

Κεφάλαιο 1

Το φαινόμενο των παλιρροιών

1.1 Παλιρροιακές δυνάμεις

Το φαινόμενο των παλιρροιών είναι ένα φαινόμενο που εμφανίζεται σε εκτεταμένα σώματα μόνο με τη δύναμη της βαρύτητας και είναι απόρροια της καταπληκτικής ιδιότητας του βαρυτικού νόμου να είναι η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σωμάτων ανάλογη των αδρανειακών μαζών των σωμάτων. Συνεπώς καθημερινή έκφανση της αρχής της ισοδυναμίας είναι η παλιρροιακή δύναμη.

Θεωρήστε ένα ουράνιο σώμα σαν την Γή και θεωρήστε για απλότητα ότι έχει σφαιρικό σχήμα. Το ερώτημα που θέλουμε να απαντήσουμε είναι ποιά δύναμη ασκείται στο σώμα αυτό από κάποιο άλλο σφαιρικό ουράνιο σώμα όπως π.χ. η σελήνη ή ο ήλιος. Από το καταπληκτικό θεώρημα του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι η δύναμη που ασκείται από το μακρινό σώμα σε ένα τμήμα της Γής είναι

$$\vec{F}_r = -GMm \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}, \quad (1.1)$$

όπου M η μάζα του μακρινού σφαιρικού σώματος του οποίου το κέντρο βρίσκεται στη θέση \vec{R} και m είναι μία στοιχειώδης μάζα που βρίσκεται στη θέση \vec{r} . Θέλουμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια της Γής που προσδιορίζεται από την εξίσωση $|\vec{r}| = a$ λαμβάνοντας ως αρχή των αξόνων το κέντρο της Γης. Το θέμα εδώ είναι ότι σε όλη τη Γή ασκείται μία δύναμη:

$$\vec{F}_0 = GMm \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3},$$

με αποτέλεσμα όλη η Γή να επιταχύνεται προς το ουράνιο σώμα με την συνεπαγόμενη επιτάχυνση. Ο παρατηρητής που βρίσκεται επί της Γής και κινείται με αυτήν θεωρεί ότι του ασκείται η φαινόμενη δύναμη

$$\vec{F}_f = -GMm \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3},$$

οπότε στο επιταχυνόμενο σύστημα της Γής που προσπίπτει στο μακρινό σώμα στην επιφάνεια της Γής ασκείται η συνολική δύναμη:

$$\vec{F}_t = \vec{F}_r + \vec{F}_f = -GMm \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} - GMm \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}. \quad (1.2)$$

Η δύναμη αυτή είναι η παλιρροιακή δύναμη. Θα την εκτιμήσουμε στη επιφάνεια της Γης $|\vec{r}| = a$ υπο τη προϋπόθεση ότι το ουράνιο σώμα είναι αρκετά μακριά από τη Γη ώστε η ακτίνα της Γής a να είναι πολύ μικρότερη από την απόσταση των δύο σωμάτων R , και να μπορούμε να αμελήσουμε στον υπολογισμό της δύναμης όρους τάξης a^2/R^2 . Ως παράδειγμα η ακτίνα της Γης είναι $a = 6.37 \times 10^3 \text{ km}$ και η απόσταση Γης-Σελήνης είναι $3.84 \times 10^5 \text{ km}$ με αποτέλεσμα ο λόγος a/R να είναι τάξης $O(10^{-2})$, ενώ στη περίπτωση της παλιρροιακής δύναμης που προκαλείται από τον Ήλιο επειδή η τροχιά της Γής περί τον Ήλιο έχει ακτίνα $1.49 \times 10^8 \text{ km}$ ο λόγος είναι $a/R = O(10^{-5})$. Αν ορίσουμε τη συνάρτηση:

$$\vec{f}(\vec{R}) = GMm \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3},$$

τότε η παλιρροιακή δύναμη είναι η διαφορά

$$\vec{F}_t = \vec{f}(\vec{R} - \vec{r}) - \vec{f}(\vec{R}) \quad (1.3)$$

η οποία όταν $|\vec{r}| \ll R$ εκτιμάται με πολύ ακρίβεια από το πρώτο όρο τάξης r της σειράς Taylor της $\vec{f}(\vec{R} - \vec{r})$:

$$\vec{F}_t = -(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{f} \Big|_{\vec{R}} + O(a^2/R^2), \quad (1.4)$$

όπου ∇ η βαθμίδα ως προς τη μεταβλητή \vec{R} .

