0 α-σημεῖον τάξεως μηδενικῆς. Σύμφωνα μὲ τὴν παραδοχὴν αὐτήν, μία ρίζα τάξεως μηδενικῆς εἶναι ἕνα ὁμαλὸν σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ συνάρτησις δὲν μηδενίζεται.

$\frac{1}{1-z} = k\pi$. Εὑρίσκεται τοῦτο μήπως εἰς ἀντίφασιν πρὸς τὸ Θεώρημα 1 ἢ τὴν Ἄσκησιν 1; Ἐξηγήσατε τὰ πράγματα.

3. Ἀναφορικῶς εἰς τὸ Θεώρημα 5 τῆς § 20, δείξατε ὅτι ἐὰν εἰς z_0, ἡ $|f(z)|$ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἐλάχιστον διάφορον ἀπὸ τὸ μηδέν, τότε τόσον τὸ $\mathbf{R}(f(z))$ ὅσον καὶ τὸ $\mathbf{I}(f(z))$ δὲν ἠμποροῦν νὰ ἔχουν οὔτε ἐλάχιστον οὔτε μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

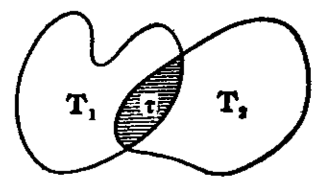
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΛΗΡΗΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 22. Ἡ ἀρχὴ τῆς ἀναλυτικῆς ἐπεκτάσεως

Αἱ θεωρήσεις μας εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἀπεκορυφώθησαν εἰς τὸ Θεώρημα ταυτότητος δι᾽ ἀναλυτικὰς συναρτήσεις: Ἐὰν δύο τέτοιες συναρτήσεις ταυτίζωνται εἰς τὴν περιοχὴν ἑνὸς σημείου (ἢ κατὰ μῆκος ἑνὸς μικροῦ τμήματος δρόμου ἢ δι᾽ ὡρισμένα μόνον ἄπειρα σημειοσύνολα), θὰ ταυτίζωνται τότε πλήρως. Ὅπως δὲ ὑπεδείξαμεν εἰς τὴν σελ. 98, τὸ θεώρημα τοῦτο συνεπάγεται τὸν πλέον ἰσχυρὸν ἐσωτερικὸν σύνδεσμον διὰ τὴν συνάρτησιν: Μία συνάρτησις ὁρίζεται πλήρως (ὁρίζεται, δηλαδή, ὁλόκληρον τὸ πεδίον τιμῶν της, μὲ ὅλας τὰς ὁμαλὰς καὶ ἀνωμάλους ἰδιότητάς της) διὰ τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει εἰς τὰ σημειοσύνολα αὐτά.

Θὰ ἐπεξεργασθοῦμεν τώρα ἀκόμα σαφέστερον τὰς ἰδιότητας τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων περὶ τῶν ὁποίων γίνεται λόγος ἐδῶ. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, ὑποθέτομεν ὅτι μᾶς ἐδόθησαν δύο συναρτήσεις $f_1(z)$ καὶ $f_2(z)$, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἡ πρώτη εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ χωρίον $\mathbf{T}_1$ καὶ ἡ δευτέρα εἰς τὸ χωρίον $\mathbf{T}_2$. Ὑποθέτομεν ἐπιπλέον ὅτι τὰ δύο αὐτὰ χωρία ἔχουν κοινὸν ἕνα, ὁσονδήποτε μικρόν, χωρίον τ καὶ *τοῦτο μόνον* (πρβ. Σχῆμα 6), καθὼς καὶ ὅτι $f_1(z) = f_2(z)$ πανταχοῦ εἰς τὸ τ.



Σχῆμα 6.

Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτάς, ἡ κάθε μία ἀπὸ τὰς συναρτήσεις f_1 καὶ f_2 προσδιορίζει τὴν ἄλλην κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον. Πράγματι, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα τῆς ταυτότητος, δὲν ὑπάρχει καμμία ἄλλη συνάρτησις ἐκτὸς ἀπὸ τὴν $f_1(z)$ ποὺ νὰ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ $\mathbf{T}_1$ καὶ νὰ λαμβάνῃ τὰς αὐτὰς τιμὰς εἰς τὸ τ. Προσδιορίζεται λοιπὸν τελείως ἡ $f_1(z)$ διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὸ τ [ἤ, πρᾶγμα ποὺ εἶναι τὸ ἴδιον: διὰ τῆς $f_2(z)$]. Καὶ ὁμοίως, ἡ $f_2(z)$ προσδιορίζεται τελείως διὰ τῆς $f_1(z)$.

Ἠμποροῦμεν, ἑπομένως, νὰ εἴπωμεν ὅτι ἐὰν δύο χωρία $\mathbf{T}_1$ καὶ $\mathbf{T}_2$ ἔχουν τὴν θέσιν τοῦ σχήματος 6 καὶ ὁρίζεται εἰς τὸ $\mathbf{T}_1$ μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις, τότε ἢ δὲν θὰ ὑπάρχῃ καμμία συνάρτησις ἢ *μία καὶ μόνον μία*, ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ $\mathbf{T}_2$ καὶ νὰ ταυτίζεται πρὸς τὴν f_1 εἰς τὸ τ. Ὅταν ὑπάρχῃ μία τέτοια συνάρτησις $f_2(z)$, ἡ συνάρτησις $f_1(z)$, ποὺ εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ $\mathbf{T}_1$, λέγεται *ἐπεκτάσιμος* πέραν τοῦ $\mathbf{T}_1$, εἰς τὸ χωρίον $\mathbf{T}_2$. Μετὰ δὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς $f_2(z)$, λέγομεν διὰ τὴν $f_1(z)$ ὅτι ***ἐπεξετάθη ἀναλυτικῶς*** εἰς τὸ χωρίον $\mathbf{T}_2$.

Εἶναι δέ, ἀφ' ἑτέρου, ἡ $f_1(z)$ ἡ ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις τῆς $f_2(z)$ ἐντὸς τοῦ χωρίου $\mathbf{T}_1$· διότι δὲν ἔχομεν πλέον δικαίωμα νὰ θεωροῦμεν τὰς f_1 καὶ f_2 ὡς διαφορετικὰς συναρτήσεις. Διὰ τὸν λόγον λοιπὸν αὐτόν, τοῦ πλήρους δηλαδὴ προσδιορισμοῦ τῆς μιᾶς διὰ τῆς ἄλλης συναρτήσεως, ἠμποροῦμεν νὰ θεωροῦμεν καὶ τὰς δύο αὐτὰς συναρτήσεις ὡς *μερικὰς παραστάσεις* ἢ «στοιχεῖα» μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς συναρτήσεως $F(z)$ καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ χωρίον τ—«τομὴν» τῶν $\mathbf{T}_1$ καὶ $\mathbf{T}_2$ χωρίων.

Ἕνα παράδειγμα θὰ καταστήσῃ σαφέστερα τὰ ἀνωτέρω. Ἄς εἶναι $\mathbf{T}_1$ ὁ μοναδιαῖος κύκλος $|z|<1$, $\mathbf{T}_2$ ὁ κύκλος μὲ ἀκτῖνα $\sqrt{2}$ καὶ κέντρον τὸ i, ὁ κύκλος δηλαδὴ $|z-i|<\sqrt{2}$. Οἱ κύκλοι αὐτοὶ ἔχουν κοινὸν ἕνα χωρίον τ, ὅπως φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ ἕνα σχῆμα. Εἰς τὸ $\mathbf{T}_1$ ἄς ἔχει δοθῇ ἡ $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Ὑπάρχει συνάρτησις ἀναλυτικὴ εἰς τὸ $\mathbf{T}_2$ καὶ ταυτιζομένη πρὸς τὴν $f_1(z)$ εἰς τὸ τ;

Ἂν ὑπάρχῃ μία τέτοια συνάρτησις, θὰ εἶναι αὐτὴ μία καὶ μόνον μία. Εἶναι ἐδῶ $f_2(z)=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$ ἡ ζητουμένη συνάρτησις· διότι συγκλίνει ἡ f_2 διὰ $\left|\frac{z-i}{1-i}\right|<1$, δηλαδὴ διὰ $|z-i|<\sqrt{2}$ καὶ φαίνεται ἀμέσως ὅτι αἱ τιμαὶ καὶ τῶν

δύο δυναμοσειρῶν εἶναι ἴσαι εἰς κάθε σημεῖον τοῦ τ. Τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ ὅτι τὰ ἀθροίσματα καὶ τῶν δύο αὐτῶν γεωμετρικῶν σειρῶν (προόδων) εἰς τοὺς ἀντιστοίχους κύκλους συγκλίσεώς των δίδονται εἰς κλειστὴν μορφὴν καὶ εἶναι δυνατὸν ἑπομένως νὰ συγκριθοῦν. (Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, τὰ ἀθροίσματα εἶναι ἴσα πρὸς $\frac{1}{1-z}$ εἰς τὸ τ).

Εἶναι λοιπὸν αἱ f_1 καὶ f_2 ἀναλυτικαὶ ἐπεκτάσεις ἡ μία τῆς ἄλλης, *στοιχεῖα* καὶ αἱ δύο μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς συναρτήσεως $F(z)$ καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὴν σύνθεσιν (ἕνωσιν) τουλάχιστον $\mathbf{T}$ τῶν χωρίων $\mathbf{T}_1$ καὶ $\mathbf{T}_2$.

Εἰς τὸ ἁπλοῦν αὐτὸ παράδειγμα δὲν ἐδυσκολεύθημεν νὰ εὕρωμεν τὴν συνάρτησιν $F(z)$ εἰς κλειστὴν μορφήν: $F(z)=\frac{1}{1-z}$. Ἐν γένει ὅμως, τοῦτο εἶναι τελείως ἀδύνατον. Πράγματι, εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, ἡ $f(z)$ ἠμπορεῖ νὰ ὑπολογισθῇ μόνον μέσῳ τῶν μερικῶν παραστάσεών της ἢ στοιχείων της. Κατὰ τὰ εἰς τὴν § 5 πάντως, ἡ $F(z)$ θὰ πρέπει νὰ θεωρῆται ὡς *μία* συνάρτησις διὰ τὴν ὁποίαν, τὸ *σύνολον* τῶν διαφόρων μερικῶν παραστάσεών της παρέχει τὸν κανόνα ὁρισμοῦ αὐτῆς.

Τὰ ἀνωτέρω, καὶ τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν τὴν καλουμένην **ἀρχὴν τῆς ἀναλυτικῆς ἐπεκτάσεως**, συνοψίζομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

Θεώρημα 1. *Ἄς εἶναι $f_1(z)$ μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις ὡρισμένη εἰς ἕνα χωρίον $\mathbf{T}_1$, καὶ $\mathbf{T}_2$ ἕνα ἄλλο χωρίον τὸ ὁποῖον ἔχει κοινὸν μετὰ τοῦ $\mathbf{T}_1$ ἕνα καὶ μόνον ἕνα ὑποχωρίον τ. Τότε, ἂν ὑπάρχῃ μία συνάρτησις $f_2(z)$, ἀναλυτικὴ εἰς τὸ $\mathbf{T}_2$ καὶ ταυτιζομένη μετὰ τῆς $f_1(z)$ εἰς τὸ τ, θὰ ὑπάρχῃ μία καὶ μόνον μία τέτοια συνάρτησις. Αἱ f_1 καὶ f_2 συναρτήσεις ὀνομάζονται ἀναλυτικαὶ ἐπεκτάσεις ἡ μία τῆς ἄλλης καὶ χρησιμεύουν ὡς μερικαὶ παραστάσεις ἢ στοιχεῖα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς συναρτήσεως $F(z)$, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ αὐτὰς καὶ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ χωρίον τ — τὴν «τομὴν» τῶν $\mathbf{T}_1$ καὶ $\mathbf{T}_2$ χωρίων.*

Ἐγείρονται τώρα τὰ ἑξῆς ζητήματα:

1) Ἐὰν μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις f_1 εἶναι ὡρισμένη εἰς

ἕνα πρῶτον χωρίον $\mathbf{T}_1$ (π.χ. μία δυναμοσειρὰ εἰς τὸν κύκλον συγκλίσεώς της), πῶς ἠμποροῦμεν νὰ γνωρίσωμεν ἐὰν ἡ f_1 εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπεκταθῇ εἰς ἕνα χωρίον $\mathbf{T}_2$—κατὰ τὴν ἔννοιαν ποὺ ἐξεθέσαμεν ἀνωτέρω—καί πῶς ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπέκτασιν ταύτην $f_2(z)$;

2) Ὑπάρχουν χωρία $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_4$, . . . , τὸ καθένα ἐκ τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ ἕνα καὶ μόνον ὑποχωρίον κοινὸν μετὰ τοῦ προηγουμένου του, καθὼς καὶ συναρτήσεις $f_3(z)$, $f_4(z)$ . . . ποὺ νὰ ὁρίζωνται εἰς αὐτά, ὡς ἀνωτέρω καὶ ἀντιστοίχως, καὶ τέτοιες ὥστε ἡ καθεμία ἀπὸ αὐτὰς νὰ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις τῆς προηγουμένης της;

Ἂν τοῦτο συμβαίνῃ, ὅλαι τότε αἱ συναρτήσεις f_3, f_4, . . . , ὁρίζονται κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον ἀπὸ τὴν f_1 καὶ θὰ πρέπει νὰ θεωροῦνται ὡς στοιχεῖα *μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς* συναρτήσεως.

3) Ἐὰν δοθῇ ἕνα στοιχεῖον μιᾶς συναρτήσεως, πῶς εὑρίσκονται ὅλα τὰ ἄλλα δυνατὰ στοιχεῖα, ὅλαι αἱ ἐπεκτάσεις εἰς ἐπίκοινα χωρία;

Τὸ περιληπτικὸν καὶ φαινομενικῶς πολὺ δύσκολον πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχεται μίαν πολὺ ἁπλῆν λύσιν, θεωρητικῶς τουλάχιστον.

Πρὶν ἐκθέσωμεν τὴν λύσιν αὐτὴν εἰς τὴν § 24, ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἀναλυτικὴν ἐπέκτασιν ἀπὸ μιᾶς κάπως διαφορετικῆς ἀπόψεως. Εἰς τὰ προηγούμενα ἐχρησιμοποιήσαμεν τὸ δεδομένον, τὸ ὁποῖον ἐπορίσθημεν ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ ἀναπτύγματος, ὅτι μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἶναι ἤδη ὡρισμένη ἀπὸ τὰς τιμὰς τὰς ὁποίας λαμβάνει εἰς τὰ σημεῖα ἑνὸς μικροῦ ὑποχωρίου· πράγματι, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὰς τιμάς της κατὰ μῆκος μόνον ἑνὸς μικροῦ τμήματος δρόμου. Κατόπιν τούτου, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐδόθη ἕνα τμῆμα k δρόμου εἰς τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ κάθε σημεῖον z τοῦ ὁποίου ἀντιστοιχίζεται μία τιμὴ $\varphi(z)$ μιᾶς συναρτήσεως. Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν ἕνα τυχὸν χωρίον $\mathbf{T}$ ποὺ νὰ περιέχῃ τὸ k, ἀντιμετωπίζομεν τὴν ἑξῆς ἀποκλειστικὴν διάζευξιν (ἢ «διαμοιβήν»): εἴτε *δὲν ὑπάρχει καμμία συνάρτησις* $f(z)$ ἡ ὁποία νὰ ταυτίζεται μὲ τὴν $\varphi(z)$ κατὰ μῆκος τοῦ k καὶ νὰ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ $\mathbf{T}$, εἴτε ὑπάρχει *μία καὶ μόνη* τέτοια συνάρτησις· ἡ συνάρτησις αὐτὴ *ὁρίζεται μὲ ἕνα καὶ μόνο τρόπον* διὰ τῆς $\varphi(z)$ κατὰ μῆκος τοῦ δρόμου k καὶ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ $\mathbf{T}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις ἡ ὁποία ὡρίσθη κατὰ μῆκος τοῦ k ἀνεπτύχθη ἀναλυτικῶς εἰς τὸ χωρίον $\mathbf{T}$.

Εἰδικῶς δέ, ἂν k εἶναι ἕνα τμῆμα τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος, τὸ διάστημα λ.χ. $x_0 \leqslant x \leqslant X$, καὶ αἱ συναρτησιακαὶ τιμαὶ (ὄχι ἀπαραιτήτως πραγματικαὶ) αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ τμήματος τούτου παρασταθοῦν διὰ $\varphi(x)$, θὰ πρόκειται τότε περὶ ἀναλυτικῆς ἐπεκτάσεως μιᾶς (πραγματικῆς ἢ μιγαδικῆς) συναρτήσεως τῆς *πραγματικῆς* μεταβλητῆς x. Ἐὰν δὲ κατορθώσωμεν νὰ ἔχωμεν τὴν ἐπέκτασιν αὐτήν, θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ $\varphi(x)$ ἐπεξετάθη εἰς τὸ «μιγαδικὸν πεδίον». Διὰ τὴν εἰδικὴν αὐτὴν περίπτωσιν, ἠμποροῦμεν νὰ διατυπώσωμεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Θεώρημα 2. *Ἐὰν εἶναι πάντως δυνατὴ ἡ ἐπέκτασις μιᾶς συναρτήσεως μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς x εἰς τὸ μιγαδικὸν πεδίον, τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον.*

Αἱ ἀκολουθοῦσαι παρατηρήσεις θὰ καταστήσουν ἀκόμη περισσότερον ἐναργῆ τὸν ἰσχυρὸν ἐσωτερικὸν σύνδεσμον μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως.

Ἂς εἶναι k τὸ πραγματικὸν τμῆμα $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, χωρίον $\mathbf{T}$ ὁ μοναδιαῖος κύκλος ποὺ περιέχει τὸ k καὶ $\varphi(x)$ μία συνάρτησις ὡρισμένη εἰς τὸ k. Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τὴν $\varphi(x)$ ἐπὶ τοῦ ἡμίσεος μόνον τοῦ τμήματος: $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$, τότε, κατὰ τὸ ἀνωτέρω Θεώρημα 1, αἱ συναρτησιακαὶ τιμαὶ τῆς $\varphi(x)$ καθορίζουν ἤδη ἐὰν εἶναι ἢ δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπέκτασις τῆς $\varphi(x)$ εἰς τὸν μοναδιαῖον κύκλον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, αἱ τιμαὶ τῆς $\varphi(x)$ εἰς τὸ ἄλλο ἥμισυ τοῦ τμήματος, δηλ. εἰς τό: $\frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}$, *εἶναι ἤδη καθωρισμέναι διὰ τῶν τιμῶν της εἰς τὸ πρῶτον ἥμισυ.* Μὲ ἄλλες λέξεις, δὲν ἔχομεν *καμμίαν* ἐλευθερίαν πλέον ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴν τῶν τιμῶν τῆς $\varphi(x)$ εἰς τὸ δεύτερον ἥμισυ, ἐὰν δὲν θέλωμεν νὰ καταστῇ ἡ ἐπεκτασιμότης αὐτὴ ἀδύνατος. Φανερὸν εἶναι ὅτι τοὺς συλλογισμοὺς αὐτοὺς ἠμποροῦμεν νὰ ἐπαναλάβωμεν διὰ τὸ διάστημα $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$, κλπ.

Κατὰ ταῦτα, ἡ ἐλευθερία ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴν τῶν τιμῶν τῆς $\varphi(x)$, μολονότι ὄχι τελείως ἀπατηλή, εἶναι ὁπωσδήποτε περιορισμένη δι' ἕνα πεπερασμένον πλῆθος σημείων — ἀφοῦ, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς ταυτότητος, ἡ δυνατότης ἐπεκτάσεως *ἔχει κριθῆ* ἤδη διὰ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἰς ἕνα ἄπειρον πλῆθος σημείων.

Ἄσκησις. Ἔστω ὅτι ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $F(x)$ ἔχει ὁρισμὸν $F(x) = +\sqrt{x^2}$ δι' ὅλους τοὺς πραγματικοὺς x. Εἶναι ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἐπεκτάσιμος εἰς τὸ μιγαδικὸν πεδίον;

§ 23. Αἱ στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τελευταίου θεωρήματος, εἴμεθα εἰς θέσιν τώρα νὰ ἐρευνήσωμεν διὰ τὸ δυνατὸν ἢ τὸ ἀδύνατον τῆς ἐπεκτάσεως εἰς τὸ μιγαδικὸν πεδίον τῶν περισσότερον γνωστῶν μας συναρτήσεων μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς x καί, εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, νὰ διαγνώσωμεν τὸν τρόπον συγκροτήσεως τῆς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως ἡ ὁποία μᾶς δίδει τὴν ἐπέκτασιν αὐτήν.

1. *Αἱ ῥηταὶ συναρτήσεις.* Ἐὰν δοθῇ

$$\varphi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k}, \qquad (a_\nu,\ b_\nu \text{ μιγαδικοί}),$$

βλέπομεν ἀμέσως ὅτι ἡ $\varphi(x)$ εἶναι ἐπεκτάσιμος καὶ ὅτι

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k}$$

εἶναι ἡ συνάρτησις ποὺ ἐπεκτείνει τὴν $\varphi(x)$ εἰς τὸ μιγαδικὸν πεδίον. Ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ μιγαδικὸν πεδίον, μὲ ἐξαίρεσιν ἐκείνων τῶν σημείων τὰ ὁποῖα μηδενίζουν τὸν παρονομαστήν. (Εἰς τὴν § 28, Θεώρημα 3, θὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν k τὸ πολὺ τέτοια σημεῖα).

2. e^z, $\sin z$, $\cos z$. Ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις e^x καὶ αἱ

τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις $\sin x$ καὶ $\cos x$ ἠμποροῦν νὰ ὁρισθοῦν διὰ τῶν σειρῶν

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Μὲ ἁπλῆν ἀντικατάστασιν τοῦ x διὰ τοῦ z, ἡ κάθε μία ἀπὸ τὰς προκυπτούσας σειρὰς

$$f_1(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$f_2(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$f_3(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

εἶναι δυναμοσειρὰ μὲ $z_0 = 0$, $r = \infty$ καὶ παριστάνει μίαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν εἰς ὁλόκληρον τὸ z-ἐπίπεδον. Καὶ ἐπειδὴ αἱ συναρτήσεις αὐταὶ ταυτίζονται μὲ τὰς e^x, $\sin x$ καὶ $\cos x$, ἀντιστοίχως, διὰ $z = x$, συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι αἱ ἐπεκτάσεις τῶν συναρτήσεων τούτων εἰς τὸ μιγαδικὸν πεδίον. Διὰ τοὺς λόγους αὐτούς, ἡ $f_1(z)$ ὀνομάζεται ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις καὶ σημειώνεται e^z· ὁμοίως, οἱ συμβολισμοὶ $\sin z$ καὶ $\cos z$ χρησιμοποιοῦνται διὰ τὰς συναρτήσεις $f_2(z)$ καὶ $f_3(z)$, ἀντιστοίχως. Εἰς τὰς θεωρήσεις αἱ ὁποῖαι θὰ ἀκολουθήσουν, ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ἀναγνώστης εἶναι ἐξοικειωμένος μὲ τὰς ἰδιότητας τῶν ἀναλυτικῶν αὐτῶν συναρτήσεων (βλ. *Στοιχεῖα*, κεφ. 12). Ὅπως ὅμως θὰ ἴδωμεν ἀπὸ τὰς ἀναπτύξεις ποὺ θὰ ἀκολουθήσουν ἀπὸ τὸ Κεφάλαιον αὐτό, ὑπάρχει μία *ἀπόλυτος ἔλλειψις ἐλευθερίας* εἰς τὸν φαινομενικῶς αὐθαίρετον ὁρισμὸν τῶν e^z, $\sin z$ καὶ $\cos z$ διὰ μιγαδικὴν μεταβλητήν. Διότι δὲν ἠμπορούν νὰ ὁρισθοῦν ὡς ἀναλυτικαὶ συναρτήσεις τοῦ z παρὰ μόνον κατὰ τὸν τρόπον ποὺ ὑπεδείξαμεν ἀνωτέρω.

3. Αἱ ἐπεκτάσεις τῶν συναρτήσεων $\log x$, a^x, $\sqrt[m]{x}$. ὡς καὶ ἄλλων θὰ ἐξετασθοῦν ἀργότερον, μετὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ πλήρους ὁρισμοῦ τῆς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως. Τοῦτο γίνεται εἰς τὴν ἀκολουθοῦσαν παράγραφον.

§ 24. Ἐπέκτασις μέσῳ δυναμοσειρῶν καὶ πλήρης ὁρισμὸς τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων.

Ἐρχόμεθα τώρα εἰς τὰ ἐρωτήματα 1), 2) καὶ 3) τῆς § 22 καὶ εἰς τὰ ὁποῖα εἴμεθα εἰς θέσιν πλέον νὰ δώσωμεν ἀπαντήσεις χρησιμοποιοῦντες μίαν καὶ τὴν αὐτὴν μέθοδον.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f_1(z)$ εἶναι ὡρισμένη καὶ ἀναλυτικὴ εἰς τὸ $\mathbf{T}_1$. Ἂν z_1 εἶναι ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ $\mathbf{T}_1$, ἡ συνάρτησις εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς δυναμοσειρὰν περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς κέντρον. Θὰ ἔχωμεν

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(z - z_1)^n.$$

Εἶναι δυνατὸν τώρα νὰ παρουσιασθοῦν δύο διακεκριμέναι περιπτώσεις: ἡ ἀκτὶς συγκλίσεως τῆς σειρᾶς αὐτῆς νὰ εἶναι τὸ $+\infty$ ἢ νὰ ἔχῃ μίαν πεπερασμένην καὶ θετικὴν τιμήν.

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς $r_1 = \infty$, ἂν δηλαδὴ συγκλίνῃ ἡ σειρὰ διὰ κάθε z *(ἡ συγκλίνει πανταχοῦ)*, ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ἐρωτήματα ἠμπορεῖ νὰ δοθῇ ἀμέσως. Διότι *ὑπάρχει* τότε μία συνάρτησις ἡ ὁποία ἐπεκτείνει τὴν $f_1(z)$ πέραν τοῦ $\mathbf{T}_1$ καὶ ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον. Συνεπῶς, *δὲν ὑπάρχει ἄλλη* συνάρτησις ἡ ὁποία νὰ λαμβάνεται ἀπὸ τὴν $f_1(z)$ δι' ἐπεκτάσεως, ἐκτὸς αὐτῆς ποὺ ὡρίσθη μέσῳ τῆς πανταχοῦ συγκλινούσης δυναμοσειρᾶς ταύτης.

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ σειρὰ

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{2} - \frac{2}{3!}z^3 - \cdots - \frac{n-1}{n!}z^n - \cdots = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{n!}z^n,$$

(ἡ ὁποία συγκλίνει πανταχοῦ), καθὼς καὶ ἡ

$$h(z) = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

(ἡ ὁποία συγκλίνει μόνον διὰ $|z| < 1$) καὶ ἂς θέσωμεν

$$f_1(z) = g(z) \cdot h(z)$$

μὲ z σημεῖον τοῦ μοναδιαίου κύκλου. Διὰ τοῦ τύπου αὐτοῦ δὲν ὁρίζονται τιμαὶ τῆς $f_1(z)$ ἐκτὸς τοῦ μοναδιαίου κύκλου. Δι' ἀναπτύξεως ὅμως περὶ τὸ κέντρον $z_1 = 0$ εὑρίσκομεν, διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δυναμοσειρῶν[1],

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

καὶ τὸ ἀνάπτυγμα αὐτὸ παριστάνει τὴν συνάρτησιν $f_1(z)$ εἰς ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς συγκλίσεως r_1 τοῦ ἀναπτύγματος (1) ἔχει τιμὴν πεπερασμένην καὶ θετικήν, ἐκλέγομεν ἕνα σημεῖον z_2 εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου συγκλίσεως καὶ διάφορον ἀπὸ τὸ z_1. Ἠμποροῦμεν τώρα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἀνάπτυγμα περὶ τὸ κέντρον z_2:

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}(z - z_2)^n, \quad \text{ὅπου } a_n^{(2)} = \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(z_2).$$

Οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος ἠμποροῦν δηλ. νὰ ληφθοῦν ἀπ' εὐθείας ἀπὸ τὴν (1), κατὰ τὸ Θεώρημα 5 τῆς § 19. Εἶναι φανερὸν ὅτι

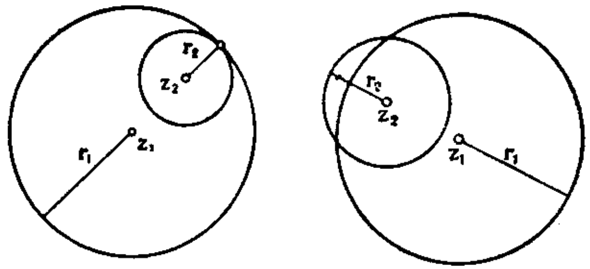
$$(3) \qquad r_2 \geqslant r_1 - |z_2 - z_1|$$

ὅπου r_2 ἡ ἀκτὶς συγκλίσεως τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ. Εἶναι δηλαδὴ ἡ r_2 τουλάχιστον ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου z_2 ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ πρώτου κύκλου $(z_1 : r_1)$.

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (3) ἰσχύει τὸ σύμβολον τῆς ἰσότητος (βλ. Σχῆμα 7α), ἡ (2) δίδει τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως εἰς τὰ σημεῖα μόνον ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ἐδόθη ἤδη ἡ τιμὴ αὐτὴ ὑπὸ τῆς (1)· τὸ ἀνάπτυγμα δηλ. (2) δὲν μᾶς παρέχει εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καμμίαν νέαν πληροφορίαν ἀπ' εὐθείας. Μᾶς δείχνει ὅμως ὅτι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, ζ, τῶν δύο περιφερειῶν

1. Εἶναι $1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} \cdots - \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{k!}$, $(k=0,1,2,\cdots)$.

δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προσαρτηθῆ εἰς τὸν πρῶτον κύκλον ὡς σημεῖον ὁμαλὸν αὐτοῦ. Μὲ ἄλλας λέξεις, δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ κάλυψις τοῦ σημείου αὐτοῦ ζ καὶ μιᾶς περιοχῆς αὐτοῦ διὰ συν-



(α) (β)

Σχῆμα 7.

αρτησιακῶν τιμῶν τέτοιων, ὥστε νὰ προκύπτη ἔτσι μία συνάρτησις ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ εὐρυνθὲν οὕτω χωρίον.

Ἕνα τέτοιο σημεῖον ζ λέγεται *ἀνώμαλον σημεῖον* ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ κύκλου συγκλίσεως καὶ εἶναι ἀδύνατος ἡ ἐπέκτασις τῆς συναρτήσεως ὑπὲρ τὸ σημεῖον αὐτό. Ὅπως βλέπομεν λοιπόν, τὸ σημεῖον ζ εἶναι ***ἀνώμαλον σημεῖον*** διὰ τὴν συνάρτησιν $f_1(z)$.

Ἀλλ' ἐὰν εἰς τὴν (3) ἰσχύη τὸ σύμβολον τῆς ἀνισότητος (βλ. Σχ. 7β), ὁ νέος κύκλος συγκλίσεως ἐκτείνεται πέραν τοῦ πρώτου· γίνεται δυνατὴ τότε ἡ ἐπέκτασις τῆς συναρτήσεως ὑπὲρ τὸ συνοριακὸν σημεῖον ζ τοῦ παλαιοῦ κύκλου συγκλίσεως καὶ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν $z_1 \cdots z_2$. Κατὰ ταῦτα, ἂν εἶναι πάντως δυνατὴ μία ἐπέκτασις τῆς συναρτήσεως κατ' ἀκτινικὴν κατεύθυνσιν ὑπὲρ τὸ συνοριακὸν σημεῖον ζ τοῦ πρώτου κύκλου συγκλίσεως, τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ γίνη μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἁπλῶν τούτων δυναμοσειρῶν.

Ἄς φαντασθοῦμεν τώρα ὅτι τὸ πρῶτον συναρτησιακὸν στοιχεῖον ἐπεκτείνεται πρὸς ὅλας τὰς δυνατὰς κατευθύνσεις καί, ὁμοίως, ὅτι τὰ νέα στοιχεῖα ἐπεκτείνονται πρὸς ὅλας τὰς δυνατὰς κατευθύνσεις πέραν τῶν νέων κάθε φορὰν πεδίων. Προκύπτει ἔτσι ἐκ τοῦ πρώτου στοιχείου μία συνάρτησις ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ἕνα ἀκόμη εὐρύτερον πεδίον,

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἀξιοπρόσεκτοι εἶναι αἱ ἀκόλουθοι δύο καταστάσεις:

1. Ἡ ἐπέκτασις τῆς πρώτης δυναμοσειρᾶς ἐνδέχεται νὰ μὴ εἶναι δυνατὴ πρὸς ἀκτινικὴν κατεύθυνσιν. Δὲν θὰ ὑπάρχη τότε συνάρτησις ἡ ὁποία νὰ ταυτίζεται μὲ τὴν δυναμοσειρὰν αὐτὴν εἰς τὸν κύκλον συγκλίσεώς της καὶ νὰ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς χωρίον τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι διεύρυνσις τοῦ κύκλου τούτου. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι *ἐπεκτάσιμος* καὶ ὅτι ὁ κύκλος συγκλίσεως εἶναι τὸ *φυσικόν της σύνορον*.

Παράδειγμα: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z+z^2+z^6+\cdots+z^{n!}+\cdots$, μὲ $r=1$.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἦτο ἐπεκτάσιμος πέραν τοῦ μοναδιαίου κύκλου, ἕνα ὡρισμένον τόξον τῆς περιφερείας του θὰ περιεῖχεν μόνον ὁμαλὰ σημεῖα. Ἀλλ' εἰς τὸ καθένα ἀπὸ τὰ τόξα αὐτὰ εὑρίσκεται ἀπειρία σημείων τῆς μορφῆς $z_0=e^{2\pi i(p/q)}$ ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἀριθμοὺς p καὶ q· καὶ ἂν ἀποδείξωμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει σημεῖον τῆς μορφῆς z_0 τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ σημεῖον συνεχείας τῆς $f(z)$, ἕπεται ἀμέσως, ἡ μὴ ἐπεκτασιμότης τῆς $f(z)$. Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι, ἐὰν δοθῆ ἕνας ὁσονδήποτε μεγάλος (θετικὸς καὶ ἀκέραιος) g, θὰ ἔχωμεν

$$f(z)=\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty}\rho^{n!}$$

διὰ $z=\rho z_0$ μὲ $0<\rho<1$· διότι $z^{n!}=\rho^{n!}$ διὰ $n\geqslant q$. Ἐπομένως, διὰ $m=2q+g$, θὰ εἶναι

$$|f(z)|>\sum_{n=q}^{m}\rho^{n!}-\sum_{n=1}^{q-1}|z|^{n!}>(m-q+1)\,\rho^{m!}-(q-1).$$

Ὅταν $\rho\to 1$, τὸ δεξιὸν μέλος τείνει πρὸς $m-2q+2=g+2$ καί, διὰ κατάλληλον ἐκλογὴν τοῦ ρ_0, θὰ πρέπει νὰ συμβαίνη

$$|f(z)|>g$$

δι' ὅλα τὰ $\rho_0<\rho<1$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ g εἶναι αὐθαίρετος ἀκέραιος, τὸ $|f(z)|$ θὰ τείνη πρὸς τὸ ἄπειρον ὅταν τὸ z πλησιάζη πρὸς τὸ z_0 ἀκτινικῶς κινούμενον. Συνεπῶς, δὲν ἠμπορεῖ τὸ z_0 νὰ εἶναι σημεῖον συνεχείας. Ο.ε.δ.

2. Ἡ ἄλλη ἄκρα περίπτωσις: ἡ δυναμοσειρὰ εἶναι ἐπεκτάσιμος πέραν τοῦ κύκλου συγκλίσεως πρὸς *ὅλας* τὰς κατευθύνσεις, δὲν ἐμφανίζεται ποτέ. Φαίνεται τοῦτο ἀπὸ τὸ ἑπόμενον σπουδαῖον θεώρημα.

Θεώρημα 1. *Μία συνάρτησις ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ μίαν δυναμοσειρὰν ἔχει τουλάχιστον ἕνα ἀνώμαλον σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου συγκλίσεως τῆς σειρᾶς.*

Ἀπόδειξις: Τὸ θεώρημα τοῦτο μᾶς λέγει ὅτι, ἂν r_1 εἶναι ἡ ἀληθὴς ἀκτὶς συγκλίσεως τῆς (1), εἰς τὸ σύνορον τότε τοῦ κύκλου συγκλίσεως θὰ ὑπάρχη τουλάχιστον ἕνα σημεῖον ζ πέραν τοῦ ὁποίου εἶναι ἀδύνατος ἡ ἐπέκτασις. Καὶ τοῦτο ἀποδεικνύεται ἐὰν δείξωμεν ὅτι, ἐὰν εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπέκτασις πέραν ὁποιουδήποτε σημείου ζ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου $K: |z-z_1| = r_1$, τὸ r_1 τότε δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἡ ἀληθὴς ἀκτὶς συγκλίσεως τῆς σειρᾶς (1).

Ἐὰν εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπέκτασις πέραν κάθε συνοριακοῦ σημείου ζ τοῦ κύκλου K, θὰ ὑπάρχη τότε ἕνας κύκλος K_ζ, μὲ κέντρον τὸ καθένα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ ἀκτῖνα ρ_ζ, ἐντὸς τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπέκτασις τῆς συναρτήσεως $f_1(z)$. Τίποτε δὲν μᾶς ἐμποδίζει δὲ νὰ καλύψωμεν τοὺς κύκλους τούτους διὰ συναρτησιακῶν τιμῶν. Διότι, ἂν δύο ἀπὸ τοὺς κύκλους τούτους ἔχουν κοινὸν ἕνα χωρίον τ, αἱ τιμαὶ τῶν ἐπεκτάσεων τῆς $f_1(z)$ εἰς τοὺς κύκλους αὐτοὺς θὰ πρέπει νὰ ταυτίζωνται εἰς τὸ χωρίον τ, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς ταυτότητος· πράγματι, τὸ κοινὸν τοῦτο μέρος τ περιέχει καὶ τμῆμα του κείμενον ἐντὸς τοῦ K, ὅπου αἱ καλύψεις εἶναι βεβαίως αἱ αὐταί.

Ἀφ' ἑτέρου, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν Heine - Borel, ἕνα πεπερασμένον πλῆθος ἀπὸ κύκλους K_ζ, μαζὶ μὲ τὸν K, εἶναι ἐπαρκὲς διὰ τὴν κάλυψιν ἑνὸς κυκλικοῦ χωρίου μὲ κέντρον z_1 καὶ ἀκτῖνα $r > r_1$. Ἑπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἀναπτύγματος, ἡ (1) πρέπει νὰ συγκλίνη τουλάχιστον εἰς τὸν εὐρύτερον τοῦτον κύκλον· αὐτὸ δὲ σημαίνει ὅτι ἡ r_1 δὲν εἶναι ἡ ἀληθὴς ἀκτὶς συγκλίσεως τῆς σειρᾶς (1). Ο.ε.δ.

Λέγομεν ὅτι ἕνα δοθὲν στοιχεῖον (δοθὲν εἰς τὴν μορφὴν μιᾶς δυναμοσειρᾶς $\Sigma a_n (z-z_0)^n$, π.χ.) ἐπεκτείνεται *κατὰ μῆκος ἑνὸς δρόμου* k, ἐὰν ὁ δρόμος ἀρχίζη εἰς τὸ z_0 καὶ τὸ νέον κέντρον ἐκλέγεται πάντοτε ἐπὶ τοῦ δρόμου αὐτοῦ[1]. Καὶ ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνα τέτοιον δοθὲν στοιχεῖον ἐπεκτείνεται κατὰ μῆκος ὅλων τῶν δυνατῶν δρόμων, ὅλα τότε τὰ σημεῖα τοῦ συνόρου τὰ ὁποῖα συναντοῦν οἱ δρόμοι αὐτοὶ κατανέμονται αὐτομάτως εἰς δύο κλάσεις: εἰς τὴν μίαν ἀνήκουν τὰ *ὁμαλὰ σημεῖα* καὶ εἰς τὴν ἄλλην τὰ *ἀνώμαλα σημεῖα*: Εἰς ἐκεῖνα δηλαδὴ τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγκλεισθοῦν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς νέου κύκλου συγκλίσεως καὶ εἰς ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα ἡ δυνατότης αὐτὴ δὲν ὑφίσταται.

Εἰς κάθε σημεῖον z, τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται ὡς ὁμαλὸν σημεῖον, ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη συναρτησιακὴ τιμὴ w. Ἠμποροῦμεν τώρα νὰ διατυπώσωμεν τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

Ὁρισμός. *Ὡς πλήρη ἀναλυτικὴν συνάρτησιν ὁριζομένην ἀπὸ ἕνα δοθὲν συναρτησιακὸν στοιχεῖον, ἐννοοῦμεν τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἐκρίθησαν ὡς ὁμαλὰ (σύμφωνα μὲ τὴν διαδικασίαν ἐπεκτασιμότητος τὴν ὁποίαν περιεγράψαμεν ἀνωτέρω) καὶ μὲ τὸ καθένα ἐξ αὐτῶν καλυπτόμενον ὑπὸ τῆς ἀντιστοίχου του συναρτησιακῆς τιμῆς.*

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὁμαλῶν σημείων z καλεῖται τὸ *χωρίον ὑπάρξεως* ἢ *χωρίον ἀναλυτικότητος* τῆς ἀναλυτικῆς αὐτῆς συναρτήσεως· τὸ δὲ σύνολον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν w καλεῖται τὸ *πεδίον τιμῶν* τῆς συναρτήσεως. Σχετικῶς δὲ πρὸς τὴν βαθμιαίαν διεύρυνσιν τῆς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως ἀπὸ ἑνὸς στοιχείου της ἀρχόμενοι, ὁμιλοῦμεν ἐπίσης περὶ τοῦ *ἀναλυτικοῦ μορφώματος*, εἰς τὸ ὁποῖον περιλαμβάνονται ὅλα τὰ ὁμαλὰ σημεῖα z μὲ τὸ καθένα καλυπτόμενον ὑπὸ τῆς ἀντιστοίχου του συναρτησιακῆς τιμῆς. Ἡ ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα ὁ ἐσωτερικὸς σύνδεσμος ποὺ ἑνώνει κάθε z μὲ τὴν ἀντίστοιχον εἰς αὐτὸ συναρτησιακὴν τιμὴν w.

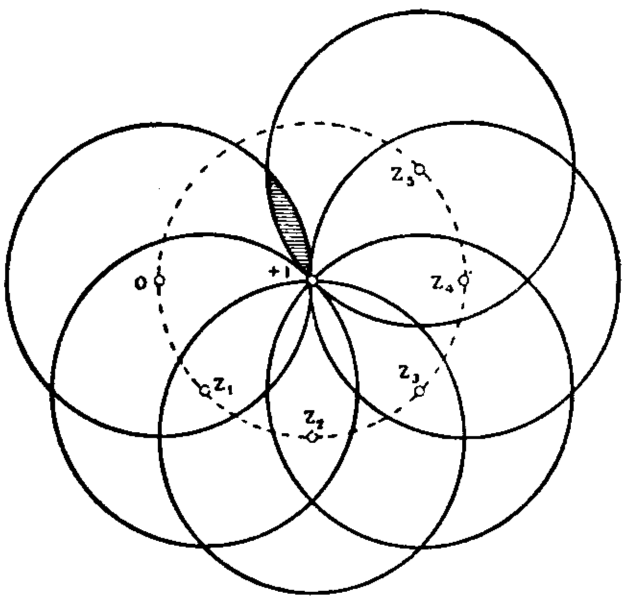
1. Ἀκριβέστερα: ἐπὶ ἐκείνου τοῦ τμήματος τοῦ k τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ τοῦ κέντρου z_0 καὶ τοῦ πρώτου σημείου τομῆς τοῦ δρόμου k καὶ τοῦ συνόρου τοῦ κύκλου συγκλίσεως.

Ὑπάρχουν πάντως μερικαὶ παραλείψεις εἰς τὸν ἀρκετὰ πλήρη ὁρισμὸν αὐτόν:

a) Θὰ πρέπει νὰ καταλήξωμεν εἰς μερικὰς συμφωνίας διὰ νὰ εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἀποφαινώμεθα περὶ τῆς συμπεριφορᾶς μιᾶς συναρτήσεως εἰς τὸ ἄπειρον. Τοῦτο εἶναι ἀρκετὰ ἁπλοῦν καὶ θὰ γίνῃ εἰς τὴν § 32.

b) Εἶναι δυνατὸν νὰ ἐμφανισθῇ ἡ ἑξῆς κατάστασις:

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι, κατόπιν ἐπανειλημμένων ἐπεκτάσεων, ὁ νέος κύκλος ἔχει ἕνα κοινὸν μέρος μετὰ τοῦ ἀρχικοῦ (εἰς τὸ Σχῆμα 8, ὁ πέμπτος κύκλος ἔχει τὸ διαγραμμισμένον χωρίον τ κοινὸν μετὰ τοῦ ἀρχικοῦ κύκλου[1]). Ἕνεκα τῆς νέας



Σχῆμα 8.

1. Τὸ σχῆμα ἐβασίσθη ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως ὅτι ὁ ἀρχικὸς κύκλος συγκλίσεως εἶναι ὁ μοναδιαῖος κύκλος, ὅτι $z = +1$ εἶναι τὸ μοναδικὸν ἀνώμαλον σημεῖον εἰς τὸν κύκλον τοῦτον καὶ εἰς μίαν περαιτέρω περιοχὴν αὐτοῦ, καὶ ὅτι ἡ ἐπέκτασις γίνεται κατὰ μῆκος τῆς, μὲ ἀσυνεχῆ γραμμὴν σημειουμένης, περιφερείας $|z-1| = 1$ καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.

δυναμοσειρᾶς, εἰς τὰ σημεῖα τοῦ ἀρχικοῦ κύκλου (ἄρα καὶ εἰς τὰ σημεῖα τοῦ χωρίου τ) τὰ περιεχόμενα ἐντὸς τοῦ νέου κύκλου, ἐνδέχεται μὲν νὰ ἀντιστοιχοῦν αἱ ἀρχικαὶ συναρτησιακαὶ τιμαὶ w ἀλλ' ἐνδέχεται ἐπίσης νὰ ἀντιστοιχοῦν νέαι συναρτησιακαὶ τιμαί.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἡ συνάρτησις λέγεται *μονότιμος* (εἰς ὁλόκληρον τὸ χωρίον ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἐπεξετάθη). Ἄλλως, λέγεται *πλειονότιμος*.

c) Ἐνδεχόμενον εἶναι ἀκόμη ὅπως ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον (ἄρα καὶ ὁμαλὸν) τοῦ πρώτου κύκλου συγκλίσεως, ἀποβῇ ἀνώμαλον κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν εἰς αὐτὸ κατὰ τὸν τρόπον ποὺ περιεγράψαμεν ἀνωτέρω. Τοῦτο δὲ εἶναι καὶ *πραγματοποιήσιμον* εἰς μερικὰς περιπτώσεις. Μὲ ἄλλους λόγους, τὸ νὰ εἶναι ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ὁμαλὸν ἢ ἀνώμαλον εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τοῦ δρόμου ἢ τῆς ἁλύσεως κύκλων ποὺ ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν προσπέλασίν του.