Η παλιρροιακή δύναμη σε πρώτη τάξη ως προς a/R είναι:

$$\vec{F}_t = -GMm \frac{(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{R}}{R^3} + 3GMm \frac{\vec{R}}{R^4} \vec{r} \cdot \nabla R \quad (1.5)$$

Για να εκτιμήσουμε την (1.5) θα χρειασθούμε πρώτον τη βαθμίδα ∇R του μέτρου του διανύσματος θέσης:

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}},$$

που προκύπτει (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα) ότι είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα:

$$\nabla R = \frac{\vec{R}}{R},$$

καθώς και την τιμή της έκφρασης

$$(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{R},$$

που υπολογίζεται εύκολα αν τη μετατρέψουμε σε δείκτες. Επειδή η i -οστή συντεταγμένη του παραπάνω διανύσματος είναι με αθροιστική σύμβαση η:

$$r_j \frac{\partial R_i}{\partial R_j} = r_j \delta_{ij} = r_i$$

θα έχουμε:

$$(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{R} = \vec{r}.$$

Συνεπώς η παλιρροιακή δύναμη (1.5) είναι:

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= -GMm \frac{\vec{r}}{R^3} + 3GMm \vec{r} \cdot \vec{R} \frac{\vec{R}}{R^5} \\ &= GMm \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{R}) \vec{R} - R^2 \vec{r}}{R^5}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Τι σημαίνει αυτή η πολύπλοκη έκφραση; Για να καταλάβουμε την έκφραση αυτή την υπολογίζουμε στη περιφέρεια της Γης σε ένα επίπεδο το οποίο διέρχεται από το κέντρο του πλανήτη και το μακρινό σώμα. Εάν x είναι η διεύθυνση από το κέντρο της Γης προς τον πλανήτη και z η κάθετη σε αυτή διεύθυνση τότε με αρχή το κέντρο του πλανήτη το μακρινό σώμα βρίσκεται στη θέση: $\vec{R} = R\vec{i}$, όπου \vec{i} το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση x , ενώ τα σημεία της περιφέρειάς της Γης είναι:

$$\vec{r} = a(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}),$$

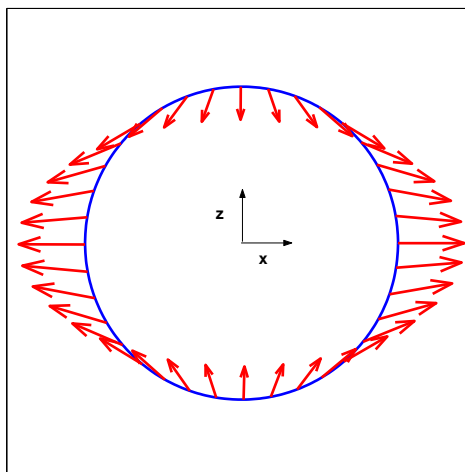
όπου \vec{j} το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση z , και a η ακτίνα της Γης. Σε αυτή τη περίπτωση η παλιρροιακή δύναμη (1.6) στη περιφέρεια της Γης είναι:

$$\vec{F}_t = \frac{GMm a}{R^2} \frac{a}{R} (2 \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}),$$

η οποία σχεδιάζεται στο σχήμα 1.1. Παρατηρούμε πρώτον ότι έχει μέγεθος που είναι μικρότερο κατά τον παράγοντα a/R από την κατευθείαν βαρυτική δύναμη GMm/R^2 που ασκείται από το μακρινό ουράνιο σώμα στη στοιχειώδη μάζα m . Επειδή όμως η συνολική παλιρροιακή δύναμη είναι ανάλογη της μάζας του μακρινού σώματος, ουράνια σώματα μεγάλης μάζας που είναι πολύ απομακρυσμένα ασκούν συγκρίσιμη παλιρροιακή δύναμη με άλλα μικρότερης μάζας που βρίσκονται κοντινότερα. Ας υπολογίσουμε το λόγο της παλιρροιακής δύναμης που ασκεί ο Ήλιος στη Γη με τη παλιρροιακή δύναμη που ασκείται στη Γη από τη Σελήνη. Επειδή η μάζα του Ηλίου είναι $M_s = 1.99 \times 10^{31} \text{ kg}$ ενώ η μάζα της Σελήνης $M_m = 7.34 \times 10^{23} \text{ kg}$ ο λόγος των παλιρροιακών του δυνάμεων επί της Γης είναι περίπου

$$\frac{F_{t s}}{F_{t m}} \approx 0.3,$$

οπότε αναμένεται, παρότι η κύρια παλιρροιακή δύναμη προέρχεται από τη Σελήνη, ο Ήλιος να επιρρεάζει αρκετά τα παλιρροιακά φαινόμενα στη Γη. Αυτό πράγματι παρατηρείται και λαμβάνεται υπόψη πολύ σοβαρά στη ναυσιπλοΐα. Επίσης η μεταλαγή του πλάτους των παλιρροιών με τη



Σχήμα 1.1: Η παλιρροιακή δύναμη σε διαφορετικά σημεία στην επιφάνεια της Γης. Το σώμα που ασκεί τη παλιρροιακή δύναμη βρίσκεται επί του άξονα x .