Διὰ τὴν περισσότερον ἀκριβῆ διερεύνησιν τῶν συνεπειῶν τῶν περιπτώσεων b) καὶ c), θὰ πρέπει νὰ παραπέμψωμεν τὸν ἀναγνώστην εἰς τὸν 2ον Τόμον τοῦ συγγράμματος τούτου. Εἰς τὴν ἀκολουθοῦσαν πάντως παράγραφον θὰ ἀποδείξωμεν ἕνα θεώρημα τὸ ὁποῖον μᾶς διαβεβαιώνει διὰ τὸ *ἀδύνατον* τῆς καταστάσεως b) — ὑπὸ ὡρισμένας, ἰδιαιτέρως συχνά, παρουσιαζομένας συνθήκας.

Εἰς τὴν μεθεπομένην παράγραφον 26 θὰ πραγματευθοῦμεν δύο ἁπλούστατα παραδείγματα συναρτήσεων πλειονοτίμων.

Ἄσκησις. Ἡ δυναμοσειρὰ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ἔχει κύκλον συγκλίσεως τὸν μοναδιαῖον κύκλον. Δι' ἀναπτύξεως εἰς νέαν δυναμοσειρὰν περὶ κέντρον τὸ σημεῖον $+\frac{1}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον $+1$ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον τῆς συναρτήσεως ποὺ παριστάνεται διὰ τῆς σειρᾶς εἰς τὸν μοναδιαῖον κύκλον — παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ δοθεῖσα σειρὰ συγκλίνει διὰ $z = +1$!!.

§ 25. Τὸ Θεώρημα τῆς μονοδρομίας.

Θεώρημα. *Ἔστω* **T** *ἕνα ἁπλῆς συνοχῆς χωρίον,* $f_0(z) = \Sigma a_n (z - z_0)^n$ *ἕνα ἀναλυτικὸν συναρτησιακὸν στοιχεῖον εἰς τὸ σημεῖον* $z = z_0$ *τοῦ* **T**. *Ἐὰν εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπέκτασις τῆς* $f_0(z)$ *ἀπὸ τοῦ* z_0 *κατὰ μῆκος ὁποιουδήποτε δρόμου ἐντὸς τοῦ* **T**, *διὰ τῆς ἐπεκτάσεως αὐτῆς προκύπτει μία συνάρτησις ἡ ὁποία εἶναι μονότιμος καὶ ἀναλυτικὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ χωρίον* **T**.

Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχὰς ὅτι κάθε στοιχεῖον λαμβανόμενον δι' ἐπεκτάσεως καὶ μὲ χρησιμοποίησιν μόνον δυναμοσειρῶν, συγκλίνει τουλάχιστον εἰς τὸν μέγιστον κύκλον (περὶ τὸ κέντρον τοῦ στοιχείου) ὁ ὁποῖος δὲν προεκτείνεται πέραν τοῦ **T**. Διότι εἰς τὸ σύνορον τοῦ ἀληθοῦς κύκλου συγκλίσεώς του θὰ ὑπάρχῃ ἕνα τουλάχιστον ἀνώμαλον σημεῖον τὸ ὁποῖον ἀνακόπτει τὴν ἐπέκτασιν. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὅμως τέτοια ἐμπόδια ἀποκλείονται ὁπουδήποτε ἐντὸς τοῦ **T**.

Θὰ πρέπει προφανῶς νὰ δείξωμεν ὅτι, δι' ἐπεκτάσεως τῆς $f_0(z)$ ἀπὸ τοῦ z_0 μέχρι τοῦ z_1 καὶ κατὰ μῆκος δύο διαφορετικῶν δρόμων ἐντὸς τοῦ **T** κειμένων, λαμβάνομεν τὸ *αὐτὸ* στοιχεῖον $f_1(z) = \Sigma b_n (z_0 - z_1)^n$ εἰς τὸ z_1 καὶ κατὰ μῆκος τῶν δύο αὐτῶν δρόμων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαδικασία τῆς ἐπεκτάσεως ἐνεργεῖται τελείως μονότροπα κατὰ τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην φοράν[1], ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἐπέκτασις τοῦ στοιχείου $f_0(z)$ ἀπὸ τοῦ z_0 εἰς τὸ z_1 κατὰ μῆκος τοῦ k_1 καὶ ἡ ἐπέκτασις τοῦ στοιχείου $f_1(z)$ (ποὺ ὡρίσθη εἰς τὸ z_1) ἀπὸ τοῦ z_1 πάλιν εἰς τὸ z_0 κατὰ μῆκος τοῦ k_2 μᾶς ὁδηγεῖ ἐκ νέου εἰς τὸ ἀρχικὸν στοιχεῖον $f_0(z)$ εἰς z_0. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἐπέκτασις ἑνὸς στοιχείου κατὰ μῆκος ἑνὸς κλειστοῦ δρόμου C, ἐντὸς τοῦ χωρίου **T** κειμένου, μᾶς ἐπαναφέρει εἰς τὸ ἀρχικὸν στοιχεῖον.

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἐμμέσως μὲ τὸ νὰ δείξωμεν ὅτι ἂν ἡ ἐπέκτασις ἑνὸς στοιχείου κατὰ μῆκος ἑνὸς κλειστοῦ δρόμου

1. Δὲν ἔχει κανεὶς παρὰ νὰ φαντασθῇ τὴν ἐκλογὴν τῶν διαδοχικῶν κέντρων τέτοιαν, ὥστε τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ νὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου συγκλίσεως *καὶ* περὶ τὸ προηγούμενον κέντρον *καὶ* περὶ τὸ ἑπόμενον κέντρον.

C, ἐντὸς τοῦ **T**, δὲν μᾶς ἐπαναφέρῃ εἰς τὸ στοιχεῖον αὐτό, τοῦτο ὁδηγεῖ εἰς ἀντίφασιν πρὸς τὴν ὑπόθεσιν καθ' ἣν αἱ ἐπεκτάσεις μας εἶναι δυναταὶ κατὰ μῆκος *κάθε* δρόμου ἐντὸς τοῦ **T**. Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι ἕνα πεπερασμένον πλῆθος ἀπὸ κέντρα $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_m$ ἐπὶ τοῦ δρόμου εἶναι ἐπαρκὲς διὰ τὴν ἐπέκτασιν κατὰ μῆκος τοῦ C, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ ζ_0 π.χ. Τὸ καθένα δὲ ἀπὸ τὰ κέντρα αὐτὰ θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου συγκλίσεως περὶ τὸ προηγούμενόν του κέντρον καθὼς καὶ περὶ τὸ ἑπόμενον αὐτοῦ κέντρον, ἂν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο τυχόντων διαδοχικῶν ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ ἔχῃ ἔτσι ἐκλεγῆ ὥστε νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως τοῦ δρόμου C ἀπὸ τοῦ συνόρου τοῦ χωρίου. Ἂν λοιπὸν ἀντικατασταθῇ ὁ δρόμος C διὰ τοῦ πολυγώνου p μὲ κορυφὰς $\zeta_0, \zeta_1 \cdots \zeta_m$, αἱ ἐπεκτάσεις κατὰ μῆκος τοῦ C καὶ τοῦ p θὰ εἶναι ἀκριβῶς αἱ αὐταὶ—καὶ συνεπῶς, αἱ ἐπεκτάσεις κατὰ μῆκος τοῦ p *δὲν* μᾶς ἐπαναφέρουν εἰς τὸ ἀρχικὸν στοιχεῖον (κατὰ τὴν ὑπόθεσίν μας).

Παρατηροῦμεν ὅμως ἐπὶ τοῦ προκειμένου ὅτι ἢ τὸ πολύγωνον p εἶναι ἁπλοῦν ἤ, κατὰ τὸ Λῆμμα 1, εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνάλυσίς του εἰς ἕνα πεπερασμένον πλῆθος ἀπὸ ἁπλᾶ κλειστὰ πολύγωνα καὶ εἰς ἕνα πεπερασμένον πλῆθος ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα διαγραφόμενα δύο φορὰς καὶ κατ' ἀντιθέτους κατευθύνσεις. Θὰ ὑπάρχῃ πάντως *τουλάχιστον ἕνα* κλειστὸν ὑποπολύγωνον τοῦ p· διότι ἂν τὸ p περιεῖχε μόνον τμήματα δὶς ἀντιδιαγραφόμενα, αἱ ἐπεκτάσεις μας κατὰ μῆκος τοῦ p θὰ μᾶς ὡδήγουν ἀναγκαίως εἰς τὸ ἀρχικὸν στοιχεῖον. Θὰ πρέπει, ἄρα, νὰ ὑπάρχῃ ἕνα ἁπλοῦν κλειστὸν ὑποπολύγωνον p' τοῦ p, κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου αἱ ἐπεκτάσεις, διαδεχόμεναι ἀλλήλας κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, δὲν μᾶς ἐπαναφέρουν εἰς τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν στοιχεῖον.

Ἂς διαιρέσωμεν τώρα τὸ p' εἰς δύο ὑποπολύγωνα μέσῳ μιᾶς διαγωνίου κειμένης ἐντὸς τοῦ p' (ἄρα ἐντὸς τοῦ **T**). Αἱ ἐπεκτάσεις κατὰ μῆκος ἑνὸς ἀπὸ τὰ ὑποπολύγωνα αὐτά, κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, δὲν μᾶς ἐπαναφέρουν εἰς τὸ αὐτὸ στοιχεῖον, ἀφοῦ ἡ ἐπέκτασις γίνεται κατ' ἀντιθέτους φορὰς κατὰ μῆκος τῆς διαγωνίου. Διὰ περαιτέρω ὑποδιαιρέσεως τοῦ πολυγώνου τούτου, καταλήγομεν ἐνδεχομένως εἰς ἕνα τρίγωνον κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου αἱ ἐπεκτάσεις δὲν ἐπανοδηγοῦν εἰς τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν στοιχεῖον· καὶ ἐὰν ὑποδιαιρέσωμεν τὸ τρίγωνον τοῦτο, ὅπως εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Cauchy διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα (Σχ. 1), ὁδηγούμεθα εἰς μίαν ἀκολουθίαν ἀλληλενθέτων τριγώνων, τὰ ὁποῖα συγκλίνουν εἰς ἕνα σημεῖον ζ καὶ μὲ τὴν ἰδιότητα αἱ ἐπεκτάσεις εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ μὴ ὁδηγοῦν εἰς τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν στοιχεῖον.

Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον. Διότι τὸ στοιχεῖον μὲ κέντρον ζ ἔχει μίαν θετικὴν ἀκτῖνα ρ καὶ εὐθὺς ὡς ἡ διάμετρος ἑνὸς ἀπὸ τὰ τρίγωνα ποὺ περιέχουν τὸ ζ ἀποβῇ μικροτέρα τοῦ ρ, ἡ ἐπέκτασις περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο μᾶς ἐπαναφέρει ἀσφαλῶς εἰς τὸ ἀρχικὸν στοιχεῖον[1]. Πράγματι, κατὰ τὴν διαδικασίαν αὐτήν, δὲν ἔχομεν νὰ μεταβῶμεν πέραν τοῦ κύκλου $(\zeta:\rho)$, τοῦ ὁποίου κάθε σημεῖον καλύπτεται ἀπὸ μίαν ἀναλυτικὴν συναρτησιακὴν τιμήν. Ἀπεδείχθη ἔτσι ἡ πρότασις.

§ 26. Παραδείγματα πλειονοτίμων συναρτήσεων.

Ὁ ὑπολογισμὸς εἰς τὴν πρᾶξιν τοῦ ὅλου ἀναλυτικοῦ μορφώματος, ὁ διαχωρισμὸς δηλαδὴ ὅλων τῶν z εἰς ὁμαλὰ καὶ ἀνώμαλα σημεῖα καὶ ἡ ἀντιστοίχησις συναρτησιακῶν τιμῶν πρὸς τὰ ὁμαλὰ z, δὲν εἶναι δυνατόν, ἐν γένει, νὰ πραγματοποιηθῇ κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον. Ἡ ἀξία τῆς μεθόδου αὐτῆς ἔγκειται, κυρίως, εἰς τὸ ὅτι μᾶς παρέχει μίαν ἐπίγνωσιν τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων καὶ ἔχει τὸν χαρακτῆρα ἑνὸς θεωρήματος ὑπάρξεως.

Τὰ ἀκολουθοῦντα δύο παραδείγματα δεικνύουν πῶς τελείως διαφορετικοὶ δρόμοι ὁδηγοῦν πρὸς τὸν σκοπόν μας εἰς ὡρισμένας εἰδικὰς περιπτώσεις.

1. $$w = f(z) = \log z.$$

1. Σ. Μ. Διότι ἐδῶ αἱ κατὰ τὴν ἐπέκτασιν αὐτὴν ἀνευρισκόμεναι συναρτησιακαὶ τιμαὶ συμπίπτουν μὲ ἐκείνας ἑνὸς *καὶ τοῦ αὐτοῦ* κύκλου, τοῦ ἀρχικοῦ.

Εἰς τὴν § 14,6 εἴδομεν ἤδη ὅτι ἡ

$$f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

εἶναι μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἰς τὸ δεξιὸν ἡμιεπίπεδον, ἀρκεῖ ὁ δρόμος ὁλοκληρώσεως νὰ εἶναι περιορισμένος εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον αὐτό. Ἐπειδὴ δὲ ὁ φυσικὸς λογάριθμος ἠμπορεῖ νὰ ὁρισθῇ διὰ $x > 0$ μὲ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\log x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi},$$

γίνεται ἀμέσως φανερὸν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις τοῦ $\log x$ εἰς τὸ μιγαδικὸν πεδίον· διότι $f(z) = \log x$ διὰ $z = x > 0$.

Ποῖον εἶναι τὸ πεδίον ὑπάρξεως τῆς $f(z)$ καὶ ποῖον τὸ πεδίον τιμῶν της;

Τὸ ὁλοκλήρωμα διὰ τὴν $f(z)$ ἔχει πάντοτε νόημα ἐφ' ὅσον ὁ δρόμος ὁλοκληρώσεως δὲν διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς. Ἑπομένως (Θεώρημα 3, § 14), ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον μὲ ἐξαίρεσιν τῆς ἀρχῆς $z = 0$.[1]

Δὲν εἶναι ὅμως καὶ μονότιμος. Διὰ νὰ εὕρωμεν, παραδείγματος χάριν, τὸ $f(-1) = \log(-1)$, ἠμποροῦμεν νὰ ἐκλέξωμεν πρῶτον τὸ ἄνω ἥμισυ καὶ κατόπιν τὸ κάτω ἥμισυ τοῦ μοναδιαίου κύκλου διὰ δρόμους ὁλοκληρώσεως. Εὑρίσκομεν ἔτσι (πρβ. § 10, Παράδειγμα 1) τὰς τιμὰς

$$+\pi i, \; -\pi i, \text{ ἀντιστοίχως,}$$

1. Τοῦτο ἀληθεύει διὰ τὸ πεπερασμένον μέρος τοῦ ἐπιπέδου. Μετὰ τὴν ἀνάγνωσιν ὅμως τῆς § 32, ἡ ὁποία πραγματεύεται τὴν συμπεριφορὰν μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως εἰς τὸ ἄπειρον, ὁ ἀναγνώστης θὰ διαπιστώσῃ ὅτι τὸ σημεῖον ∞ εἶναι σημεῖον διακλαδώσεως (τὸ ὁποῖον θὰ ὁρίσωμεν κατωτέρω) ἀπείρου τάξεως τῆς συναρτήσεως $\log z$ καθὼς καὶ ὅτι τὸ ἴδιον σημεῖον εἶναι σημεῖον διακλαδώσεως τάξεως $m-1$ διὰ τὴν συνάρτησιν τοῦ ἀκολουθοῦντος παραδείγματος.

καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο συμφωνεῖ μὲ τὴν τιμὴν $2\pi i$ τοῦ ὁλοκληρώματος ἐπὶ ὁλοκλήρου τῆς μοναδιαίας περιφερείας καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν. Σύμφωνα δὲ μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy, τὸ ὁλοκλήρωμα ἔχει τὴν ἰδίαν τιμὴν καὶ δι' ὁποιονδήποτε ἄλλον δρόμον κείμενον ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸ ἄνω (κάτω) ἡμιεπίπεδον.

Ἀλλ' ὅμως, ἂν ἐκλέξωμεν ὡς ἀρχὴν τοῦ δρόμου τὸ $+1$ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι περιβάλλει αὐτὸς τὴν ἀρχὴν m φοράς, κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, πρὶν καταλήξη εἰς τὸ -1, εὑρίσκομεν ὅτι (§ 10,1).

$$\log(-1) = \pi i + 2m\pi i,$$

ἀφοῦ τὸ ὁλοκλήρωμα κατὰ μῆκος δρόμου περιβάλλοντος μίαν φορὰν τὴν ἀρχὴν εἶναι $2\pi i$. Ὁμοίως, διὰ δρόμον περιβάλλοντα τὴν ἀρχὴν m φορὰς καὶ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, θὰ εἶναι

$$\log(-1) = -\pi i - 2m\pi i.$$

Ὅπως βλέπομεν, τὸ ὁλοκλήρωμα ἔχει τιμὰς ἐξαρτωμένας ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τοῦ δρόμου ὁλοκληρώσεως, εἶναι αὐταὶ ἄπειροι τὸ πλῆθος καὶ ὅλαι τῆς μορφῆς

$$\log(-1) = \pi i + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Κατὰ τὸ θεώρημα δὲ καὶ πάλιν τοῦ Cauchy, εὔκολα βλέπομεν ὅτι ὁδηγούμεθα εἰς τὰς αὐτὰς τιμὰς χρησιμοποιοῦντες *ὁποιονδήποτε* δρόμον ἐκτεινόμενον ἀπὸ τὸ $+1$ μέχρι τοῦ -1. Ὅ,τι ἰσχύει διὰ τὸ σημεῖον -1 ἰσχύει φυσικὰ καὶ διὰ ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖον.

Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\log z$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ πεπερασμένον ἐπίπεδον, μὲ ἐξαίρεσιν τῆς ἀρχῆς $z = 0$, καὶ ὅτι εἶναι ἀπειρότιμος ἀλλὰ μὲ τὴν ἰδιομορφίαν, ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ $\log z$ δι' ἕνα ὡρισμένον z νὰ προκύπτουν ἀπὸ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν διὰ προσθέσεως εἰς αὐτὴν ἑνὸς ἀκεραίου πολλαπλασίου τοῦ $2\pi i$. Ἡ κάθε μία ἀπὸ τὰς ἀπειροπληθεῖς αὐτὰς τιμὰς τοῦ $\log z$ ὀνομάζεται *ἕνα προσδιόρισμα τοῦ $\log z$* καὶ συνιστᾷ μίαν μονότιμον ἀναλυτικὴν συνάρτησιν εἰς τὴν περιοχὴν κάθε σημείου $z \neq 0$ — ἤ, γενικώτερον, εἰς κάθε ἁπλῆς συνοχῆς χωρίον $\mathbf{T}$ ποὺ δὲν περιέχει

τὴν ἀρχήν. Τὸ μονότιμον συναρτησιακὸν στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον ἐκλέγεται κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ἀπὸ ὁλόκληρον τὸ πεδίον τιμῶν τοῦ $\log z$, καλεῖται ἐπίσης *ἕνας κλάδος* τῆς πλειονοτίμου αὐτῆς συναρτήσεως. Εἰς τὴν § 20 ἀνεπτύξαμεν ἕνα τέτοιον κλάδον (τὴν *πρωτεύουσαν τιμήν*, καθὼς τὴν ὠνομάσαμεν) τοῦ $\log z$ εἰς μίαν δυναμοσειρὰν εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $+1$.

Εἶναι δυνατὸν ἐπίσης νὰ εὕρωμεν τὰς αὐτὰς ἰδιότητας τοῦ $\log z$, ἂν καὶ ὄχι μὲ τόσον πρόσφορον τρόπον ὅπως προηγουμένως, δι' ἐφαρμογῆς τῶν γενικῶν μεθόδων τῆς προηγουμένης παραγράφου εἰς τὴν δυναμοσειρὰν τῆς § 20, θεωροῦντες αὐτὴν ὡς τὸ ἀρχικῶς δοθὲν συναρτησιακὸν στοιχεῖον. Εἰδικῶς, ἠμποροῦμεν νὰ δείξωμεν ἀπ' εὐθείας ὅτι ἂν ἐπεκτείνωμεν τὴν ἐν λόγῳ δυναμοσειρὰν μίαν φορὰν περὶ τὴν ἀρχήν, κατὰ τὴν θετικὴν κατεύθυνσιν καὶ κατὰ τρόπον ὅμοιον πρὸς ἐκεῖνον ποὺ ὑπεδείξαμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σχήματος 8 (ἐκλέγοντες πάντοτε τὰ νέα κέντρα ἐπὶ τῆς μοναδιαίας περιφερείας π.χ.), *δὲν* ἐπιστρέφωμεν μὲ τὴν πρωτεύουσαν τιμὴν εἰς τὴν ἀρχικὴν περιφέρειαν. Ἀντιθέτως, αἱ συναρτησιακαὶ τιμαὶ αὐξάνονται κατὰ $2\pi i$. Διὰ τὸν λόγον αὐτόν, ἡ ἀρχὴ $z = 0$, εἰς τὴν περιοχὴν τῆς ὁποίας ὁ $\log z$ δὲν εἶναι μονότιμος συνάρτησις (καὶ τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ μόνον ἀνώμαλον σημεῖον τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ πεπερασμένον), ἐπονομάζεται *σημεῖον διακλαδώσεως (ἢ σημεῖον περιελίξεως* (*Windungspunkt, Winding point*) τοῦ $\log z$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ σημεῖον διακλαδώσεως εἶναι *ἀπείρου τάξεως*.,

Ὑποθέτομεν καὶ ἐδῶ γνωστὰς τὰς στοιχειώδεις ἰδιότητας τοῦ $\log z$ (*Στοιχεῖα*, κεφ. 13)· τονίζομεν μόνον ἰδιαιτέρως καὶ πάλιν ὅτι τὸ πολυσήμαντον τοῦ $\log z$ εἶναι μία *οὐσιαστικὴ* ἰδιότης τῆς συναρτήσεως αὐτῆς. Διότι προκύπτει κατ' *ἀπόλυτον ἀναγκαιότητα* ἀπὸ τὸ καθένα στοιχεῖον της —ἀνεξαρτήτως τοῦ πῶς δίδονται αὐτὰ— ὡς συνέπεια τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπεκτάσεως.

Διὰ τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ἄπειρα προσδιορίσματα τοῦ $\log z$, θὰ ἔχωμεν $e^{\log z} = z$.

2. $$w = f(z) = \sqrt[m]{z}.$$

Ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $\sqrt[m]{x}$, ὁριζομένη καὶ θετικὴ διὰ $x>0$, εἶναι δυνατὸν νὰ συνεχισθῇ εἰς τὸ μιγαδικὸν πεδίον. Διότι ἡ

$$f(z)=e^{\frac{1}{m}\log z},$$

εἶναι, ὡς καὶ ὁ $\log z$, συνάρτησις ἀναλυτικὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ (πεπερασμένον) z-ἐπίπεδον μὲ ἐξαίρεσιν τῆς ἀρχῆς, μολονότι μὴ μονότιμος εἰς μίαν περιοχὴν περὶ τὴν ἀρχήν. Ἂν ὅμως ἐκλέξωμεν ἕνα ἁπλῆς συνοχῆς χωρίον **T** τὸ ὁποῖον νὰ μὴ περιέχῃ τὴν ἀρχὴν εἰς τὸ ἐσωτερικόν του—π.χ. ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον μὲ ἐξαίρεσιν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦ μηδενὸς [1] —ὁ καθένας τότε κλάδος τῆς συναρτήσεως $\log z$ γίνεται μία μονότιμος καὶ ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἰς τὸ **T**.

Ἂς ἐκλέξωμεν, εἰδικῶς, τὸν κλάδον ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν τιμὴν 0 διὰ $z=+1$ καὶ εἶναι ἴσος ἑπομένως πρὸς τὴν πραγματικὴν τιμὴν $\log x$ διὰ $x>0$, καὶ ἂς παραστήσωμεν μὲ Log z τὴν —καλουμένην *πρωτεύουσαν*—ταύτην τιμήν. Ἡ συνάρτησις τότε

$$f_0(z)=e^{\frac{1}{m}\mathrm{Log}\, z},$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ **T**, εἶναι ἡ ζητουμένη ἐπέκτασις τῆς θετικῆς πραγματικῆς συναρτήσεως $\sqrt[m]{x}$· διότι $f_0(x)=e^{\frac{1}{m}\log x}=x^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{x}$. Διὰ τὸν λόγον αὐτόν, τὴν συνάρτησιν $f(z)$ παριστάνομεν μὲ $\sqrt[m]{z}$· $f_0(z)$ λέγεται ἡ πρωτεύουσα τιμὴ τῆς $\sqrt[m]{z}$.

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν αὐτόν, ἡ συνάρτησις $\sqrt[m]{z}$ ἐκ πρώτης ὄψεως ἐμφανίζεται ὡς ἀπειρότιμος· πράγματι ὅμως εἶναι

1. Τὸ χωρίον αὐτὸ λέγεται τὸ *«διατετμημένον» ἐπίπεδον κατὰ μῆκος τοῦ ἀρνητικοῦ πραγματικοῦ ἄξονος.*

m-τιμος. Διότι ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ $\log z$ περιέχονται εἰς τὸν τύπον

$$\log z=\mathrm{Log}\, z+2k\pi i \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots),$$

καὶ συνεπῶς

$$f(z)=\sqrt[m]{z}=e^{\frac{1}{m}\mathrm{Log}\, z}\cdot e^{\frac{2k\pi i}{m}}=e^{\frac{2k\pi i}{m}}\cdot f_0(z).$$

Ὁ παράγων $e^{\frac{2k\pi i}{m}}$ πρὸ τοῦ $f_0(z)$ ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ m μόνον διαφορετικὰς τιμὰς [1], ἀφοῦ δύο τιμαὶ τοῦ k μὲ διαφορὰν πολλαπλάσιον τοῦ m δίδουν τὴν αὐτὴν τιμήν. Συνεπῶς, οἱ m κλάδοι τῆς $\sqrt[m]{z}$ διαφέρουν ἀπὸ τὸν πρωτεύοντα κλάδον κατὰ σταθεροὺς μόνον παράγοντας. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δώσωμεν εἰς τὸν k τὰς τιμὰς $0, 1, 2, \ldots, m-1$ διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς ἀντιστοίχους παραστάσεις τῶν m κλάδων:

$$f_k(z)=e^{\frac{2k\pi i}{m}}\, e^{\frac{1}{m}\mathrm{Log}\, z}, \quad k=0,1,2,\ldots,m-1.$$

Ὡδηγήθημεν λοιπὸν μέχρι τώρα εἰς τὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

1) Ἡ $\sqrt[m]{x}$ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπεκταθῇ εἰς τὸ μιγαδικὸν πεδίον.

2) Ἡ ἀναλυτικὴ συνάρτησις $\sqrt[m]{z}$, ἡ ὁποία ὡρίσθη ὡς ἄνω κατὰ μοναδικὸν τρόπον, εἶναι ὁμαλὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ πεπερασμένον ἐπίπεδον μὲ ἐξαίρεσιν τῆς ἀρχῆς $z=0$.

3) Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι m-τιμος. Ἡ ἀρχὴ εἶναι τὸ μόνον πεπερασμένον σημεῖον διακλαδώσεως καὶ ἡ τάξις του εἶναι $m-1$ [2]. Διὰ ἀναλυτικῆς ἐπεκτάσεως περὶ τὸ σημεῖον αὐτό, ἡ συν-

1) Τὰς m διαφορετικὰς m-ρίζας τῆς μονάδος, ἀφοῦ

$$\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)^m=e^{2k\pi i}=+1.$$

2) Λέγομεν $m-1$ ἐπειδὴ διὰ $m=2$ ἐμφανίζεται διὰ πρώτην φορὰν τὸ πολυσήμαντον τῆς συναρτήσεως.

άρτησις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μίαν m-ρίζαν τῆς μονάδος. Εἶναι δὲ παντοτε $\left(\sqrt[m]{z}\right)^m = z$.

Ὑποθέτομεν, καὶ πάλιν, ὅτι ὁ ἀναγνώστης γνωρίζει τὰς στοιχειώδεις ἰδιότητας τῆς συναρτήσεως $\sqrt[m]{z}$, ὥστε νὰ ἔχῃ μείνει ἱκανοποιημένος μὲ τὴν σύντομον αὐτὴν ἔκθεσιν τῆς αναλυτικῆς της δομῆς.

Ἀσκήσεις. 1. Νὰ γίνῃ ἡ ἀνάπτυξις τῆς πρωτευούσης τιμῆς τῆς $\sqrt[m]{z}$ εἰς δυναμοσειρὰν καὶ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $+1$. Ἰδιαιτέρως δὲ διὰ $m = 2$.

2) Ἡ συνάρτησις a^z, ὅπου a αὐθαίρετος μιγαδικὴ σταθερὰ διάφορος τοῦ 0 καὶ τοῦ 1, ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως

$$a^z = e^{z \log a}.$$

Εἶναι ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἀναλυτική; Εἶναι μονότιμος ἢ πλειονότιμος; Εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μονότιμος; Ποῖον τὸ νόημα τοῦ i^i;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 9

ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§ 27. Ὁρισμοὶ

Σύμφωνα μὲ ἐκεῖνα ποὺ ἀνεπτύξαμεν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ὡς ἁπλούστεραι συναρτήσεις ἐμφανίζονται νὰ εἶναι ἐκεῖναι τῶν ὁποίων τὰ ἀναπτύγματα εἰς δυναμοσειρὰς συγκλίνουν εἰς ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον. Διότι μία τέτοια συνάρτησις εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ ἀνάπτυγμά της εἰς δυναμοσειράν, τὸ ὁποῖον ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εἶναι τῆς μορφῆς

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

μᾶς δίδει διὰ κάθε z τὴν ἀντίστοιχόν του τιμὴν τῆς συναρτήσεως. Αἱ συναρτήσεις αὐταί, ἑπομένως, εἶναι ἀναγκαίως μονότιμοι καὶ ὀνομάζονται, συντόμως, **ἀκέραιαι συναρτήσεις**[1]. Αἱ ἀκέραιαι συναρτήσεις κατατάσσονται εἰς *ἀκεραίας ὑπερβατικὰς συναρτήσεις* καὶ *ἀκεραίας ρητὰς συναρτήσεις (ἢ πολυώνυμα)*, καθόσον ἄπειρον πλῆθος ἢ πεπερασμένον μόνον πλῆθος, ἀντιστοίχως, ἀπὸ τοὺς συντελεστὰς a_n τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι διάφοροι ἀπὸ τὸ μηδέν. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἂν a_m εἶναι ὁ τελευταῖος μὴ μηδενικὸς συντελεστής, m ὀνομάζεται *ὁ βαθμὸς* τοῦ πολυωνύμου. Π.χ. e^z, $\sin z$ καὶ $\cos z$ εἶναι ἀκέραιαι ὑπερβατικαὶ συναρτήσεις.

Τὰ θεωρήματα ποὺ ἀκολουθοῦν ἀναφέρονται εἰς τὴν χαρακτηριστικὴν συμπεριφορὰν τῶν συναρτήσεων αὐτῶν. Ἂν $f(z)$ ἔχῃ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν δι' ὅλα τὰ z, ἡ $f(z)$ θὰ εἶναι ἀσφαλῶς ἀκεραία συνάρτησις: ἕνα πολυώνυμον μὲ βαθμὸν τὸ

1) Ἤ, κατὰ μερικοὺς συγγραφεῖς, «ὁλοκληρωτικαὶ συναρτήσεως».

μηδέν. Παριστάνει ὅμως μίαν ἐκφυλισμένην μορφὴν μιᾶς τέτοιας συναρτήσεως καὶ διὰ τὴν ὁποίαν τὰ ἀκολουθοῦντα θεωρήματα δὲν ἔχουν ἐφαρμογήν.

§ 28. Συμπεριφορὰ διὰ μεγάλας τιμὰς τοῦ $|z|$

1. Ἀρχίζομεν μὲ τὸ λεγόμενον **πρῶτον θεώρημα τοῦ Liouville**.

Θεώρημα 1. *Μία μὴ σταθερὰ ἀκεραία συνάρτησις λαμβάνει αὐθαιρέτως μεγάλας τιμὰς ἐκτὸς παντὸς κύκλου. Ἄν, δηλαδή, R καὶ G εἶναι αὐθαιρέτως δοθέντες (μεγάλοι) θετικοὶ ἀριθμοί, ὑπάρχουν σημεῖα z διὰ τὰ ὁποῖα συμβαίνει*

$$|z| > R \quad \text{καὶ} \quad |f(z)| > G.$$

Ἀπόδειξις. Ἀποδεικνύομεν τὴν πρότασιν αὐτὴν εἰς τὴν ἰσοδύναμόν της μορφήν: *Μία φραγμένη*[1] *ἀκεραία συνάρτησις ἀνάγεται ἀναγκαίως εἰς μίαν σταθεράν.* Πράγματι, ἂν ὑπάρχῃ μία σταθερὰ M διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $|f(z)| \leqslant M$ δι' ὅλα τὰ z, ἀπὸ τὴν ἀνισότητα τοῦ Cauchy,

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n},$$

προκύπτει ἀμέσως ὅτι $a_n = 0$ διὰ $n = 1, 2, \ldots$, ἀφοῦ ὡς ρ ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ὁσονδήποτε μεγάλον ἀριθμόν. Εἶναι ἄρα $f(z) \equiv a_0$.

2. Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐν λόγῳ συνάρτησις εἶναι ἀκεραία *ρητὴ* συνάρτησις (*πολυώνυμον* δηλαδή), τὸ Θεώρημα 1 «ὀξύνεται» εἰς τὸ ἀκόλουθον:

Θεώρημα 2. *Ἐὰν $f(z)$ εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ m ($m \geqslant 1$) καὶ G ἕνας αὐθαίρετος θετικὸς ἀριθμός, τότε ὁ R μπορεῖ νὰ ὁρισθῇ κατὰ τρόπον ὥστε νὰ εἶναι*

$$|f(z)| > G \quad \text{διὰ} \quad |z| > R.$$

---

1) Μία συνάρτησις λέγεται φραγμένη (περατωμένη) εἰς ἕνα χωρίον ὅταν τὸ πεδίον τιμῶν της εἰς αὐτὴν εἶναι ἕνα φραγμένον (περατωμένον) σύνολον ἀριθμῶν.

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m \\ &= z^m\left[a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^m}\right], \end{aligned}$$

ὁπότε, διὰ $|z| = r$,

$$|f(z)| \geqq r^m\left[|a_m| - \frac{|a_{m-1}|}{r} - \cdots - \frac{|a_0|}{r^m}\right].$$

Ἐπειδὴ δὲ $a_m \neq 0$, ὁ δεξιὰ ἀριθμὸς γίνεται μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν $\frac{1}{2}|a_m| r^m$, ἑπομένως καὶ ἀπὸ τὸν G καὶ μάλιστα μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν Gr^{m-1}, δι' ὅλα τὰ ἐπαρκῶς μεγάλα r.

3. Μίαν πολὺ ἁπλῆν ἀπόδειξιν τοῦ **Θεμελιώδους Θεωρήματος τῆς Ἀλγέβρας** πορίζόμεθα ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ θεωρήματα.

Θεώρημα 3. *Ἐὰν $f(z)$ εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ m, ($m \geqslant 1$), ἡ ἐξίσωσις $f(z) = 0$ ἔχει τουλάχιστον μίαν λύσιν.* Συντόμως: *Ἡ $f(z)$ ἔχει ρίζας.*

Ἀπόδειξις: Ἐὰν συνέβαινε $f(z) \neq 0$ δι' ὅλα τὰ z, ἡ συνάρτησις $\frac{1}{f(z)} = g(z)$ θὰ ἦτο ἐπίσης μία ἀκεραία (μὴ σταθερὰ) συνάρτησις. Σύμφωνα ἑπομένως μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Liouville, θὰ ὑπῆρχον σημεῖα z ἐκτὸς κάθε κύκλου, διὰ τὰ ὁποῖα θὰ ἦτο

$$|g(z)| > 1, \quad \text{δηλ.} \quad |f(z)| < 1.$$

Τοῦτο ὅμως ἀντιφάσκει πρὸς τὸ Θεώρημα 2 ποὺ ἀπεδείξαμεν ἀμέσως προηγουμένως.

Μία ἀκεραία *ὑπερβατικὴ* συνάρτησις ἠμπορεῖ νὰ μὴ ἔχῃ καμμίαν ρίζαν· ἡ e^z, παραδείγματος χάριν, εἶναι μία ἀκεραία συνάρτησις μὲ καμμίαν ρίζαν.

4. Ἐὰν τώρα ἐνδιαφερθῶμεν διὰ μίαν ἀκεραίαν *ὑπερβατικὴν* συνάρτησιν εἰς συσχετισμὸν μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Liouville, ὀξύνεται καὶ πάλιν τοῦτο εἰς τὸ ἑπόμενον:

Θεώρημα 4. *Ἐὰν $f(z)$ εἶναι ἀκεραία ὑπερβατικὴ συνάρτησις καὶ οἱ ἀριθμοὶ $G>0$, $R>0$ καὶ $m>0$ ἔχουν δοθῇ αὐθαιρέτως, θὰ ὑπάρχουν πάντοτε σημεῖα z διὰ τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι*

$$|z|>R \quad \text{καὶ} \quad |f(z)|>G\cdot|z|^m.$$

Ἀπόδειξις. Ἀποδεικνύομεν τὴν πρότασιν αὐτὴν ὅπως καὶ τὸ Θεώρημα 1, εἰς τὴν ἰσοδύναμόν της δηλαδὴ μορφήν: Ἐὰν $f(z)$ εἶναι ἀκεραία συνάρτησις καὶ ὑπάρχουν δύο θετικαὶ σταθεραὶ M καὶ m τέτοιες, ὥστε

$$|f(z)|\leqslant M|z|^m$$

δι' ὅλα τὰ z, ἀναγκαίως ἡ $f(z)$ θὰ εἶναι *πολυώνυμον* βαθμοῦ μικροτέρου ἢ ἴσου πρὸς τὸν m. Πράγματι, ἡ ἀνισότης

$$|a_n|\leqslant M\rho^{-n+m}$$

θὰ ἰσχύῃ τότε δι' ὅλα τὰ ρ. Συνεπῶς, θὰ πρέπει νὰ εἶναι $a_n=0$ διὰ $n>m$.

5. Συνέπεια ὅλων τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων εἶναι τὸ ἀξιοσημείωτον **Θεώρημα τῶν Casorati-Weierstrass**:

Θεώρημα 5. *Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κάθε κύκλου, μία ἀκεραία ὑπερβατικὴ συνάρτησις πλησιάζει ὁσονδήποτε στενῶς κάθε τιμήν. Ἤ, συμβολικῶς: Ἐὰν ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς c καὶ οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ ε καὶ R ἔχουν δοθῇ αὐθαιρέτως, ἡ ἀνισότης*

$$|f(z)-c|<\varepsilon$$

ἀληθεύει διὰ κατάλληλον ἐκλογὴν τοῦ z μὲ $|z|>R$[1].

Ἀπόδειξις: α) Ἐὰν ἡ $f(z)$ ἔχῃ *ἄπειρον πλῆθος* ἀπὸ c-σημεῖα, τότε κατὰ τὸ Θεώρημα 1 τῆς §21, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κεῖνται ὅλα εἰς τὸν κύκλον $|z|\leqslant R$. Ἑπομένως, εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου αὐτοῦ ἡ ἐξίσωσις $f(z)-c=0$ θὰ ἔχῃ λύσεις.

β) Ἐὰν ἡ $f(z)$ *δὲν* ἔχῃ c-σημεῖα, ἡ συνάρτησις $\dfrac{1}{f(z)-c}=$

1. Μὲ ἄλλας λέξεις: Ὁσονδήποτε μεγάλος ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ R, τὸ σύνολον τιμῶν w τῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου $|z|=R$ εἶναι πανταχοῦ πυκνὸν εἰς τὸ w-ἐπίπεδον.

$f_1(z)$ θὰ εἶναι μία, μὴ σταθερά, ἀκεραία συνάρτησις καί, κατὰ τὸ Θεώρημα 1, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθοῦν σημεῖα z, μὲ $|z|>R$, τέτοια ὥστε

$$|f_1(z)|>\frac{1}{\varepsilon} \text{ δηλαδή, } |f(z)-c|<\varepsilon.$$

γ) Ἐὰν ἡ $f(z)$ ἔχῃ *πεπερασμένον πλῆθος* ἀπὸ c-σημεῖα, ἂς εἶναι αὐτὰ τὰ $z_1, z_2, \ldots, z_k$ καὶ μὲ τάξεις $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, ἀντιστοίχως. Τότε, κατὰ τὸ Θεώρημα 1 τῆς §21, ἡ συνάρτησις

$$\frac{f(z)-c}{(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}}=f_1(z)$$

θὰ εἶναι ακεραία ἐπίσης συνάρτησις ἀλλὰ *χωρὶς* ρίζας· συνεπῶς, ἡ $\dfrac{1}{f_1(z)}=f_2(z)$ θὰ εἶναι ἀκεραία καὶ μάλιστα *ὑπερβατικὴ* συνάρτησις. Τότε ὅμως (Θεώρημα 4) ἡ ἀνισότης

$$|f_2(z)|>\frac{2}{\varepsilon}\cdot|z|^m$$

θὰ ἀληθεύῃ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν *κάθε* κύκλου διὰ ὡρισμένα z. Ἂς θέσωμεν $m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$. Θὰ ἔχωμεν τότε

$$(1) \qquad |f(z)-c|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{(z-z_1)^{\alpha_1}\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}}{z^m}\right|$$

καὶ ἐπειδὴ

$$(2) \qquad \left|\frac{(z-z_1)^{\alpha_1}\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}}{z^m}\right|<2$$

διὰ καταλλήλως μεγάλα $|z|$, π. χ. διὰ $|z|>R_1>R$, συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι καὶ $|z|>R_1$ εἰς τὴν (1), αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) θὰ ἰσχύουν διὰ τὰ ὡρισμένα αὐτὰ z· θὰ εἶναι ἄρα

$$|f(z)-c|<\varepsilon$$

διὰ τὰ z αὐτά.

Ἄσκησις. Ἀποδείξατε τὸ τελευταῖον θεώρημα ἁπλούστερον καὶ ταχύτερον μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ Laurent (ἑπόμεναι §§ 29 καὶ 30) διὰ τὴν συνάρτησιν

$$\frac{1}{f(z)-c}$$

καὶ διὰ μεγάλα $|z|$.

ΜΕΡΟΣ IV

ΣΗΜΕΙΑ ΑΝΩΜΑΛΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 10

ΤΟ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΤΟΥ LAURENT

§ 29. Τὸ ἀνάπτυγμα

Μέχρι τώρα ἐξητάσαμεν συναρτήσεις ἀποκλειστικῶς εἰς πεδία εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι αὐταὶ ἀναλυτικαί. Θὰ θεωρήσωμεν τώρα τὴν περίπτωσιν ὅπου ὑπάρχουν σημεῖα ἀνώμαλα εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πεδίου — καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν τὴν συνάρτησιν μονότιμον.

Διὰ νὰ ἔχωμεν κάτι τὸ συγκεκριμένον ἐνώπιόν μας, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι συνάρτησις μονότιμος καὶ ἀναλυτικὴ εἰς ἕνα κυκλικὸν δακτύλιον μὲ κέντρον z_0· τίποτε ὅμως δὲν γνωρίζομεν περὶ τῆς συμπεριφορᾶς τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου K_1 μὲ ἀκτῖνα r_1 ἢ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ μικροτέρου κύκλου K_2 μὲ ἀκτῖνα r_2:

$$0 < r_2 < r_1.$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν ἕνα ἀνάπτυγμα τὸ ὁποῖον θὰ συγκλίνῃ καὶ θὰ παριστάνῃ τὴν $f(z)$ διὰ κάθε z ἐντὸς τοῦ δακτυλίου, δηλ. διὰ κάθε z διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $r_2 < |z-z_0| = \rho < r_1$. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, ἂς ἐκλέξωμεν δύο ἀκτῖνας ρ_1 καὶ ρ_2 τέτοιες, ὥστε

$$r_2 < \rho_2 < \rho < \rho_1 < r_1$$

καὶ ἂς ὀνομάσωμεν C_1 καὶ C_2 τοὺς κύκλους μὲ αὐτὰς τὰς ἀκτῖνας καὶ κέντρον κοινὸν z_0. Ἐπειδὴ ὁ δακτύλιος ποὺ ὁρίζεται διὰ τῶν κύκλων τούτων κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ ἀρχικοῦ δακτυλίου, ἡ $f(z)$ θὰ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ δακτυλίου τούτου. Ἂς συνδέσωμεν τώρα τὰς περιφερείας τῶν C_1 καὶ C_2 διὰ δύο βοηθητικῶν ἀκτινικῶν δρόμων k', k'' καὶ οἱ ὁποῖοι δὲν διέρχονται διὰ τοῦ θεωρουμένου z. Ἀκολουθοῦντες τὴν ἰδίαν ἀκριβῶς πορείαν ὅπως εἰς τὴν § 14,4, εὑρίσκομεν

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

μὲ τὰς C_1 καὶ C_2 θετικῶς προσανατολισμένας. Ἔχοντες τώρα ὑπ' ὄψει τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος 1 τῆς § 20, παρατηροῦμεν ὅτι

α) Διὰ τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα καὶ ἀφοῦ τὸ ζ εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας C_1,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

σειρὰν συγκλίνουσαν ὁμοιομόρφως (ὁμαλῶς) δι' ὅλα τὰ ζ ἐπὶ τῆς C_1· διότι

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| \leqslant \frac{\rho}{\rho_1} < 1.$$

β) Διὰ τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα, μὲ τὸ ζ ἐπὶ τῆς C_2,

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

ὁμοίως συγκλίνουσαν ὁμοιομόρφως σειρὰν δι' ὅλα τὰ ζ ἐπὶ τῆς C_2, ἀφοῦ

$$\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{\rho_2}{\rho} < 1.$$

Ἂν τὰ εἰδικὰ αὐτὰ ἀναπτύγματα τοῦ $\dfrac{1}{\zeta - z}$ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰ ἀντίστοιχα ὁλοκληρώματα καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς ὁλοκληρώσεις κατὰ ὅρους (ἕνεκα τῆς ὁμοιομόρφου συγκλίσεως ὡς πρὸς ζ), εὑρίσκομεν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n d\zeta$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Καὶ ἐάν, διὰ συντομίαν, θέσωμεν

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta = a_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

καὶ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} = a_{-n},$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n},$$

ποὺ γράφεται συνήθως συντομώτερον εἰς τὴν μορφὴν

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Ὡδηγήθημεν ἔτσι εἰς μίαν παράστασιν τῆς $f(z)$ εἰς μορφὴν ἀθροίσματος μιᾶς δυναμοσειρᾶς Σ_1 κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ $z - z_0$ καὶ μιᾶς δυναμοσειρᾶς Σ_2 κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ $z - z_0$. Καὶ αἱ δύο αὐταὶ σειραὶ συγκλίνουν ὅταν τὸ σημεῖον z κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου μεταξὺ τῶν περιφερειῶν K_1 καὶ K_2. Διότι εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν a_n καὶ a_{-n} εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ τὴν μορφὴν τῶν δρόμων ὁλοκληρώσεως εἰς τὰ ἐπὶ μέρους ὁλοκληρώματα, διὰ τῶν ὁποίων ὁρίζονται οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, ἄρα καὶ τῶν ἀκτίνων ρ_1, ρ_2, ἀντιστοίχως. Κατὰ δὲ τὴν § 14,4, ὁποιοσδήποτε ἄλλος κλειστὸς δρόμος ἐντὸς τοῦ ἐν λόγῳ δακτυλίου καὶ ὁ ὁποῖος περιβάλλει τὸν K_2 μίαν φοράν, ἠμπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῇ ἀντὶ τοῦ C_1, ἀντιστοίχως, C_2.