θέση του Ήλιου χρησιμοποιείται για τη χρονομέτρηση απολυθωμάτων, που δίνουν πολύ χρήσιμες πληροφορίες για το παλαιοκλίμα της Γης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Πότε αναμένετε μεγαλύτερη παλίρροια όταν έχουμε καινούργιο φεγγάρι ή όταν είναι πανσέληνος;

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της παλιρροιακής δύναμης με το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα βρίσκουμε ότι η ακτινική συνιστώσα της παλιρροιακής δύναμης είναι:

$$F_{t, r} = \frac{GMm}{R^2} \frac{a}{R} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{GMm}{R^2} \frac{a}{R} \frac{1 + 3 \cos 2\theta}{2}.$$

Παρατηρείτε ότι στην ακτινική έκφραση η παλιρροιακή δύναμη έχει την τάση να δημιουργεί άμπωτη στα πλάτη για τα οποία είναι $1 + 3 \cos 2\theta < 0$, δηλαδή για πλάτη μεγαλύτερα από $\theta > 55^\circ$, ενώ στα άλλα πλάτη η δύναμη έχει θετική ακτινική συνιστώσα και υδάτινες μάζες έχουν τη τάση να κινηθούν σε αυτές τις περιοχές δημιουργώντας πλημμυρίδα. Είναι σημαντικό να παρατηρήσετε ότι η παλιρροιακή δύναμη εξαρτάται από το $\cos 2\theta$ οπότε είναι συμμετρική ως προς τον άξονα περιστροφής της Γης, αν επιλέξουμε ως επίπεδο (x, z) το επίπεδο που είναι κάθετο στον ισημερινό της Γης στο οποίο περίπου κείται και η Σελήνη αλλά και ο Ήλιος. Αυτό έχει ως συνέπεια καθώς περιστρέφεται η Γη, παρασύρωντας τις υδάτινες μάζες μαζί της, η παλίρροια να εμφανίζει δύο πλημμυρίδες και δύο άμπωτιδες κάθε 24ώρο, δηλαδή οι παλίρροιες έχουν περίοδο που είναι σχεδόν 12 ώρες (στη ακρίβεια είναι 12 ώρες και 42 λεπτά διότι η Σελήνη περιστρέφεται γύρω από τη Γή με την ίδια φορά που περιστρέφεται η Γή γύρω από τον εαυτό της). Την εξήγηση αυτή για τη περίοδο των παλιρροιών την έδωσε πρώτος ο Νεύτων και αποτέλεσε συγκλονιστική απόδειξη των δυνατοτήτων της νέας δυναμικής θεωρίας που εισήγαγε.

Άσκηση 2. Σχεδιάστε τη παλιρροιακή δύναμη επί του ισημερινού της Γης υπό την προϋπόθεση ότι το μακρυνό ουράνιο σώμα είναι επί του επιπέδου του ισημερινού. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πριν αφήσουμε το φαινόμενο των παλιρροιών ας βεβαιωθούμε ότι αντιλαμβανόμαστε το λόγο για τον οποίο η παλιρροιακή δύναμη στον ισημερινό της Γης έχει θετική ακτινική διεύθυνση στο σημείο που βρίσκεται πλησιέστερα στο μακρυνό ουράνιο σώμα $\theta = 0$ αλλά και στο αντιδιαμετρικό του σημείο $\theta = \pi$ που βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από αυτό. Όπως είπαμε λόγω της αρχής της ισοδυναμίας σε μία στοιχειώδη μάζα ασκούνται δύο δυνάμεις η ελκτική δύναμη του μακρυνού σώματος και η φαινόμενη δύναμη λόγω του γεγονότος ότι η Γή επιταχύνεται προς το μακρυνό σώμα που είναι ίση και αντίθετη που θα ασκείτο σε αυτή τη μάζα αν βρισκόταν στο κέντρο της Γης. Στη πρώτη περίπτωση $\theta = 0$ η ελκτική δύναμη είναι μεγαλύτερη από τη φαινόμενη δύναμη με αποτέλεσμα η παλιρροιακή δύναμη να έχει διεύθυνση προς το μακρυνό ουράνιο σώμα. Στην άλλη περίπτωση $\theta = \pi$ η ελκτική δύναμη είναι μικρότερη από την φαινόμενη δύναμη με αποτέλεσμα να υπάρχει και πάλι τάση για πλημμυρίδα που ασκείται στη στοιχειώδη δύναμη από το μακρυνό σώμα οπότε