Ἡ σειρὰ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ὀνομάζεται τὸ **ἀνάπτυγμα Laurent τῆς f(z)** διὰ τὸ δακτυλιδωτὸν χωρίον.

§ 30. Διασαφήσεις καὶ Παραδείγματα

Διὰ τὴν πλήρη κατανόησιν τοῦ τύπου τῆς προηγουμένης παραγράφου, θεωροῦμεν ἰδιαιτέρως τὴν καθεμίαν ἀπὸ τὰς δύο συναρτήσεις ποὺ παριστάνονται ἀπὸ τὰ ἀθροίσματα Σ_1 καὶ Σ_2.

$$f_1(z) = \Sigma_1 = \sum_{0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

εἶναι μία συνήθης δυναμοσειρὰ ὡς πρὸς $z - z_0$. Συγκλίνει ἐπομένως δι᾽ *ὅλα* τὰ z ἐντὸς τοῦ K_1 καὶ παριστάνει εἰς τὸ χωρίον αὐτὸ μίαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν.

῾Η

$$f_2(z) = \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

εἶναι ἐπίσης μία συνήθης δυναμοσειρά· διότι ἂν θέσωμεν

$$a_{-n} = b_n \quad \text{καὶ} \quad (z - z_0)^{-1} = z'$$

λαμβάνομεν

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z'^n.$$

Ἐπειδὴ ἡ Σ_2 συγκλίνει βεβαίως διὰ $r_2 < |z - z_0| < r_1$, ἡ νέα σειρὰ θὰ συγκλίνῃ ἀσφαλῶς καὶ διὰ

$$\frac{1}{r_1} < |z'| < \frac{1}{r_2}.$$

Ἐπομένως, ἀφοῦ πρόκειται περὶ συνήθους δυναμοσειρᾶς ὡς πρὸς z', θὰ συγκλίνῃ δι᾽ *ὅλα* τὰ z' διὰ τὰ ὁποῖα $|z'| < \frac{1}{r_2}$ καὶ θὰ παριστάνῃ μίαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν τοῦ z' ἐντὸς τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Ἂν δὲ ἐπανέλθωμεν εἰς τὰ z, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ Σ_2 συγκλίνει δι᾽ *ὅλα* τὰ z διὰ τὰ ὁποῖα

$$|z - z_0| > r_2,$$

πανταχοῦ δηλαδὴ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ K_2 ὅπου καὶ παριστάνει μίαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν τοῦ z. Ὅπως βλέπομεν λοιπόν, ἡ $f(z)$ ἀναλύεται εἰς δύο συναρτήσεις, τὴν μίαν ἀναλυτικὴν ἐντὸς τοῦ K_1 καὶ τὴν ἄλλην ἀναλυτικὴν ἐκτὸς τοῦ K_2. *Καὶ αἱ δύο* αὐταὶ συναρτήσεις εἶναι ἀναλυτικαὶ ἐντὸς τοῦ δακτυλίου.

Κατόπιν τούτων καὶ λαμβανομένης ὑπ᾽ ὄψιν τῆς μοναδικότητος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ Laurent—τὴν ὁποίαν ἀποδεικνύομεν ἀμέσως κατωτέρω—προκύπτει ἀμέσως ὅτι τὸ ἀκριβὲς χωρίον συγκλίσεως τῆς σειρᾶς αὐτῆς εἶναι ὁ εὐρύτερος δακτύλιος ποὺ ἠμποροῦμε νὰ σχηματίσωμεν ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ διὰ ὁμοκέντρου συστολῆς τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου K_2 καὶ διαστολῆς τοῦ ἐξωτερικοῦ κύκλου K_1 καὶ ὁ ὁποῖος δακτύλιος νὰ στερῆται ἀνωμάλων σημείων. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, θὰ ὑπάρχῃ τουλάχιστον ἕνα ἀνώμαλον σημεῖον ἐπὶ τῆς κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς δύο περιφερείας ποὺ ἀποτελοῦν τὸ σύνορον τοῦ δακτυλίου. (Διότι ἂν δὲν ὑπῆρχε κανένα ἀνώμαλον σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ K_2, τὸ ἐσωτερικὸν τότε χωρίον καί, μαζὶ μὲ αὐτό, ἡ $f_2 = \Sigma_2$ θὰ ἀπηλείφοντο τελείως κατὰ τὴν διαδικασίαν αὐτήν).

Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ Laurent ποὺ εὕρομεν ἀνωτέρω εἶναι καὶ τὸ μόνον δυνατόν, ὅπως συμβαίνει καὶ μὲ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ Taylor. Ἂς ὑποθέσωμεν πράγματι ὅτι τὰ δύο ἀναπτύγματα

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{καὶ} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$$

ἰσχύουν ταυτοχρόνως εἰς ἕνα κοινὸν δακτυλιδωτὸν χωρίον. Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύο ἀναπτυγμάτων ἐπὶ $(z - z_0)^{-k-1}$ καὶ ὁλοκληρώσεως κατὰ μῆκος μιᾶς ὁμοκέντρου περιφερείας κειμένης ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τοῦ δακτυλίου, προκύπτουν δύο σειραὶ αἱ ὁποῖαι συγκλίνουν ὁμοιομόρφως ἐντὸς τοῦ κύκλου τούτου ὡς πρὸς z. Τότε ὅμως θὰ εἶναι

$$2\pi i a_k = 2\pi i c_k \quad \text{δηλ.} \quad a_k = c_k$$

διὰ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ·

Παραδείγματα. Τὰ ἀκολουθοῦντα ἀναπτύγματα ἀνευρίσκονται χωρὶς δυσκολίαν:

$$(1) \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad (1 < |z| < 2),$$

ἢ

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}-1}{z^n}, \qquad (2 < |z| < \infty).$$

Ὅπως βλέπομεν, ἔχομεν ἐδῶ δύο διαφορετικὰ ἀναπτύγματα διὰ τὴν *ἰδίαν* συνάρτησιν. Τοῦτο ὅμως δὲν ἀντιφάσκει πρὸς τὸ θεώρημα ποὺ μόλις ἀπεδείξαμεν, ἀφοῦ τὰ ἀναπτύγματα αὐτὰ ἰσχύουν διὰ *διαφορετικὰ δακτυλιδωτὰ χωρία.*

$$(2) \quad e^z + e^{\frac{1}{z}} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{|n|!},$$

$$(0 < |z| < \infty),$$

$$(3) \quad \sin\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{5}{6}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^4} + \cdots, \quad (1 < |z| < \infty).$$

Ἄσκησις. Νὰ ἀναπτυχθοῦν αἱ συναρτήσεις

$$\frac{1}{e^{1-z}} \quad \text{διὰ} \quad |z| > 1$$

καὶ

$$\sqrt{(z-1)(z-2)} \quad \text{διὰ} \quad |z| > 2$$

εἰς σειρὰς τοῦ Laurent.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 11

ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΤΥΠΟΙ ΑΝΩΜΑΛΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

§ 31 Οὐσιώδη καὶ μὴ οὐσιώδη ἀνώμαλα σημεῖα ἢ πόλοι

Ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ μόνον ἀνώμαλον σημεῖον τῆς $f(z)$ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ K_2 εἶναι τὸ κέντρον z_0, εἶναι ἀξία εἰδικῆς θεωρήσεως. Τὸ ἀνάπτυγμα Laurent διὰ τὴν συνάρτησιν αὐτὴν

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

συγκλίνει τότε δι' ὅλα τὰ z διὰ τὰ ὁποῖα $0 < |z-z_0| < r_1$, ὅπου τώρα r_1 (>0) εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ z_0 ἀπὸ τὸ πλησιέστερον πρὸς αὐτὸ ἀνώμαλον σημεῖον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ z_0 λέγεται *μεμονωμένον ἀνώμαλον σημεῖον* καὶ ὑπάρχει πάντοτε ἕνα ἀνάπτυγμα τῆς μορφῆς (1) εἰς ἕνα τέτοιο σημεῖον ὅταν ἡ $f(z)$ εἶναι μονότιμος ἐκεῖ. Ἂν τὸ μέρος τοῦ ἀναπτύγματος (1) ποὺ περιέχει κατιούσας δυνάμεις τοῦ $z-z_0$ ἐπαναγραφῇ (βλ. ἀνωτέρω) εἰς τὴν μορφὴν $\Sigma b_n z'^n$, φανερὸν εἶναι ὅτι, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, θὰ παριστάνῃ μίαν *ἀκεραίαν* συνάρτησιν. Καθόσον δὲ ἡ ἀκεραία αὐτὴ συνάρτησις εἶναι ὑπερβατικὴ ἢ ρητὴ — καθόσον δηλαδὴ τὸ μέρος τοῦ ἀναπτύγματος ποὺ περιέχει τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ $z-z_0$ ἔχει ἄπειρον πλῆθος ὅρων ἢ πεπερασμένον μόνον πλῆθος ὅρων (ἀλλὰ τουλάχιστον ἕνα) — τὸ z_0 θὰ λέγεται *οὐσιωδῶς*, ἀντ., *μὴ οὐσιωδῶς* ἀνώμαλον σημεῖον τῆς συναρτήσεως. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, καλεῖται ἁπλῶς **πόλος**. Ἂν a_{-m} ($m \geq 1$) εἶναι ὁ τελευταῖος μὴ μηδενικὸς συντελεστής, τὸ z_0 λέγεται *πόλος τάξεως* m. Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς σειρᾶς ἐπὶ $(z-z_0)^m$ (ἀλλὰ ὄχι ἐπὶ μικροτέραν δύναμιν) μετατρέπει τὴν $f(z)$ εἰς συνάρτησιν ἀναλυτικὴν εἰς τὸ z_0 καθὼς καὶ ἐντὸς μιᾶς περιοχῆς αὐτοῦ, καὶ ἡ ὁποία δὲν μηδενίζεται εἰς τὸ z_0.

Οἱ ὅροι «πόλος» καὶ «οὐσιωδῶς ἀνώμαλον σημεῖον» ἐφαρμόζονται διὰ μεμονωμένα μόνον σημεῖα, εἰς τὴν περιοχὴν τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις εἶναι μονότιμος. Τὸ μέρος τοῦ ἀναπτύγματος μὲ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ $z-z_0$ καλεῖται τὸ *πρωτεῦον μέρος* τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ z_0. Τὸ θεώρημα ποὺ ἀκολουθεῖ προβάλλει τὴν μεγάλην διαφορὰν χαρακτῆρος μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν εἰδῶν ἀνωμάλων σημείων.

Θεώρημα 1. *Ἐὰν ἡ $f(z)$ ἔχῃ ἕνα πόλον εἰς τὸ z_0 — ἐὰν δηλαδὴ $\Sigma_2 = \Sigma b_n z'^n$ εἶναι ἀκεραία ρητὴ συνάρτησις — καὶ $G > 0$ εἶναι τυχὼν δοθεὶς ἀριθμός, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀριθμὸς $\delta > 0$ τέτοιος, ὥστε νὰ εἶναι*

$$| f(z) | > G$$

δι' ὅλα τὰ $| z-z_0 | < \delta$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι $| f(z) |$ γίνεται πολὺ μεγάλος ἀριθμὸς δι' ὅλα τὰ z τὰ ἐπαρκῶς πλησίον τοῦ z_0, ἢ ὅτι, ὅταν τὸ z πλησιάζῃ τὸν πόλον, ἡ συνάρτησις πλησιάζει τὸ ∞ (πρβ. § 28,2).

Ἀπόδειξις: Ἄς εἶναι z_0 ἕνας πόλος τάξεως α· θὰ ἔχωμεν

$$f(z) = \frac{a_{-\alpha}}{(z-z_0)^\alpha} + \cdots + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

$$= \frac{a_{-\alpha}}{(z-z_0)^\alpha}\left\{1 + b_1(z-z_0) + \cdots\right\},$$

$$\text{μὲ } a_{-\alpha} \neq 0,\ b_k = \frac{a_{-\alpha+k}}{a_{-\alpha}},\ k = 1, 2, \ldots).$$

Ἐκλέγομεν δ τόσον μικρόν, ὥστε $\delta^\alpha < | a_{-\alpha} | /2G$(*) καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν παραστάσεως νὰ εἶναι $> \frac{1}{2}$ δι' ὅλα τὰ $| z-z_0 | < \delta$· τοῦτο δὲ γίνεται, ἀφοῦ πρόκειται περὶ δυναμοσειρᾶς μὲ τὸν σταθερὸν ὅρον + 1. Δι' ὅλα τότε τὰ $| z-z_0 | < \delta$, θὰ εἶναι

$$| f(z) | \geq \frac{| a_{-\alpha} |}{\delta^\alpha} \cdot \frac{1}{2} > G, \quad (*) \qquad \text{Ο.ε.δ.}$$

(*) Σ.Μ. Ὁ ἐκθέτης καὶ ὁ δείκτης εἰς τὰς ἀνισότητας αὐτῆς νὰ ἀναγνωσθοῦν α καὶ — α, ἀντιστοίχως.

2. Ἡ ἀκολουθοῦσα πρότασις εἶναι τὸ ἀνάλογον τοῦ Θεωρήματος 5 τῆς § 28 καὶ ὀνομάζεται ἐπίσης **Θεώρημα τῶν Casorati - Weierstrass.**

Θεώρημα 2. *Ἐὰν ἡ $f(z)$ ἔχῃ ἕνα οὐσιωδῶς ἀνώμαλον σημεῖον εἰς τὸ z_0 — ἐὰν δηλαδή, ἡ $\Sigma_2 = \Sigma b_n z'^n$ εἶναι μία ἀκεραία ὑπερβατικὴ συνάρτησις τοῦ z' — ἡ $f(z)$ πλησιάζει αὐθαιρέτως στενῶς κάθε ἀριθμὸν εἰς κάθε περιοχὴν τοῦ σημείου z_0. Ἀκριβέστερον: Ἐὰν c εἶναι ἕνας αὐθαίρετος μιγαδικὸς ἀριθμὸς καὶ δ καὶ ε εἶναι αὐθαιρέτως (μικροὶ) θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ ὑπάρχουν πάντοτε σημεῖα z διὰ τὰ ὁποῖα*

$$| z-z_0 | < \delta \text{ καὶ } | f(z) - c | < \varepsilon\ [1].$$

Ἀπόδειξις: Μεταφέρομεν τὸν σταθερὸν ὅρον εἰς τὸ δεύτερον ἄθροισμα καὶ θέτομεν:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \varphi_1(z) + \varphi_2(z).$$

Ἡ $\varphi_1(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ z_0 καὶ $\varphi_1(z_0) = 0$. Εἶναι δυνατὸν ἑπομένως νὰ εὕρωμεν ἕνα $\delta_1 \leq \delta$ ὥστε νὰ εἶναι $| \varphi_1(z) | < \frac{1}{2}\varepsilon$ δι' ὅλα τὰ $| z-z_0 | < \delta_1$. Ἀφ' ἑτέρου, ἡ $\varphi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z'^n$ εἶναι μία ἀκεραία *ὑπερβατικὴ* συνάρτησις τοῦ z' καὶ πληροῦται ἄρα, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν Casorati - Weierstrass τῆς § 28, ἡ συνθήκη $| \varphi_2(z) - c | < \frac{1}{2}\varepsilon$ δι' ὡρισμένα πολὺ μεγάλου μέτρου z', τέτοια π.χ., διὰ τὰ ὁποῖα $| z' | > \frac{1}{\delta_1}$. Τοῦτο δὲ σημαίνει ὅτι $| \varphi_2(z) - c | < \frac{1}{2}\varepsilon$ διὰ ὡρισμένα z, διὰ τὰ ὁποῖα συμβαίνει $| z-z_0 | < \delta_1$.

1. Μὲ ἄλλας λέξεις: Ἐὰν δοθῇ ἕνας ὁσονδήποτε μικρὸς $\delta < 0$, τὸ σύνολον τῶν τιμῶν w τῆς $f(z)$ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου $| z-z_0 | < \delta$ εἶναι πανταχοῦ πυκνὸν εἰς τὸ w - ἐπίπεδον.

Διὰ τὰ z λοιπὸν αὐτὰ θὰ ἔχωμεν

$$|f(z)-c| \leqq |\varphi_1(z)| + |\varphi_2(z)-c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{Ο.ε.δ.}$$

Παραδείγματα.

1. Ἡ $e^{\frac{1}{z}}$ ἔχει ἕνα οὐσιωδῶς ἀνώμαλον σημεῖον εἰς τὸ $z=0$. (πρβλ. § 30, Παρ/μα 2).

2. Μία ρητὴ συνάρτησις

$$f(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdot\cdot\cdot+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdot\cdot\cdot+b_kz^k}$$

ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ὡς ἀνώμαλα σημεῖα μόνον τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα εἶναι ρίζαι τοῦ παρανομαστοῦ. Ἄς εἶναι z_1 μία ρίζα τοῦ παρανομαστοῦ τάξεως α καὶ ἐπίσης ρίζα τοῦ ἀριθμητοῦ τάξεως β ($\alpha \geqq 0, \beta \geqslant 0$). πρβ. σελ. 101, ὑποσημείωσις). Εὔκολα τότε βλέπομεν ὅτι ἡ $f(z)$ ἔχει πόλον εἰς τὸ z_1 τάξεως $\alpha-\beta$ ἄν $\alpha>\beta$, ἢ ρίζαν τάξεως $\beta-\alpha$, ἄν $\beta \leqq \alpha$[1]. (Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ φαίνεται ἤδη ὅτι εἶναι ἐπωφελὲς νὰ θεωροῦμεν τοὺς πόλους ὡς ρίζας ἀρνητικῆς τάξεως). Συνεπῶς, εἰς οἱανδήποτε καθορίσιμον ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν ἀρχήν, μία ρητὴ συνάρτησις δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχει ἄλλα ἀνώμαλα σημεῖα παρὰ μόνον πόλους (πρβ. § 32. Παρ/τα 2 καὶ 3 καθὼς καὶ τὸ Θεώρημα 1).

3. Αἱ συναρτήσεις $\tan z$ καὶ $\cot z$ εἶναι ἀσυνεχεῖς εἰς τὰς ρίζας τῶν $\cos z$ καὶ $\sin z$, ἀντιστοίχως. Εἶναι ἄρα αἱ ρίζαι αὐταὶ σημεῖα ἀνώμαλα διὰ τὰς συναρτήσεις $\tan z$ καὶ $\cot z$, ἀντιστοίχως — καὶ μάλιστα πόλοι πρώτης τάξεως, ὡς εὔκολα διαπιστώνεται.

Πράγματι, ἂς ἐξετάσωμεν τὴν συμπεριφορὰν τῆς συναρτήσεως $\cot z$ εἰς τὸ σημεῖον $z=0$. Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι πάντως μεμονωμένον ἀνώμαλον σημεῖον, ἀφοῦ αἱ πλησιέστεραι νέαι ρίζαι τοῦ $\sin z$ εἶναι $\pm\pi$. Κατὰ συνέπειαν, ἐπιδέχεται ἡ $\cot z$ ἕνα ἀνάπτυγμα κατὰ Laurent, διὰ τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων ὅτι θὰ πρέπει ἀναγκαίως νὰ ἰσχύῃ δι' ὅλα τὰ z ποὺ πληροῦν τὰς ἀνισότητας

$$0<|z|<\pi$$

1. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ $f(z_1)$ ὁρίζεται ὡς ἡ ὁριακὴ τιμὴ $\lim\limits_{z\to z_1} f(z)$.

καὶ μόνον διὰ τὰ σημεῖα αὐτά. Ἐὰν δὲ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τῶν δυναμοσειρῶν διὰ τὰς συναρτήσεις $\cos z$ καὶ $\sin z$ (πρβλ. *Στοιχεῖα*, §43), εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀρχὴ τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \cdot\cdot\cdot\cdot$$

Ἕνεκα τῆς μοναδικότητος ἑνὸς τέτοιου ἀναπτύγματος (βλ. § 30), βλέπομεν ὅτι τοῦτο εἶναι καὶ τὸ ἀνάπτυγμα Laurent διὰ τὴν συνάρτησιν $\cot z$ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $z=0$. Ἀλλ' ἐκ τούτου φαίνεται ἀμέσως ὅτι τὸ $z=0$ εἶναι πόλος τῆς $\cot z$ τάξεως πρώτης.

Δὲν θὰ εἰσέλθωμεν εἰς τὴν ἔρευναν ἐπὶ τῶν μὴ μεμονωμένων ἀνωμάλων σημείων καὶ ἐπὶ τῶν ἀνωμάλων σημείων εἰς περιοχὴν τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι μονότιμος (ὡς αἱ συναρτήσεις $\log z$ καὶ $\sqrt[m]{z}$ εἰς τὸ $z=0$). Διὰ τὰ τελευταῖα ταῦτα σημεῖα, παραπέμπομεν εἰς: *Θεωρία Συναρτήσεων*, *Τομ.* II, Κεφ. 4 τοῦ ἰδίου συγγραφέως.

§ 32. Συμπεριφορὰ τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων εἰς τὸ ἄπειρον

Ὑπάρχει μία παράλειψις εἰς τὸν ὁρισμόν μας τῆς πλήρους ἀναλυτικῆς συναρτήσεως (§ 24). Θὰ πρέπει ἀκόμη νὰ καταλήξωμεν εἰς συμφωνίας περὶ τοῦ τρόπου περιγραφῆς τῆς συμπεριφορᾶς μιᾶς συναρτήσεως εἰς τὸ ἄπειρον. Ὅπως καὶ προηγουμένως, περιοριζόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἡ $f(z)$ εἶναι μονότιμος καὶ ἀναλυτικὴ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου ∞ (βλ. § 2).

Ἔστω $f(z)$ μία μονότιμος καὶ ἀναλυτικὴ συνάρτησις διὰ $|z|>R$. Ἐὰν θέσωμεν $z=\frac{1}{z'}$ ἡ συνάρτησις $\varphi(z')$, ποὺ ὁρίζεται διὰ $|z'|<\frac{1}{R}$ διὰ τῆς $f(z)=f\left(\frac{1}{z'}\right)=\varphi(z')$, θὰ εἶναι μονότιμος ἐπίσης καὶ ἀναλυτικὴ εἰς τὴν περιοχὴν αὐτήν, μὲ πιθανὴν ἐξαίρεσιν (ὡς πρὸς τὴν ἀναλυτικότητα) τὸ σημεῖον $z'=0$.

Θέτομεν τώρα τὸν ἑξῆς ὁρισμόν.

Ὁρισμός. *Ὡς συμπεριφορὰν τῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς τὸ ἄπειρον ἐννοοῦμεν τὴν συμπεριφορὰν τῆς συναρτήσεως $\varphi(z')$ εἰς τὸ σημεῖον $z'=0$.*

Μὲ περισσοτέρας λεπτομερείας:

Κατὰ τὰς ὑποθέσεις μας, ἡ $\varphi(z')$ εἰς τὸν κύκλον $0<|z'|<\frac{1}{R}$ ἐπιδέχεται ἕνα ἀνάπτυγμα κατὰ Laurent,

$$\varphi(z') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z'^n, \tag{1}$$

μέσῳ τοῦ ὁποίου, κατὰ τὴν τελευταίαν μας παράγραφον, ἀναγνωρίζομεν τὴν συμπεριφορὰν τῆς $\varphi(z')$ εἰς τὸ σημεῖον $z'=0$. Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦτο διαφέρει μόνον κατὰ τὸν συμβολισμὸν ἀπὸ τὸ ἀνάπτυγμα Laurent τῆς $f(z)$ διὰ $|z|>R$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \tag{2}$$

καὶ τὸ ὁποῖον ἀσφαλῶς ὑπάρχει· διότι, $a_n=-b_n$ καὶ $z=\frac{1}{z'}$.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν προσδώσωμεν εἰς τὴν $f(z)$ τὴν συμπεριφορὰν τῆς $\varphi(z')$, ὅπως ἀποκαλύπτεται αὕτη ἐκ τοῦ (1), βλέπομεν ὅτι «τὸ σημεῖον ∞» εἶναι τώρα τὸ ἐν λόγῳ μεμονωμένον σημεῖον, ὅτι τὸ μέρος τοῦ (2) μὲ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις θὰ πρέπει νὰ θεωρῆται ὡς τὸ πρωτεῦον μέρος τῆς $f(z)$—καὶ ὅτι, κατὰ συνέπειαν,

α) Ἡ $f(z)$ ἔχει τὸ ∞ ὡς *οὐσιωδῶς ἀνώμαλον σημεῖον*, ἐὰν εἰς τὴν σειρὰν (2) ἐμφανίζεται *ἄπειρον πλῆθος* ἀπὸ *θετικὰς* δυνάμεις.

β) Ἡ $f(z)$ ἔχει τὸ σημεῖον ∞ *ὡς πόλον τάξεως* β, ἐὰν μόνον *πεπερασμένον πλῆθος θετικῶν* δυνάμεων ἐμφανίζεται εἰς (2), εἰς τὰς ὁποίας a_β εἶναι ὁ τελευταῖος συντελεστὴς ποὺ εἶναι διάφορος ἀπὸ τὸ 0 ($\beta \geq 1$).

γ) Ἡ $f(z)$ εἶναι συνάρτησις *ἀναλυτικὴ* εἰς τὸ ∞, ἐάν, *δὲν ὑπάρχουν* θετικαὶ δυνάμεις εἰς τὸ (2). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ a_0 λαμβάνεται ὡς *ἡ τιμὴ* τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ ∞· δηλαδή, $f(\infty)=a_0$. Ἐὰν δὲ $a_{-1}=\cdots=a_{-(p-1)}=0$, $a_{-p}\neq 0$, τὸ ∞ θὰ εἶναι τότε ἕνα «a_0-σημεῖον τάξεως p».

Παραδείγματα

1. Ἡ $\frac{1}{1-z}$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ $z=\infty$ (διότι εἶναι ἴση πρὸς $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$ διὰ $|z|>1$) καὶ ἔχει εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ μίαν ρίζαν πρώτης τάξεως.

2. Κάθε ρητὴ συνάρτησις μὲ βαθμὸν k τοῦ παρονομαστοῦ μεγαλύτερον ἢ ἴσον πρὸς τὸν βαθμὸν m τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ σημεῖον $z=\infty$· τὸ $f(\infty)$ εἶναι ἢ δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδὲν καθόσον $k>m$ ἢ $k=m$, ἀντιστοίχως.

3. Κάθε ρητὴ συνάρτησις, διὰ τὴν ὁποίαν $k<m$, ἔχει πόλον τάξεως $m-k$ τὸ σημεῖον $z=\infty$. Εἰδικῶς, ἕνα πολυώνυμον βαθμοῦ m ἔχει πόλον τάξεως m τὸ σημεῖον $z=\infty$.

4. Αἱ συναρτήσεις e^z, $\sin z$, $\cos z$ καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι ἀκέραιαι ὑπερβατικαὶ συναρτήσεις ἔχουν ὡς οὐσιωδῶς ἀνώμαλον σημεῖον τὸ $z=\infty$.

Ἐπειδή, κατὰ τοὺς νέους μας ὁρισμούς, δὲν κάμνομεν ἄλλο ἀπὸ μίαν μεταφορὰν συμβολισμοῦ, τὰ δύο θεωρήματα τῆς προηγουμένης παραγράφου ἐξακολουθοῦν νὰ ἰσχύουν εἰς $z=\infty$ μὲ μερικὰς παραλλαγὰς εἰς τὴν διατύπωσιν:

Θεώρημα 1. *Ἐὰν ἡ $f(z)$ ἔχῃ ὡς πόλον τὸ ∞ καὶ ἐκλέξωμεν ἕνα ἀριθμὸν $G>0$, εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχίσωμεν εἰς τὸ ∞ μίαν καταλλήλως μικρὰν περιοχὴν αὐτοῦ ὥστε νὰ εἶναι $|f(z)|>G$ δι' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς*[1] *αὐτῆς — δι' ὅλα δηλ. τὰ z μὲ $|z|>R$, ὅπου R ἐπαρκῶς μεγάλος ἀριθμός.*

Ἔχομεν ἐπίσης καὶ τὸ ἀντίστοιχον τοῦ θεωρήματος τῶν **Casorati - Weierstrass**:

1. Ὡς «μικρὰν περιοχὴν τοῦ ∞» ἐννοοῦμεν (βλ. § 2) τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς μεγάλου κύκλου περὶ τὴν ἀρχήν.

Θεώρημα 2. *'Εὰν ἡ $f(z)$ ἔχῃ ὡς οὐσιωδῶς ἀνώμαλον σημεῖον τὸ ∞, c εἶναι δοθεὶς μιγαδικὸς ἀριθμὸς καὶ ε, R δοθέντες θετικοὶ ἀριθμοί, ὑπάρχουν πάντοτε σημεῖα z διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι*

$$|z| > R \text{ καὶ } |f(z) - c| < \varepsilon.$$

'Ως ἐφαρμογὴν τῶν θεωρήσεων αὐτῶν, ἀποδεικνύομεν τὸ ἑπόμενον σπουδαῖον **Θεώρημα τοῦ Riemann**:

Θεώρημα 3. *'Εάν, εἰς μίαν ὡρισμένην περιοχὴν ἑνὸς σημείου z_0 (τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ εἶναι καὶ τὸ ∞), ἡ $f(z)$ εἶναι μονότιμος καί, μὲ ἐξαίρεσιν τοῦ z_0, ἀναλυτικὴ συνάρτησις, τὸ σημεῖον z_0 θὰ εἶναι*

α) σημεῖον ὁμαλὸν ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἡ $f(z)$ εἶναι φραγμένη εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ z_0,

β) πόλος, ὅταν καὶ μόνον ὅταν, ἐὰν δοθῇ $G > 0$, ἡ περιοχὴ τοῦ z_0 νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ συρρικνωθῇ περὶ τὸ σημεῖον αὐτὸ ἔτσι, ὥστε εἰς τὴν νέαν περιοχὴν τοῦ z_0 νὰ συμβαίνῃ $|f(z)| > G$ δι' ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς,

γ) οὐσιωδῶς ἀνώμαλον σημεῖον ὅταν οὔτε ἡ πρώτη οὔτε ἡ δευτέρα συνθήκη εἶναι δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθῇ.

'Απόδειξις: Κατὰ τὰς ὑποθέσεις, ἡ $f(z)$ ἠμπορεῖ νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ σειρὰν τοῦ Laurent εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ z_0. 'Η σειρὰ αὐτὴ θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{ἢ} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

καθόσον τὸ z_0 κεῖται εἰς τὸ πεπερασμένον μέρος τοῦ ἐπιπέδου ἢ εἶναι τὸ σημεῖον ∞, ἀντιστοίχως.

Τὰ δύο θεωρήματα τῆς παραγράφου αὐτῆς καὶ τῆς προηγουμένης, μαζὶ μὲ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι φραγμένη εἰς μίαν περιοχὴν ἑνὸς ὁμαλοῦ σημείου, δεικνύουν ὅτι αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι εἶναι ἀναγκαῖαι. Ὅτι δὲ εἶναι καὶ ἐπαρκεῖς, ἕπεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν παρατήρησιν ὅτι αἱ τρεῖς δυνατότητες διὰ τὴν συμπεριφορὰν τῆς $f(z)$ εἰς τὸ z_0 εἶναι ἀμοιβαίως ἀποκλειστικαὶ καὶ αἱ μόναι νοηταί.

Ἄσκησις. Ποῖον τὸ εἶδος τῆς ἀνωμαλίας διὰ τὴν κάθε μίαν ἀπὸ τὰς τρεῖς συναρτήσεις

$$\frac{z^2+4}{e^z}, \ \cos z - \sin z, \ \cot z,$$

εἰς τὸ σημεῖον $z = \infty$;

§ 33. Τὸ θεώρημα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων

Ἂν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ z_0, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy θὰ ἔχωμεν

$$\int f(z)dz = 0$$

ἐὰν ὡς δρόμος ὁλοκληρώσεως ἐκλεγῇ ἕνας μικρὸς κλειστὸς δρόμος καὶ ὁ ὁποῖος νὰ περιβάλλῃ τὸ σημεῖον z_0 κατὰ τὴν θετικὴν φοράν. 'Εὰν ὅμως ἡ $f(z)$ ἔχῃ τὸ z_0 ὡς μεμονωμένον ἀνώμαλον σημεῖον, εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ ὁποίου ἡ $f(z)$ εἶναι μονότιμος καὶ ἀναλυτική, τὸ ὁλοκλήρωμα τότε αὐτὸ θὰ εἶναι, ἐν γένει, διάφορον ἀπὸ τὸ μηδέν. Τὴν τιμήν του ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν ἀμέσως. Πράγματι, ἐπειδὴ ἡ $f(z)$ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ σειρὰν τοῦ Laurent εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ z_0 $(0 < |z - z_0| < r)$, κατὰ τὴν § 29 θὰ πληροῦται ἡ σχέσις

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = a_{-1}.$$

'Η τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος αὐτοῦ ἤ, πρᾶγμα ποὺ εἶναι τὸ ἴδιον, ὁ συντελεστὴς τοῦ ὅρου εἰς τὸ ἀνάπτυγμα Laurent μὲ ἐκθέτην -1, ὀνομάζεται τὸ **ὁλοκληρωτικὸν ὑπόλοιπον** τῆς $f(z)$ εἰς τὸ z_0 [1] καὶ ὁ ἀνωτέρω τύπος παριστάνει, κατὰ μίαν ὡρισμένην ἔννοιαν, μίαν ἐπέκτασιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Cauchy.

Γενικώτερον, ἠμπορεῖ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἑπόμενον θεώρημα, καλούμενον καὶ **θεώρημα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων**.

1. Τὸ σημεῖον z_0 θεωρεῖται καὶ ἐδῶ κείμενον εἰς τὸ πεπερασμένον μέρος τοῦ ἐπιπέδου.

Θεώρημα 1. *Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι μονότιμος καὶ ἀναλυτικὴ εἰς ἕνα τυχὸν χωρίον* **Τ**. *Ἐὰν C εἶναι ἕνας ἁπλοῦς κλειστὸς δρόμος, κείμενος ἐντὸς τοῦ* **Τ** *καὶ μὲ πεπερασμένον μόνον πλῆθος ἀνωμάλων σημείων εἰς τὸ ἐσωτερικόν του, τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \begin{cases}\text{τὸ ἄθροισμα τῶν ὁλοκλ. ὑπολοίπων τῆς } f(z) \text{ εἰς} \\ \text{τὰ ἀνώμαλα σημεῖα τὰ ἐγκλειόμενα ὑπὸ τοῦ } C.\end{cases}$$

Ἀπόδειξις: Ἂν $z_1\ z_2, \ldots z_m$ εἶναι τὰ πεπερασμένου πλήθους ἀνώμαλα σημεῖα καὶ $C_1, C_2 \ldots, C_m$ εἶναι κύκλοι περὶ αὐτά, ἐπαρκῶς μικροὶ καὶ θετικῶς προσανατολισμένοι, τότε, κατὰ τὸ Θεώρημα 2 τῆς § 14, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_m} f(z)dz.$$

Ἀποδεικνύεται ἔτσι τὸ θεώρημα, ἀφοῦ τὰ ἐν λόγῳ ὑπόλοιπα εἶναι οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.

Εἰς τὰς ἐφαρμογάς, τὸ ὁλοκλ. ὑπόλοιπον ὑπολογίζεται, ἐν γένει, ἀπὸ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ Laurent καὶ ἔτσι γίνεται δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῆς τιμῆς τοῦ ὁλοκληρώματος. Τὸ Θεώρημα 1 ἔχει πολυαρίθμους καὶ σπουδαίας ἐφαρμογάς, ἀπὸ τὰς ὁποίας μερικὰς μόνον καὶ τυχαίως ἐκλεγείσας παραθέτομεν ἐδῶ.

1. Ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις τοῦ θεωρήματος τῶν ὁλοκλ. ὑπολοίπων, ἂς θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν $m = 0$ — κατὰ τὴν ὁποίαν δηλαδὴ ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ χωρίου τοῦ περιοριζομένου ὑπὸ τοῦ δρόμου C[1] καὶ ἂς δεχθῶμεν ἀκόμη ὅτι $f(z) \neq 0$ κατὰ μῆκος τοῦ C. Κατὰ τὸ Θεώρημα 1 τῆς § 21, ὁ C θὰ ἐγκλείῃ πεπερασμένον μόνον πλῆθος ἀπὸ ρίζας τῆς $f(z)$. Τὰ σημεῖα αὐτὰ ἂς καλέσωμεν z_1, $z_2, \ldots z_m$ καὶ τὰς ἀντιστοίχους των τάξεις $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Θεωροῦμεν συνήθως μίαν ρίζαν (ἢ ἕνα πόλον) τάξεως α

1. Σ.Μ. Ὁ συγγραφεὺς λέγει συντόμως «εἰς τὸ ἐσωτερικὸν» τοῦ C».

ὡς μίαν α-ἁπλῆν ρίζαν (ἢ πόλον) καί, συνεπῶς, λογαριάζομεν αὐτὴν α φορὰς κατὰ μίαν ἀπαρίθμησιν τῶν ριζῶν. Κατὰ τὴν συμφωνίαν αὐτήν, τὸ πλῆθος N τῶν ριζῶν τῆς $f(z)$ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C θὰ εἶναι

$$N = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m.$$

Θεώρημα 2. *Διὰ τὸν ἀριθμὸν N ἔχομεν*

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Ἀπόδειξις: Ὁ ὁλοκληρωτέος εἶναι συνάρτησις ἀναλυτικὴ ἐπὶ τοῦ δρόμου C καὶ $z_1, z_2 \ldots z_m$ εἶναι τὰ ἀνώμαλα σημεῖα εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C. Εὔκολα βλέπομεν ὅτι τὸ καθένα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτά, z_ν, εἶναι ἁπλοῦς πόλος[1] μὲ ὁλοκλ. ὑπόλοιπον α_ν. Διότι, ἐν γένει, ἂν ἡ $f(z)$ εἶχεν ρίζαν τάξεως α εἰς τὸ σημεῖον ζ, θὰ εἴχομεν

$$f(z) = a_\alpha(z-\zeta)^\alpha + a_{\alpha+1}(z-\zeta)^{\alpha+1} + \ldots,$$
$$f'(z) = \alpha a_\alpha(z-\zeta)^{\alpha-1} + (\alpha+1)a_{\alpha+1}(z-\zeta)^\alpha + \ldots.$$

Ἑπομένως, ἀφοῦ $a_\alpha \neq 0$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z-\zeta} + c_0 + c_1(z-\zeta) + \ldots$$

εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα Laurent διὰ τὴν συνάρτησιν $\frac{f'(z)}{f(z)}$ εἰς μίαν ὡρισμένην περιοχὴν τοῦ σημείου ζ. Οἱ συντελεσταὶ c_μ ὑπολογίζονται εὔκολα ἀπὸ τοὺς συντελεστὰς a_ν. Εἶναι συνεπῶς τὸ ζ ἁπλοῦς πόλος καὶ μὲ ὁλοκλ. ὑπόλοιπον α, ὡς ἰσχυρίσθημεν. Ἐκ τούτου προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὸ θεώμημα τῶν ὁλοκλ. ὑπολοίπων ὅτι

$$\frac{1}{i2\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = N, \qquad \text{Ο.ε.δ.}$$

2. Ὅταν ἡ $f(z)$ ἔχῃ πόλον τάξεως β εἰς τὸ ζ, κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ἡ $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ἔχει

1. Πόλον μὲ τάξιν τὴν μονάδα.

τὸ ζ ὡς ἁπλοῦν πόλον μὲ ὁλοκλ. ὑπόλοιπον $-\beta$. Ἐὰν λοιπόν, ἐπιπροσθέτως, οἱ πεπερασμένου πλήθους πόλοι $z'_1, z'_2, \cdots,$ z'_k καὶ μὲ τάξεις ἀντιστοίχους $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ κεῖνται ἐντὸς τοῦ C, θὰ εἶναι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m-(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k).$$

Ἐδῶ $P=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k$ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν πόλων τῆς $f(z)$ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C, κατὰ τὴν ἰδίαν ἔννοιαν ὅπως N δίδει τὸ πλῆθος τῶν ριζῶν τῆς $f(z)$ εἰς τὸ αὐτὸ χωρίον. Ἀπεδείξαμεν ἔτσι τὴν ἑξῆς πρότασιν :

Θεώρημα 3. *Ἔστω $f(z)$ συνάρτησις μονότιμος καὶ ἀναλυτικὴ εἰς τὸ χωρίον $\mathbf{T}$ καὶ C ἁπλοῦς κλειστὸς δρόμος κείμενος ἐντὸς τοῦ $\mathbf{T}$. Ἂν $f(z)\neq 0$ κατὰ μῆκος τοῦ C καὶ ἂν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ C εὑρίσκεται πεπερασμένον, τὸ πολύ, πλῆθος ἀνώμαλα σημεῖα καὶ ὅλα πόλοι, τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N-P$$

ὅπου N τὸ πλῆθος τῶν ριζῶν καὶ P τὸ πλῆθος τῶν πόλων τῆς $f(z)$ ἐντὸς τῆς C καὶ μὲ τὸ καθένα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ θεωρούμενον τόσας φορὰς ὅσας ἀπαιτεῖ ἡ τάξις του.

3. Τὸ θεώρημα τῶν ὁλοκλ. ὑπολοίπων μᾶς παρέχει ἕνα ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέροντα τρόπον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν πραγματικῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων. Θὰ πρέπει νὰ περιορισθοῦμεν ὅμως εἰς μίαν μόνον ἐπίδειξιν τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῶν, μέσῳ ἑνὸς πολὺ ἁπλοῦ καὶ διαφανοῦς παραδείγματος.

Εὔκολα εὑρίσκομεν μὲ ἀόριστον ὁλοκλήρωσιν ὅτι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi. \tag{1}$$

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τῶν ὁλοκλ. ὑπολοίπων, τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ τὸν ἑξῆς

τρόπον. Ἔστω C ὁ δρόμος ποὺ ἐκτείνεται εὐθυγράμμως ἀπὸ τὸ $z=-R$ ἕως τὸ $z=+R$ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον αὐτό, κατὰ μῆκος τῆς ἄνω ἡμιπεριφερείας $|z|=R$, πάλιν εἰς τὸ $-R$. Ἐπειδὴ

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right),$$

ὁ δρόμος αὐτὸς περιβάλλει ἕνα καὶ μόνον πόλον τῆς $\frac{1}{1+z^2}$ εὐθὺς ὡς $R>1$· εἰς τὸν πόλον αὐτόν, $z=i$, τὸ ὁλοκλ. ὑπόλοιπον εἶναι $\frac{1}{2i}$· Ἑπομένως

$$\int_C\frac{dz}{1+z^2}=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}=\pi.$$

Ἐκ τούτων ἔχομεν ἐπίσης ὅτι

$$\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{1+x^2}+\int_S\frac{dz}{1+z^2}=\pi, \tag{2}$$

ἂν S σημαίνη τὸ ἐν λόγῳ ἡμικύκλιον. Κατὰ τὸ Θεώρημα 5 τῆς § 11 ἀφ' ἑτέρου, θὰ εἶναι

$$\left|\int_S\frac{dz}{1+z^2}\right|\leqq\frac{\pi R}{R^2-1},$$

καὶ τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἀνισότητος αὐτῆς τείνει πρὸς τὸ μηδὲν διὰ $R\to+\infty$. Ἂν λοιπὸν ὑποθέσωμεν εἰς τὴν (2) ὅτι $R\to+\infty$, ὁδηγούμεθα ἀμέσως εἰς τὴν σχέσιν (1).

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἐργαζόμενοι, ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα $I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ κάθε ρητῆς συναρτήσεως $f(x)$, ἡ ὁποία εἶναι συνεχὴς δι' ὅλα τὰ πραγματικὰ x καὶ μὲ βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ μεγαλύτερον κατὰ 2 τουλάχιστον τοῦ βαθμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ. Καὶ τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ὅτι *τὸ ὁλοκλήρωμα I εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ $2\pi i$ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁλοκλ. ὑπολοίπων εἰς τοὺς πόλους τῆς $f(z)$, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται εἰς τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον.*

Ἀσκήσεις. 1. Ἔστω ὅτι ἡ $f(z)$ ἔχει πόλον τάξεως α εἰς τὸ σημεῖον z_1. Ποῖον εἶναι τὸ ὁλοκλ. ὑπόλοιπον τῆς συναρτήσεως

$$z\,\frac{f'(z)}{f(z)} \text{ καθὼς καὶ τῆς } \varphi(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}$$

εἰς τὸ z_1, ἂν ἡ $\varphi(z)$ εἶναι μία τυχοῦσα ἀναλυτικὴ εἰς τό z_1 συνάρτησις; Ποία ἡ ἀπάντησις, ἄν ἡ $\varphi(z)$ ἔχῃ πόλον τάξεως β εἰς τὸ z_1;

2. Ἀναφορικῶς εἰς τὴν Ἄσκησιν 1, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ καὶ νὰ καθορισθῇ τὸ νόημα τῶν ὁλοκληρωμάτων

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις τοῦ Θεωρήματος 2 ἢ τοῦ Θεωρήματος **3** τῆς παραγράφου ταύτης διὰ τὴν συνάρτησιν $f(z)$ καὶ τὸν δρόμον C.

§ 34. Αἱ ἀντίστροφοι τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων

Ἐὰν μία συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ σημεῖον z_0 καὶ ἐὰν $f(z_0) = w_0$, τότε, ἕνεκα τῆς συνεχείας τῆς συναρτήσεως, αἱ εἰκόνες ὅλων τῶν σημείων μιᾶς (ἐπαρκῶς μικρᾶς) περιοχῆς τοῦ z_0 θὰ κεῖνται ἐντὸς μιᾶς προδιαγεγραμμένης ε-περιοχῆς τοῦ w_0. Ἐκ τούτου ὅμως δὲν ἠμποροῦμεν νὰ συναγάγωμεν τίποτε, εἴτε περὶ τοῦ ἂν μία πλήρης περιοχὴ τοῦ w_0 καλύπτεται ὑπὸ τῶν εἰκόνων τούτων ἢ δὲν καλύπτεται εἴτε περὶ τοῦ ἂν εἶναι δυνατὸν ἢ ἀδύνατον τὸ χωρίον τῶν εἰκόνων νὰ καλυφθῇ περισσοτέρας ἀπὸ μίαν φοράν. Σχετικῶς πρὸς τὰ ἐρωτήματα αὐτὰ ἔχομεν τὸ ἀκόλουθον θεώρημα :

Θεώρημα 1. *Ἐὰν $f(z)$ εἶναι συνάρτησις ἀναλυτικὴ εἰς τὸν κύκλον K: $|z - z_0| < \rho$ καὶ ὑποθέσωμεν τὴν τιμὴν $w_0 = f(z_0)$ πρώτης τάξεως εἰς τὸ z_0 — δηλ. ὅτι $f'(z_0) \neq 0$ —, τότε μία ὡρισμένη πλήρης περιοχὴ τοῦ w_0 εἰς τὸ w-ἐπίπεδον καλύπτεται μίαν καὶ μόνον φορὰν ὑπὸ τῆς εἰκόνος μιᾶς περιοχῆς τοῦ z_0.*

Ἀπόδειξις : Ἡ συνάρτησις $f(z) - w_0$ εἶναι ἐπίσης ἀναλυτικὴ εἰς τὸν K καὶ ἔχει μίαν ἁπλῆν ρίζαν[1] εἰς τὸ z_0. Θὰ εἶναι τότε δυνατόν, κατὰ τὸ Θεώρημα 2 τῆς § 21, νὰ γράψωμεν περὶ τὸ z_0 ἕνα τόσον μικρὸν κύκλον K_1 μὲ ἀκτῖνα $\rho_1 < \rho$ ὥστε, μὲ ἐξαίρεσιν τοῦ z_0, νὰ μὴ ὑπάρχῃ ρίζα τῆς $f(z) - w_0$ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ K_1 ἢ ἐπὶ τοῦ συνόρου του. Ἐπὶ τοῦ συνόρου τούτου, ἡ $|f(z) - w_0|$ θὰ ἔχῃ ἐπίσης ἕνα θετικὸν ἐλάχιστον μ. Ἠμπορεῖ τότε νὰ δειχθῇ ὅτι κάθε τιμὴ w_1, ἡ ὁποία κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου $K'(w_0,\mu)$ εἰς τὸ w-ἐπίπεδον, λαμβάνεται δι' ἕνα καὶ μόνον $z = z_1$, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κείμενον τοῦ κύκλου K_1. Μὲ συντομίαν, ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z) - w_1$ ἔχει μίαν καὶ μόνον ρίζαν z_1 εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου K_1 — ἤ, ποὺ εἶναι τὸ ἴδιον πρᾶγμα (Θεώρημα 2, § 33), ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα (μὲ τὴν παράμετρον w εἰς τὸν ὁλοκληρωτέον)[2]

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\,dz$$

ἔχει τὴν τιμὴν 1 ἂν τὸ w ἀντικατασταθῇ εἰς αὐτὸ διὰ ὁποιουδήποτε σημείου w_1 τοῦ K'. (Διότι, $f(z) - w_1$ κατὰ μῆκος τοῦ K_1 δὲν μηδενίζεται ἕνεκα τοῦ νοήματος τοῦ μ.) Ἔχοντες τώρα ὑπ' ὄψει τὰς ὑποθέσεις μας καὶ τὸ θεώρημα 2 τῆς § 33, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα (1) θὰ λαμβάνῃ ἀσφαλῶς τὴν τιμὴν 1 διὰ $w = w_0$ καὶ θὰ πρέπει πάντοτε νὰ εἶναι ἴσον πρὸς κάποιον πραγματικὸν ἀκέραιον, σύμφωνα μὲ τὸ νόημά του. Προφανῶς δὲ θὰ πρέπει νὰ ἔχῃ πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμὴν 1, ἐὰν μᾶς εἶναι δυνατὸν νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ τιμή του παριστάνει μίαν *συνεχῆ συνάρτησιν* τοῦ w εἰς τὸ K'.

---

1. Ρίζαν τάξεως 1.
2. Τὸ $f'(z)$ εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ὁλοκληρωτέου θὰ θεωρῆται ὡς ἡ παράγωγος τοῦ παρανομαστοῦ ὡς πρὸς z, μὲ w σταθεράν.

Τοῦτο ὅμως εἶναι συνέπεια τῆς ἁπλῆς ἀνισότητος

$$\left|\int_{K_1}\frac{f'(z)}{f(z)-w'}\,dz-\int_{K_1}\frac{f'(z)}{f(z)-w''}\,dz\right|\leqq |\,w''-w'\,|\cdot\frac{M'\cdot l}{d^2}$$

εἰς τὴν ὁποίαν M' εἶναι τὸ μέγιστον τοῦ $|f'(z)|$ κατὰ μῆκος τῆς K_1, l τὸ μῆκος τοῦ δρόμου αὐτοῦ καὶ d ἡ μικροτέρα ἀπὸ τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων w' καὶ w'' ἀπὸ τὸ σύνορον τοῦ κύκλου K'. Σύμφωνα λοιπὸν μὲ τὸ Θεώρημα 1, δι' ἕνα δοθὲν σημεῖον w εἰς τὸν K', τὸ σημεῖον z εἰς τὸν K_1, διὰ τὸ ὁποῖον $f(z)=w$, ὁρίζεται μὲ ἕνα καὶ μόνον τρόπον. Καὶ κατὰ τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ θεωρήματος τούτου, ὁρίζεται τότε εἰς τὸν K' μία μονότιμος συνάρτησις τοῦ w, ἡ $z=\varphi(w)$, ἔτσι, ὥστε νὰ εἶναι πάντοτε

$$f(\varphi\,(w))=w \text{ ἢ } \varphi(f(z))=z.$$

Ἡ συνάρτησις $z=\varphi(w)$ καλεῖται ἡ *ἀντίστροφος*[1] τῆς $w=f(z)$ καὶ τὸ περιεχόμενον τοῦ Θεωρήματος 1 ἠμποροῦμεν νὰ τὸ ἐκφράσωμεν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον:

Διὰ κάθε συνάρτησιν $f(z)$, ἀναλυτικὴν εἰς τὸ z_0 καὶ διὰ τὴν ὁποίαν $f'(z_0)\neq 0$, ὑπάρχει μία τελείως ὡρισμένη ἀντίστροφος συνάρτησις $z=\varphi(w)$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $w_0=f(z_0)$.

Διὰ τὴν συνάρτησιν αὐτὴν ἀποδεικνύομεν τὸ ἀκόλουθον

Θεώρημα 2. *Ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις $z=\varphi(w)$ εἶναι ἀναλυτικὴ συνάρτησις τοῦ w εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου w_0. Διὰ τὴν παράγωγόν της δὲ εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν*

$$\varphi'(w)=\frac{1}{f'(z)}=\frac{1}{f'(\varphi(w))}.$$

Ἡ ἀπόδειξις, αὐτόδηλος σχεδόν, γίνεται ἀκριβῶς ὅπως καὶ εἰς

1. Διὰ τὴν συνάρτησιν αὐτήν, w εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ καὶ z ἡ ἐξηρτημένη.

τὸ πραγματικὸν πεδίον. Διὰ σταθερὸν w_1 καὶ ἕνα γειτονικὸν αὐτοῦ σημεῖον w εἰς τὸν K', ἔχομεν

$$\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1}=\frac{z-z_1}{f(z)-f(z_1)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ διαφορετικὰ σημεῖα z_1, z ἀντιστοιχοῦν εἰς διαφορετικὰ σημεῖα w_1, w, καὶ ἀντιστρόφως, καὶ ἐπειδὴ ἀκόμη $z\to z_1$ συνεπάγεται $w\to w_1$, ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως εἶναι ἀμέσως φανερὰ ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς. Εἶναι δὲ $f'(z)\neq 0$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ z_0, ἀφοῦ $f'(z_0)\neq 0$.

Ἄσκησις. Νὰ δειχθῇ ὅτι μία ὡρισμένη πλήρης περιοχὴ Π' τοῦ σημείου w_0 καλύπτεται α καὶ μόνον φορὰς διὰ τῆς εἰκόνος μιᾶς περιοχῆς Π τοῦ σημείου z_0, ἐὰν ἡ τιμὴ w_0 τῆς συναρτήσεως $f(z)$ (ἀναλυτικῆς εἰς z_0) ὑποτεθῇ τάξεως α ($\geqslant 1$).

§ 35. Ρηταὶ συναρτήσεις

Ὅπως ἐτονίσαμεν ἤδη εἰς τὴν σελίδα 105, μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις σπανίως ἐμφανίζεται εἰς κλειστὴν * μορφήν. Τὴν εὐνοϊκὴν αὐτὴν περίπτωσιν συναντήσαμεν μέχρι τώρα μόνον διὰ τὰς *ἀκεραίας* καὶ τὰς *ρητὰς* συναρτήσεις. Διὰ τὴν κατάταξιν τῶν συναρτήσεων «καθαρῶς θεωριοσυναρτησιακῶς», θὰ πρέπει κανεὶς νὰ ἀγνοήσῃ τελείως τὴν *παρουσίασιν* τῆς συναρτήσεως καὶ νὰ τὴν χαρακτηρίσῃ συμφυῶς μόνον (διὰ τοῦ πεδίου τιμῶν, τῆς φύσεως τῶν ἀνωμάλων σημείων, καὶ δι' ἄλλων ὁμοίων στοιχείων της). Αἱ ἀκέραιαι π.χ., συναρτήσεις — ὅλως ἀνεξαρτήτως τῆς δυνατότητός των νὰ παρουσιάζωνται εἰς κλειστὴν μορφὴν — χαρακτηρίζονται μόνον ἀπὸ τὴν ἰδιότητά τους νὰ εἶναι συναρτήσεις ἀναλυτικαὶ εἰς ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον. Τὰ Θεωρήματα 2 καὶ 5 τῆς § 28 χωρίζουν αὐτὰς καθαρῶς «θεωριοσυναρτησιακῶς» εἰς ἀκεραίας συναρτήσεις καὶ εἰς ἀκεραίας ὑπερβατικὰς συναρτήσεις.

Τὰ ἑπόμενα δύο θεωρήματα χαρακτηρίζουν κατὰ ὅμοιον τρόπον τὴν *κλάσιν τῶν ρητῶν συναρτήσεων*.

* Σ.Μ. ἢ «ἐκπεφρασμένην»

Θεώρημα 1 *Μία ρητὴ συνάρτησις δὲν ἔχει ἄλλα ἀνώμαλα σημεῖα παρὰ μόνον πόλους, τόσον εἰς τὸ πεπερασμένον ὅσον καὶ εἰς τὸ ἄπειρον μέρος τοῦ ἐπιπέδου.*

Ἡ ἀπόδειξις τούτου περιέχεται εἰς τὴν § 31, Παρ/μα 2 καὶ εἰς § 32, Παρ/τα 2 καὶ 3. Τὸν σκοπόν μας ἄλλωστε αὐτὸν ἐπιτυγχάνομεν καὶ διὰ τῆς ἀποδείξεως τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ θεωρήματος τούτου:

Θεώρημα 2. *Ἐὰν μία μονότιμος συνάρτησις δὲν ἔχῃ ἄλλα ἀνώμαλα σημεῖα παρὰ μόνον πόλους εἰς τὸ πεπερασμένον μέρος τοῦ ἐπιπέδου καὶ εἰς* $z = \infty$ *, ἀναγκαίως εἶναι αὐτὴ ρητὴ συνάρτησις.*

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ διὰ τὴν $f(z)$ ὑποθέτομεν ὅτι ἔχει τὸ πολὺ ἕνα πόλον εἰς $z = \infty$, θὰ εἶναι πανταχοῦ ἀναλυτικὴ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν ἑνὸς ἐπαρκῶς μεγάλου κύκλου, δηλ. εἰς μίαν ὡρισμένην «περιοχὴν τοῦ σημείου $z = \infty$» καὶ μὲ ἐνδεχομένην ἐξαίρεσιν τοῦ σημείου αὐτοῦ. Συνεπῶς, ὅλα τὰ ἀνώμαλα σημεῖα τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν νὰ κεῖνται εἰς τὸ πεπερασμένον μέρος τοῦ ἐπιπέδου θὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κάποιου καθοριζομένου κύκλου. Πεπερασμένον δὲ μόνον πλῆθος ἀπὸ τέτοια σημεῖα ἠμποροῦν νὰ ὑπάρχουν—διότι ἄλλως, κατὰ τὸ Θεώρημα 1 τῆς § 3, θὰ εἶχον αὐτὰ ἕνα ὁρικὸν σημεῖον εἰς τὸν κλειστὸν τοῦτον κύκλον καὶ τὸ ὁποῖον ἀσφαλῶς δὲν θὰ ἦτο πόλος, ἀφοῦ ἕνας πόλος εἶναι μεμονωμένον ἀναγκαίως σημεῖον.

Ἐὰν δὲν ὑπάρχουν ἀνώμαλα σημεῖα εἰς τὸ πεπερασμένον μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τότε ἡ $f(z)$ θὰ εἶναι *ἀκεραία* συνάρτησις καὶ μάλιστα (§ 32, Παρ/μα 4) ***ἀκεραία ρητὴ*** συνάρτησις δηλ. ἕνα ***πολυώνυμον***. Ἂν ὅμως τοῦτο δὲν συμβαίνῃ καὶ τὰ πεπερασμένου πλήθους σημεῖα αὐτὰ $z_1, z_2, \ldots, z_k$ κεῖνται εἰς τὸ πεπερασμένον μέρος τοῦ ἐπιπέδου, θὰ εἶναι δυνατὴ τότε ἡ ἀνάπτυξις τῆς $f(z)$ κατὰ σειρὰν τοῦ Laurent εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτά. Τὰ ἀναπτύγματα δὲ ταῦτα θὰ περιέχουν πεπερασμένον μόνον πλῆθος ἀπὸ ἀρνητικὰς δυνάμεις:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\nu)}(z - z_\nu)^n + \frac{a_{-1}^{(\nu)}}{z - z_\nu} + \cdots + \frac{a^{(\nu)}_{-\alpha_\nu}}{(z - z_\nu)^{\alpha_\nu}},$$

ὅπου α_ν σημαίνει τὴν τάξιν τοῦ πόλου z_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, k$). Ἂν δὲ τὸ πρωτεῦον μέρος ποὺ ἀκολουθεῖ τὴν δυναμοσειρὰν παρασταθῇ μὲ $h_\nu(z)$, θὰ εἶναι τότε h_ν ρητὴ συνάρτησις μὲ μοναδικὸν ἀνώμαλον σημεῖον z_ν (πόλον τάξεως α_ν), ἀναλυτικὴ καὶ ἴση μὲ μηδὲν εἰς τὸ σημεῖον $z = \infty$.

Ἡ συνάρτησις

$$f(z) - h_1(z) - h_2(z) - \cdots - h_k(z)$$

εἶναι ἀκεραία προφανῶς συνάρτησις καὶ μάλιστα—ἀφοῦ καὶ αὐτὴ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ παρὰ ἕνα μόνον πόλον εἰς τὸ ἄπειρον —ἕνα πολυώνυμον $g(z)$. Τὸ πολυώνυμον αὐτὸ θὰ ἀνάγεται εἰς μίαν σταθερὰν (πολυώνυμον βαθμοῦ 0) ἂν τὸ σημεῖον ∞ εἶναι ὁμαλὸν σημεῖον. Ἡ ἐξίσωσις ἑπομένως

$$f(z) = g(z) + h_1(z) + h_2(z) + \cdots + h_k(z)$$[1]

κάμνει ἔκδηλον τὸν ρητὸν χαρακτῆρα τῆς $f(z)$.

Ἕνεκα τῆς εἰδικῆς μορφῆς τῶν πρωτευόντων μερῶν $h_\nu(z)$, ἠμποροῦμεν ἐπίσης νὰ διατυπώσωμεν τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

Θεώρημα 3. *Μία ρητὴ συνάρτησις εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἁπλᾶ κλάσματα.* (πρβ. *Στοιχεῖα*, § 40).

Καταλήγομεν μὲ μίαν δευτέραν ἀπόδειξιν τοῦ *Θεμελιώδους Θεωρήματος τῆς Ἀλγέβρας* καὶ ἡ ὁποία βασίζεται εἰς τὸ θεώρημα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων (πρβ. § 28, 3 καὶ *Στοιχεῖα*, § 39).

Ἐὰν $f(z)$ εἶναι ἕνα πολυώνυμον $a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$, ($m \geqslant 1$, $a_m \neq 0$), κατὰ τὸ Θεώρημα 2 τῆς § 28 θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γράψωμεν περὶ τὴν ἀρχὴν ἕνα κύκλον K μὲ ἀκτῖνα R καὶ τέτοιον ὥστε, διὰ $|z| > R$, νὰ εἶναι $|f(z)| > 1$. Δὲν εἶναι δυνατόν, ἑπομένως, νὰ ἔχῃ ρίζας ἡ $f(z)$ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν ἢ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ κύκλου τούτου· ὅλαι, ἄρα, αἱ ὑπάρχουσαι ρίζαι τῆς $f(z)$ θὰ πρέπει νὰ εἶναι σημεῖα ἐσωτερικὰ τοῦ κύκλου K.

1. Οἱ ὅροι $h_\nu(z)$ ἐδῶ ἐλλείπουν εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ πεπερασμένον μέρος τοῦ ἐπιπέδου· τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐπραγματεύθημεν ἤδη.

Τὸ πλῆθος N τῶν ριζῶν αὐτῶν κατὰ τὸ Θεώρημα 2 τῆς § 33, εἶναι

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Τὸ ἀνάπτυγμα κατὰ Laurent τοῦ ὁλοκληρωτέου ἰσχύει διὰ $|z| > R$ καὶ ἀρχίζει μὲ

$$\frac{m}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots,$$

μὲ τοὺς συντελεστὰς c_ν ὄχι ἀναγκαίως γνωστούς. Ἐκ τῆς μορφῆς αὐτῆς διαπιστώνομεν ἀμέσως ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι m, καὶ ἑπομένως ὅτι

$$N = m.$$

Τοῦτο δὲ σημαίνει ὅτι ἕνα πολυώνυμον βαθμοῦ m ἔχει ἀκριβῶς m ρίζας, μὲ τὴν καθεμίαν θεωρουμένην τόσας φορὰς ὅσας ἡ τάξις της ἀπαιτεῖ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αἱ θεμελιώδεις συμβολαὶ τῶν Cauchy, Riemann καὶ Weierstrass εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Θεωρίας τῶν Συναρτήσεων ἀνευρίσκονται εἰς τὰς ἑξῆς συλλογὰς τῶν ἐργασιῶν τῶν μαθηματικῶν αὐτῶν.

Augustin Cauchy, *Oeuvres Complètes*, Paris (Gauthier - Villars, 1882 - - 1921).

Bernhard Riemann, *Gesammelte mathematische Werke*, 2α ἔκδοσις, Leipzig, 1892, Συμπλήρωμα 1902.

Karl Weierstrass, *Mathematische Werke*, Berlin 1894 - 1927.

Μερικαὶ μᾶλλον πρόσφατοι περιεκτικαὶ παρουσιάσεις τῆς Θεωρίας αὐτῆς εἶναι :

L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Τόμος I: *Elemente der Funktionentheorie*, 4η ἔκδοσις, Leipzig, 1934, Τόμος II: *Moderne Funktionentheorie*, 2α ἔκδοσις, Leipzig, 1931.

E. Borel, *Leçons sur la Théorie des Fonctions*, 3η ἔκδοσις, Paris, 1928.

H. Burkhardt, *Funktionentheoretische Vorlesungen*, Τόμος I, ἔκδοσις ὑπὸ G. Faber, Berlin, 1920 - 1921.

E. T. Copson, *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford, 1935.

G. Doetsch, *Funktionentheorie*, (15ον κεφάλαιον τοῦ *Repertorium der höheren Analysis* τοῦ E. Pascal, Τόμος I, Μέρος 2, 2α ἔκδοσις, Leipzig, 1927).

É. Goursat, *Cours d' Analyse Mathematique*, Τόμος II, 5η ἔκδοσις, Paris, 1933, τοῦ ἰδίου, *A Course in Mathematical Analysis*, Τόμος II, Μέρος, I, κατὰ μετάφρασιν ὑπὸ E. R. Hedrick καὶ O. Dunkel, Boston, 1916.

J. Hadamard, *La Série de Taylor et son Prolongement Analytique*, (Συλλογὴ *Scientia*) 2α ἔκδοσις, ὑπὸ S. Mandelbrojt, Paris, 1926.

A. Hurwitz καὶ **R. Courant**, *Funktionentheorie*, 3η ἔκδοσις. Berlin 1929.

C. Jordan, *Cours d' Analyse*, Τόμος I, 3η ἔκδοσις. Paris 1909.

K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 3η ἔκδοσις, Berlin, 1931, τοῦ ἰδίου, *Theory and Application of Infinite Series*, κατὰ μετάφρασιν ὑπὸ R.C. Young ἐκ τῆς 2ας γερμανικῆς ἐκδόσεως. London καὶ Glasgow. 1928.

G. Kowalewski, *Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen*, 2α ἔκδοσις Leipzig 1923.

W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Τόμος I, 5η ἔκδοσις Leipzig 1928.

H. v. Mangoldt καὶ **K. Knopp**, *Einführung in die höhere Mathematik*, Τόμοι II, καὶ III, Leipzig 1932 καὶ 1938.

É. Picard, *Traité d' Analyse*, Τόμος II, 3η ἔκδοσις, Paris, 1926.

E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford, 2α ἔκδοσις, 1939.

Ἀναφέρομεν ἐπιπροσθέτως καὶ τὴν *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Lepzig, 1898 κ.ἑ. τῆς ὁποίας τὰ μέρη II, 2 καὶ II, 3 (Leipzig, 1901 - 1927) ἔχουν ἀφιερωθῆ κυρίως εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συναρτήσεων.

ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑ

ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑ

1) **Παναγιώτου Ζερβοῦ.** *Ἀνάπτυγμα συναρτήσεως εἰς σειρὰν διατεταγμένην κατὰ τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς δυνάμεις ἑτέρας συναρτήσεως.*

('Εδημοσιεύθη εἰς τὴν γαλλικὴν εἰς τὸ περιοδικὸν Nouvelles Annales de Mathématiques, 4e Série, Τόμος 4ος, Μάϊος 1904, σελίδες 200 - 205).

2) **Παναγιώτου Ζερβοῦ.** *Γενίκευσις ἑνὸς θεωρήματος τοῦ* Comes Teixeira.

('Εδημοσιεύθη εἰς τὴν ἑλληνικὴν εἰς τὴν ἐπιστημονικὴν 'Επετηρίδα τοῦ Πανεπιστημίου 'Αθηνῶν τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ ἔτους 1906 - 1907).

Σημειώσεις

'Ορολογία. 1) 'Ολόμορφος = ὁμαλὴ = ἀναλυτική.

2) Τόπος = χωρίον.

3).Περίμετρος τόπου = κλειστὸς δρόμος περικλείων χωρίον.

1) Συντομογραφικῶς, «τόπος C» καλεῖται ὁ τόπος ὁ περικλειόμενος ὑπὸ τῆς περιμέτρου C.

Συμβολισμός. Εἰς τὴν πρώτην ἐργασίαν τοῦ Π. Ζερβοῦ τὸ x παριστᾶ μιγαδικὸν ἀριθμόν, ἄσχετον πρὸς τὸν συμβολισμὸν $z = x + iy$ ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται εἰς τὸν Knopp.

Σημείωσις. 'Η εἰς τὴν δευτέραν ἐργασίαν τοῦ παρόντος παραρτήματος παραπομπὴ εἰς τὸ κλασσικὸν σύγγραμμα «'Ολοκληρωτικὸς Λογισμὸς» τοῦ διδασκάλου του 'Ιωάννου Χατζιδάκι ἀναφέρεται, βεβαίως, εἰς τὸν ὁλοκληρωτικὸν τύπον τοῦ Cauchy, ὄχι εἰς τὴν γενίκευσίν του (1) τῆς ἐργασίας αὐτῆς, ἡ ὁποία ἀνεκαλύφθη ἀπὸ τὸν Π. Ζερβόν.

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΕΙΣ ΣΕΙΡΑΝ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΗΝ ΚΑΤΑ ΤΑΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΤΙΚΑΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΕΤΕΡΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΕΕΩΣ

I. Τόσον διὰ συμμόρφου μετασχηματισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ Cauchy, ὅσον καὶ ἀπ' εὐθείας εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδειχθῆ ὁ τύπος

$$\int_C \frac{f(z)}{\sigma(z)-\sigma(x)}\,dz = 2\pi i\frac{f(x)}{\sigma'(x)},$$

ὅπου ὑποθέτομεν 1) ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ὁλόμορφος ὡς καὶ ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ (ἡ τελευταία ὑποτίθεται μονότιμος) εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τόπου περιοριζομένου ὑπὸ περιμέτρου C· 2) ὅτι δὲν ὑπάρχει ρίζα τῆς $\sigma'(x)$ ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ τόπου· 3) ὅτι ἡ συνάρτησις $\sigma(z)-\sigma(x)$ καὶ ἡ περίμετρος C εἶναι τοιαῦται ὥστε τὸ τυχὸν σημεῖον x_1 τοῦ τόπου νὰ εἶναι ἡ μοναδικὴ ρίζα τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)-\sigma(x_1)$ ἐντὸς τοῦ τόπου αὐτοῦ· μία τοιαύτη συνάρτησις εἶναι π.χ. ἡ συνάρτησις z^2-x^2 εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τόπου τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος δὲν τέμνει ἕνα τῶν ἀξόνων.

II. Ἀπ' εὐθείας ἀπόδειξις τοῦ τύπου

$$\int_C \frac{f(z)}{\sigma(z)-\sigma(x)}\,dz = 2\pi i\,\frac{f(x)}{\sigma'(x)}.$$

Ἂς διαγράψωμεν μὲ κέντρον τὸ x κύκλον γ ἀκτῖνος ρ, ἐσωτερικὸν εἰς τὸν τόπον C. Θὰ ἔχωμεν

$$\int_C \frac{f(z)}{\sigma(z)-\sigma(x)}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{\sigma(z)-\sigma(x)}\,dz,$$

ὅπου ἡ ἀκτὶς ρ δύναται νὰ ληφθῆ ὅσον μικρὰ θέλομεν. Ἀναπτύσσομεν τὰς συναρτήσεις $f(z)$ καὶ $\sigma(z)$ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου x. Θὰ ἔχωμεν τότε

$$\int_C \frac{f(z)}{\sigma(z)-\sigma(x)}\,dz$$
$$= \int_\gamma \frac{f(x)+\rho e^{\theta i}f'(x)+\frac{\rho^2 e^{\theta 2 i}}{1.2}f''(x)+\dots}{\rho e^{\theta i}\sigma'(x)+\frac{\rho^2 e^{\theta 2 i}}{1.2}\sigma''(x)+\dots}\, i\rho e^{\theta i}\,d\theta$$

ἤ, διὰ διασπάσεως τοῦ δευτέρου,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_C \frac{f(z)}{\sigma(z)-\sigma(x)}\,dz \\ &= \int_\gamma \frac{f(x)}{\sigma'(x)+\frac{\rho e^{\theta i}}{1.2}\sigma''(x)+\dots}\, i\,d\theta \\ &+ \int_\gamma \frac{\rho e^{\theta i}f'(x)+\frac{\rho^2 e^{2\theta i}}{1.2}f''(x)+\dots}{\sigma'(x)+\frac{\rho e^{\theta i}}{1.2}\sigma''(x)+\dots}\, i\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

Ὁ δεύτερος τῶν προσθετέων τούτων εἶναι μηδενικὸς διότι βλέπομεν ὅτι, βάσει τῶν ὑποθέσεών μας, εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν θετικὸν ἀριθμὸν M τοιοῦτον ὥστε ἡ ἀνισότης

$$\left| e^{\theta i}\left(f'(x)+\frac{\rho e^{\theta i}}{1.2}f''(x)+\dots\right)\right| < M$$

νὰ ἀληθεύη διὰ πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας γ, καὶ ἐπίσης ἕνα θετικὸν ἀριθμὸν m τοιοῦτον ὥστε ἡ ἀνισότης

$$\sigma'(x)+\frac{\rho e^{\theta i}}{1.2}\sigma''(x)+\dots > m$$

νὰ ἀληθεύη διὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα, δεδομένου ὅτι ὑπεθέσαμεν $\sigma'(x)\neq 0$ διὰ κάθε σημεῖον τοῦ τόπου C. Οὕτω τὸ θεωρηθὲν ὁλοκλήρωμα εἶναι (ἀπολύτως) μικρότερον τοῦ $\rho\cdot 2\pi\dfrac{M}{m}$.

Ἄρα, ἀφοῦ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ ρ ὅσον μικρὸν θέλομεν, τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (1) εἶναι ἀκριβῶς μηδέν.

Διὰ τὸ πρῶτον, παρατηρῶ ὅτι

$$\int_\gamma \frac{f(x)}{\sigma'(x)+\frac{\rho e^{\theta i}}{1.2}\sigma''(x)+\dots}\,d\theta - \int_\gamma \frac{f(x)}{\sigma'(x)}\,d\theta$$
$$= -\rho\int_\gamma \frac{e^{\theta i}f(x)\left(\frac{\sigma''(x)}{1.2}+\frac{\sigma'''(x)}{1.2.3}\rho e^{\theta i}+\dots\right)}{\sigma'(x)\left(\sigma'(x)+\frac{\rho e^{\theta i}}{1.2}\sigma''(x)+\dots\right)}\,d\theta .$$

Διὰ τοῦ ἰδίου τρόπου ὡς καὶ προηγουμένως, δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ δεύτερον μέλος εἶναι μηδενικόν. Ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) καθίσταται

$$\int_C \frac{f(z)}{\sigma(z)-\sigma(x)}\,dz = \int_\gamma \frac{f(x)}{\sigma'(x)}\,i\,d\theta = 2\pi i\,\frac{f(x)}{\sigma'(x)}.$$

III. Δυνάμεθα, διὰ τοῦ τύπου αὐτοῦ, νὰ ὑπολογίσωμεν ἀμέσως διάφορα ὁλοκληρώματα ; π.χ. τὸ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin mx}{x^2+a^2}\,dx \qquad (m>0,\ a>0).$$

Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{z\,e^{mzi}}{z^2+a^2}\,dz,$$

κατὰ μῆκος τῆς περιμέτρου ἡμικυκλίου κειμένου ἐντὸς τοῦ ἡμιεπιπέδου. Θὰ τὸ γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\int \frac{z\,e^{mzi}}{z^2-(ai)^2}\,dz.$$

Τὸ θεωρηθὲν ἡμικύκλιον εἶναι τόπος ἐντὸς τοῦ ὁποίου ὁ παράγων (z$+ai$) οὐδέποτε μηδενίζεται. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν προηγούμενον τύπον· θὰ λάβωμεν

$$\int_C \frac{z\,e^{mzi}}{z^2+a^2}\,dz = 2\pi i\,\frac{ai\,e^{-ma}}{2ai} = i\pi e^{-ma}.$$

IV. Μία ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου αὐτοῦ, τὴν ὁποίαν θεωρῶ ἐνδιαφέρουσαν, εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα συναρτήσεως εἰς σειρὰν διατεταγμένην κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις ἑτέρας συναρτήσεως.

Πρὸς τοῦτο, ἂς λάβωμεν τὴν ταυτότητα

$$\frac{1}{\sigma(z)-\sigma(x)} = \frac{1}{\sigma(z)} + \frac{\sigma(x)}{[\sigma(z)]^2} + \dots + \frac{[\sigma(x)]^n}{[\sigma(z)]^{n+1}} + \left(\frac{\sigma(x)}{\sigma(z)}\right)^{n+1} \frac{1}{\sigma(z)-\sigma(x)}.$$

Τότε ὁ τύπος (1) καθίσταται

$$\frac{f(x)}{\sigma'(x)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{\sigma(z)}\,dz + \frac{\sigma(x)}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^2}\,dz + \dots + \frac{[\sigma(x)]^n}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^{n+1}}\,dz + \frac{[\sigma(x)]^{n+1}}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)-\sigma(x)]}\,\frac{dz}{[\sigma(z)]^{n+1}}.$$

Ἐὰν λοιπὸν κάμωμεν τὰς ὑποθέσεις μας οὕτως ὥστε ὁ συμπληρωματικὸς ὅρος

$$\frac{[\sigma(x)]^{n+1}}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{[\sigma(z)-\sigma(x)]}\,\frac{dz}{[\sigma(z)]^{n+1}}$$

νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν διὰ n τεῖνον πρὸς τὸ ἄπειρον, θὰ ἔχωμεν ἓν ἀνάπτυγμα τῆς $\dfrac{f(x)}{\sigma'(x)}$ εἰς σειρὰν διατεταγμένην κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$.

Ἐξ ἄλλου,

$$\frac{f(x+\Delta x)}{\sigma(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left(\frac{1}{\sigma(z)-\sigma(x+\Delta x)} - \frac{1}{\sigma(z)-\sigma(x)}\right)dz.$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ Δx καὶ λάβωμεν τὸ ὅριον διὰ $\Delta x = 0$, θὰ ἔχωμεν

(2) $$\left(\frac{f(x)}{\sigma'(x)}\right)' = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sigma'(x)\,f(z)}{[\sigma(z)-\sigma(x)]^2}\,dz.$$

Ἔστω ὅτι ὑπάρχει ρίζα τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ ἐντὸς τοῦ τόπου C. Ἔστω

(α) $$\sigma(a) = 0.$$

Τότε δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν ἐκ τοῦ τύπου (2) τὸν τύπον

(3) $$\frac{\sigma'(a)\,f'(a) - f(a)\,\sigma''(a)}{[\sigma'(a)]^3} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^2}\,dz.$$

Ὁμοίως ἐκ τοῦ τύπου (2) καὶ μὲ τὴν ὑπόθεσιν (α) θὰ ἐξαγάγωμεν ὅτι, διὰ x = α,

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{f(x)}{\sigma'(x)}\right)''_{\text{pour } x=a} \\ &\quad = \frac{\sigma''(a)}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^2}\,dz + \frac{2[\sigma'(a)]^2}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^3}\,dz \end{aligned} \right.$$

ἀπὸ ὅπου, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ἰσότης (3), θὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^3}\,dz.$$

Συνεχίζοντες διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀνευρίσκομεν τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^n}\,dz$ ὑπὸ μορφὴν συναρτήσεως τῶν τιμῶν

$$\begin{aligned} &\sigma'(a), \quad \ldots, \quad \sigma^{n-1}(a), \\ &f'(a), \quad \ldots, \quad f^{n-1}(a), \end{aligned}$$

καὶ τότε ἡ συνάρτησις $\frac{f(x)}{\sigma'(x)}$ ἀναπτύσσεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$A_0 + A_1\,\sigma(x) + A_2[\sigma(x)]^2 + \ldots + A_m[\sigma(x)]^m + \ldots.$$

Ὡς πρὸς τὴν τελευταίαν αὐτὴν ἐφαρμογήν, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι εὔκολον νὰ ἴδῃ κανεὶς ποῖαι εἶναι αἱ οὐσιώδεις διαφοραὶ μεταξὺ τῆς μεθόδου μας διὰ τὴν ἀναζήτησιν τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος καὶ τῶν σχετικῶν πρὸς τὴν σειρὰν τοῦ Burmann.

Π. ΖΕΡΒΟΣ

ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ Κ. COMES TEIXEIRA

1.— Εἷς μετασχηματισμὸς τοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ Cauchy (ὁλοκληρ. Χατζιδάκι σελ. 459 τύπος (4)) μὲ ἐφαρμογὰς πολλοῦ ἐνδιαφέροντος εἶναι καὶ ὁ δίδων τὸν τύπον

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sigma(z)}{\varphi'(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{\sigma(Z)}{\varphi(Z) - \varphi(z)}\,dZ$$

ὅπου ὑποθέτομεν 1) ὅτι ἡ συνάρτησις σ(Z) εἶνε ὁμαλὴ ὡς καὶ ἡ συνάρτησις φ(Z) ἐν τῷ τόπῳ T τῷ περιοριζομένῳ ὑπὸ τῆς περιμέτρου G. 2) ὅτι δὲν ὑπάρχει ῥίζα τοῦ φ′(Z) ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ καὶ 3) ὅτι ἡ συνάρτησις φ(Z) — φ(z) καὶ ἡ περίμετρος G εἶνε τοιαῦτα ὥστε σημεῖον τι οἱονδήποτε z τοῦ τόπου νὰ εἶνε ἡ μόνη ῥίζα τῆς συναρτήσεως φ(Z) — φ(z) ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ.

2.— Τοῦτον τὸν τύπον (1) τὸ πρῶτον ἐπαρουσιάσαμεν εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἑταιρείαν τῶν Παρισίων τὸν Δεκέμβριον τοῦ 1903 καὶ περὶ αὐτοῦ σχετικά τινα ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὸ Nouvelles Annales de Mathématiques (4e série t. IV. mai 1904). Ἐφαρμογὰς τοῦ τύπου τούτου προφανῶς ἔχομεν δύο εἰδῶν. Αἱ μὲν ἀφορῶσι μέθοδον πρὸς εὕρεσιν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων ἀντικαθιστῶσαν ἐν μερικαῖς περιστάσεσιν ἐπωφελῶς τὴν διὰ τῶν résidus μέθοδον· αἱ δὲ δίδουσι τὸ ἀνάπτυγμα συναρτήσεως κατὰ τὰς δυνάμεις ἄλλης συναρτήσεως, ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας. — Ὀφείλομεν νὰ σημειώσωμεν ὅτι καὶ ὁ κ. Comes Teixeira ἐπὶ τῇ βάσει τύπου ἐξαγομένου ἐκ τοῦ (1) διὰ μετασχηματισμοῦ ἁπλοῦ ἔδωκεν ὅμοιον ἀνάπτυγμα (Journal de Crelle Bd. 122).

3.— Καὶ πρῶτον ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (1) δὲν εἶνε ἀπαραιτήτως ἀναγκαῖον νὰ ὑποθέτωμεν πάντοτε ὅτι τὸ $\varphi(Z)$ ἔχει ῥίζαν ἐν τῷ τόπῳ T καθόσον δύναται ἡ συνάρτησις $\varphi(Z)-\varphi(z)$ νὰ ἔχῃ μίαν μόνην ῥίζαν, χωρὶς καὶ τὸ $\varphi(Z)$ νὰ ἔχῃ τοιαύτην (ἐν τῷ τόπῳ T). Οὕτως, ἐπὶ παραδείγματι ὑπολογισμὸς τοῦ $\int \frac{ze^{mzi}}{z^2+\alpha^2}dz$ κατὰ μῆκος περιμέτρου μὴ περικλειούσης τὴν ἀρχὴν καὶ καταλλήλως εἰλημμένης γίνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (1), ἂν καὶ ἔχωμεν $\varphi(Z)=Z^2$, ἤτοι μόνην ῥίζαν τοῦ $\varphi(Z)$ τὴν ἀρχήν. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{(AB\Gamma\Delta)} \frac{\sigma(Z)e^{\frac{i\pi Z}{\omega}}}{e^{\frac{i\pi Z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}dZ$ ὅπου ΑΒΓΔ εἶνε τὸ παραλληλόγραμμον τῶν περιόδων· καὶ $\sigma(Z)$ συνάρτησις περιοδικὴ μετὰ περιόδου 2ω. Ὁ τύπος (1) εἶνε ἀκόμη ἐφαρμόσιμος καὶ δίδει

$$\sigma(Z = \frac{1}{2\omega}\int \frac{\sigma(Z)e^{\frac{i\pi Z}{\omega}}}{e^{\frac{i\pi Z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}dZ$$

4.— Ἤδη θὰ προβῶμεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν θεωρήματος, ὅπερ εἶνε γενικοποίησις ἄλλου θεωρήματος ἀποδειχθέντος ὑπὸ τοῦ κ. Comes Teixeira ἐν τῷ ῥηθέντι ἀνωτέρω ὑπομνήματι, περιλαμβάνοντος καὶ τούτου ἄλλο θεώρημα τοῦ κ. Appel (Acta Mathematica I). Ἔστω τόπος T περιοριζόμενος ὑπὸ ϱ εὐθειῶν μὴ τεμνουσῶν αὐτόν. Λάβωμεν ϱ σημεῖα ἐντὸς τοῦ T οἱαδήποτε· ἔστωσαν ταῦτα τὰ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_\varrho$. ($\gamma^\mu=\Gamma_\mu+i\Delta_\mu$). *Λέγω ὅτι ἐὰν ἔχω συνάρτησιν ὁμαλὴν τὴν $\sigma(Z)$ ἐν τῷ τόπῳ T δύναμαι νὰ παραστήσω αὐτὴν ὡς ἄθροισμα ϱ ἀναπτυγμάτων τῆς μορφῆς.*

$$(2) \qquad \sigma_1(\gamma_\mu)+\sum_{\nu=1}^{\infty} A_n\left(\frac{z-\gamma_\mu}{z-\alpha^\mu}\right) \quad (\mu=1, 2, .. \varrho)$$

(ὅπου τὰ $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_\varrho$ ἐκλέγονται καταλλήλως).

Ἔστωσαν $K_1, K_2, .. K_\varrho$ αἱ περιορίζουσαι τὸν τόπον T εὐθεῖαι· καὶ λ_μ καὶ β_μ αἱ παράμετροι τῆς εὐθείας K_μ. Προσδιορίσωμεν δύο ἀριθμοὺς πραγματικοὺς A καὶ B τοιούτους ὥστε

$$\frac{A_\mu - \Gamma_\mu}{\Delta_\mu - B_\mu} = \lambda_\mu, \qquad \frac{A^2_\mu+B^2_\mu-\Gamma^2_\mu-\Delta^2_\mu}{2(B_\mu-\Delta_\mu)}$$

καὶ λάβωμεν ἤδη ὡς σημεῖον ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ α_μ τὸ σημεῖον τὸ ἔχον τετμημένην A_μ καὶ τεταγμένην B_μ. τότε ἡ εὐθεῖα K_μ παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\left|\frac{Z-\gamma_\mu}{Z-\alpha_\mu}\right|=1$ τὸ δὲ σημεῖον α_μ εἶνε συμμετρικὸν τοῦ γ_μ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν K_μ. [Κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου ἐπὶ τὴν K_μ τὰ α_μ καὶ γ_μ διότι συντελεστὴς τῆς εὐθείας τῆς ταῦτα ἑνούσης εἶνε $\frac{\Delta-B}{\Gamma-A}$. εἶνε δὲ καὶ αἱ ἀποστάσεις των ἀπὸ τῆς εὐθείας ἴσαι, διότι ἐὰν λάβωμεν τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς K_μ $(x+y_i)$ αἱ πλάγιαι αἱ ἑνοῦσαι τοῦτο μὲ τὰ α_μ, γ_μ εἶνε ἴσαι], ὅθεν πᾶν σημεῖον ἐντὸς τοῦ τόπου T θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ α_μ πλειότερον ἢ ἀπὸ τοῦ γ_μ. ὥστε δι' αὐτὸ τὸ σημεῖον z θὰ ἔχωμεν

$$(3) \qquad \left|\frac{z-\gamma_\mu}{z-\alpha_\mu}\right| < \left|\frac{Z-\gamma_\mu}{Z-\alpha_\mu}\right| \text{ ὅπου Z σημεῖον τῆς περιμέτρου.}$$

Θέσωμεν ἀφ' ἑτέρου $\varphi_\mu(Z)=\frac{Z-\alpha_\mu}{Z-\gamma_\mu}$ καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$\frac{\varphi'_\mu(Z)}{\varphi_\mu(Z)-\varphi_\mu(z)} = \frac{1}{Z-z} - \frac{1}{Z-\gamma_\mu} \quad \text{ὅθεν καὶ}$$

$$(4) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(K_\mu)}\frac{\sigma(Z)}{Z-z}\,dZ = \frac{1}{2i\pi}\int_{(K_\mu)}\frac{\sigma(Z)\,\varphi'_\mu(Z)}{\varphi_\mu(Z)-\varphi_\mu(z)}\,dZ + \frac{1}{2i\pi}\int_{(K_\mu)}\frac{\sigma(Z)}{Z-\gamma_\mu}dZ$$

Ἐκ τῶν ὅρων τοῦ β' μέλους ὁ πρῶτος ἀναπτύσσεται εἰς σειρὰν

διατεταγμένην κατὰ τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς δυνάμεις τοῦ $\dfrac{z-\gamma_\mu}{z-\alpha_\mu}$· [1]
ὥστε ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (4) διὰ $\mu=1,2,\ldots\varrho$ καὶ προσθέσωμεν θὰ λάβωμεν

$$(5)\qquad \sigma(z)=\sum_{\mu=1}^{\varrho}\sum_{\nu=1}^{\infty}\overset{(\mu)}{A}_{\nu}\left(\frac{z-\gamma_\mu}{z-\alpha_\mu}\right)^{\nu}+\sum_{\mu=1}^{\varrho}\frac{1}{2i\pi}\int_{(K_\mu)}\frac{\sigma(Z)}{Z-\gamma_\mu}dZ$$

Καλοῦντες $\sigma_1(\gamma_\mu)$ τὸ $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{(K_\mu)}\frac{\sigma(Z)}{Z-\gamma_\mu}dZ$ θὰ ἔχωμεν τὸν ρηθέντα τύπον (2). Ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ παρατηρήσεις, αἵτινες δύνανται νὰ γίνωσιν ἐπὶ τοῦ $\sigma_1(\gamma_\mu)$, ὡς εὐκόλως ἐξαγόμεναι παραλείπονται.— Ἐπίσης δύναταί τις νὰ παρατηρήσῃ ὅτι ἐκ τοῦ τύπου (4) θὰ ἐξήγετο καὶ ἄλλος τύπος ἐὰν ἀντὶ τοῦ (K_μ) ἐλαμβάνομεν ὅλην τὴν περίμετρον G· ἤτοι θὰ εἴχομεν

$$\sigma(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{G}\frac{\sigma(Z)\,.\,\varphi'_\mu(Z)}{\varphi_\mu(Z)-\varphi_\mu(z)}dZ+\sigma(\gamma_\mu).$$

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τοῦ τύπου (5) ὑποθέτοντες $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_\mu$ ἐξάγομεν τὸν τύπον τοῦ κ. Comes Teixeira (Journal de Crelle. Bd. 122 σελ. 109).

Π. ΖΕΡΒΟΣ

---

[1] Καθόσον ἕνεκα τῆς ἀνισότητος (3) καὶ τῶν λοιπῶν ἐξ ἀρχῆς τεθεισῶν ὑποθέσεων ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδος ἣν καὶ ἡμεῖς ἐδώκαμεν (Nouvelles Annales, mai 1904).

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

σελὶς	στίχος	γράφε	ἀντὶ
1	1 ὑποσημειώσεως 1	Functionentheorie	Function theorie
1	2 » 1	Göschen	Goschen
1	5 » 1	1938	1958
2	10 ἐκ τῶν ἄνω	ἄγνωστοι	ἄγνωσται
5	5 » » »	προβολῆς»	προβολῆς
5	4 » » »	διάμετρον	ἀκτῖνος
8	15 » » »	(ἢ	(σύνηθες ἢ
9	9 » » »	ἐξωτερικῶν	ἐσωτερικῶν
9	10 » » »	ἐξωτερικόν	ἐσωτερικόν
11	8 » » »	Bolzano	Belzano
14	6 » » »	z_n	z_u
16	4 » » »	συντομώτερον	συντομότερον
22	7 » » »	ἐσωτερική	ἐωτερική
24	20 » » »	γενικότητά	γενίκευσίν
63	3 » » »	Kamke	Camke
63	25 » » »	δακτύλιος	δοκτύλιος
64	6 » » κάτω	C_2	G_2
79	4 » » »	logn-	-ogu
111	6 » » »	μόνον	μότον
129	16 » » »	$f(z)$	$\vert\,(z)$
142	2 » » »	$f(z)$	
145	2 » » »	ἐξωτερικὸν	ἐσωτερικὸν

Τέλος, εἰς τὴν σελ. 54, εἰς τὸν πρῶτον τύπον ἐκ τῶν ἄνω, νὰ παραλειφθῇ τὸ 47· καὶ εἰς τὴν σελ. 59, εἰς τὸν δεύτερον τύπον ἐκ τῶν ἄνω, ἡ ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως παράστασις νὰ γίνῃ $f(z)dz$.

Ἐπίσης, εἰς τὸν πρῶτον τύπον τῆς σελ. 168 νὰ διαγραφῇ τὸ pour $x=a$.