Σκέδαση - Ενεργός διατομή

Σε προηγούμενη διάλεξη μάθαμε ότι οι τροχιές σωματιδίων στο βαρυτικό πεδίο μιας σημειακής ή σφαιρικά συμμετρικής κατανομής μάζας είναι γενικά κάποια κωνική τομή. Ειδικά στην περίπτωση των πλανητών μάθαμε ότι οι τροχιές είναι ελλειπτικές και αναλύσαμε περεταίρω τα διάφορα χαρακτηριστικά αυτών. Τι είναι όμως αυτό που διαφοροποιεί την τροχιά και την καθιστά περισσότερο ή λιγότερο ελλειπτική ή ακόμη ακόμη και παραβολή ή υπερβολή (τα άλλα είδη των κωνικών τομών); Μα φυσικά οι αρχικές συνθήκες· μια πέτρα που πετάτε από την επιφάνεια της Γης διαγράφει στην πραγματικότητα ένα τόξο μιας πολύ έκκεντρης έλλειψης (η παραβολική τροχιά που μαθαίνουμε είναι στην πραγματικότητα προσέγγιση λόγω του μικρού μεγέθους του τόξου), ένας πύραυλος αν εκτοξευθεί με πολύ μεγάλη ταχύτητα μπορεί να εκτελέσει ελλειπτική, ή ακόμη παραβολική ή υπερβολική τροχιά και να ξεφύγει εντελώς από το βαρυτικό πεδίο της Γης. Μια άλλη παράμετρος, άμμεσα συνδεδεμένη με τις αρχικές συνθήκες της κίνησης, που μπορεί να αποκαλύψει το είδος της τροχιάς είναι η συνολική ενέργεια του κινούμενου σώματος

$$E = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{GMm}{r},$$

η οποία ως γνωστό διατηρείται. Αν η συνολική ενέργεια είναι αρνητική, τότε αυτόματα συνεπάγεται ότι η τροχιά είναι πεπερασμένου εύρους αφού αν εκτεινόταν στο άπειρο η δυναμική ενέργεια θα μηδενιζόταν και η κινητική ενέργεια το πολύ πολύ να μηδενιζόταν. Η μοναδική όμως πεπερασμένου εύρους κωνική τομή είναι η έλλειψη. Αν η συνολική ενέργεια είναι μηδενική τότε η ταχύτητα του σώματος στο άπειρο είναι μηδενική. Τι εκκεντρότητα θα έχει η τροχιά αυτή; Δεδομένου ότι σε κάθε περίπτωση η τροχιά θα έχει τη γενική μορφή $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$, οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας θα είναι: $\dot{r} = \dfrac{p\varepsilon\sin\theta\,\dot{\theta}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}$ και $r\dot{\theta} = \dfrac{p\dot{\theta}}{1+\varepsilon\cos\theta}$. Επίσης βάσει της σταθερής στροφορμής έχουμε ότι $\dot{\theta} = \dfrac{L}{mr^2} = \dfrac{L(1+\varepsilon\cos\theta)^2}{mp^2}$. Έτσι το τετράγωνο της ταχύτητας θα είναι $u^2 = \left(\dfrac{L}{mp}\right)^2 \left[1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta\right]$. Η ποσότητα αυτή θα πρέπει να μηδενίζεται όταν $r \to \infty$, δηλαδή όταν $\cos\theta \to -1/\varepsilon$. Επομένως θα πρέπει $\varepsilon^2 - 1 = 0$ και εφόσον η εκκεντρότητα είναι θετικός αριθμός, $\varepsilon = 1$. Η τροχιά σε αυτή την περίπτωση είναι παραβολή. Τέλος, με ανάλογα επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι όταν $E > 0$, η τροχιά είναι υπερβολή. Συνοπτικά, αν η ενέργεια είναι αρνητική το σύστημα είναι δέσμιο, ενώ αν είναι θετική, αργά ή γρήγορα το σύστημα θα διαλυθεί. [Υπολογείστε τη συνολική ενέργεια στην περίπτωση κυκλικής κίνησης.]

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις τροχιές σωμάτων που έρχονται από το άπειρο με κάποια συγκεκριμένη ταχύτητα και περνούν κοντά σε κάποιο πλανήτη. Πόσο θα αποκλίνουν; Μια συγκεκριμένη δέσμη από αυτά (π.χ. μια βροχή μετεώρων) τι κατανομή θα έχει μετά το πέρασμά της από το βαρυτικό πεδίο του πλανήτη; Θα μελετήσουμε την κίνηση των σωματιδίων στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη, το οποίο ναι μεν δεν είναι αδρανειακό αλλά για το χρονικό διάστημα που τα σωματίδια αλληλεπιδρούν έντονα με το πεδίο του πλανήτη μπορούμε να υποθέσουμε πως αυτός κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Έστω ένα σωματίδιο (αρκετά μικρό σε σχέση με τον πλανήτη ώστε να θεωρούμε τον δεύτερο ακλόνητο) σε άπειρη απόσταση από τον πλανήτη κινούμενο με ταχύτητα u_0 προς αυτόν. Αν δεν υπήρχε ο πλανήτης το σωματίδιο θα πέρναγε σε απόσταση *b* από αυτόν. Η κοντινότερη απόσταση που θα φτάσει από το κέντρο του πλανήτη δίνεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\frac{1}{2}m{u_0}^2 = -\frac{GMm}{r_{\min}} + \frac{1}{2}m\left(\frac{b}{r_{\min}}u_0\right)^2 , \qquad (1)$$

η οποία εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας, ενώ ο τελευταίος όρος μέσα στην παρένθεση είναι η ταχύτητα του σώματος στην πλησιέστερη απόσταση, που μπορεί να γραφεί έτσι εξαιτίας της διατήρησης της στροφορμής (στη θέση αυτή η ταχύτητα είναι κάθετη στην επιβατική ακτίνα, επομένως η στροφορμή παίρνει απλά τη μορφή mur). Επιπλέον, η πλησιέστερη απόσταση (βλέπε σχήμα) είναι προφανώς από την πολική εξίσωση της υπερβολής $r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$. Η εξίσωση (1) λοιπόν παίρνει τη μορφή

$${u_0}^2\left[\left(\frac{b}{p}(1+\varepsilon)\right)^2 - 1\right] = \frac{2GM}{p}(1+\varepsilon) . \qquad (2)$$

Παρατηρώντας το σχήμα βλέπουμε ότι στο όριο που η γωνία θ τείνει στην οριακή της τιμή $\theta_0 = \cos^{-1}(-1/\varepsilon)$, ταυτόχρονα $r\sin(\theta_0 - \theta) \to b$. Δηλαδή,

$$\frac{p\sin(\theta_0 - \theta)}{1+\varepsilon\cos\theta} \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} b .$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital, ή αλλιώς, το κλάσμα αυτό τείνει στο $\frac{p}{\varepsilon\sin\theta_0}$, επομένως $p = b\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, και αντικαθιστώντας το στην εξίσωση (2) καταλήγουμε ύστερα από κάποιες πράξεις στο ότι

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b{u_0}^2}{GM}\right)^2} . \qquad (3)$$

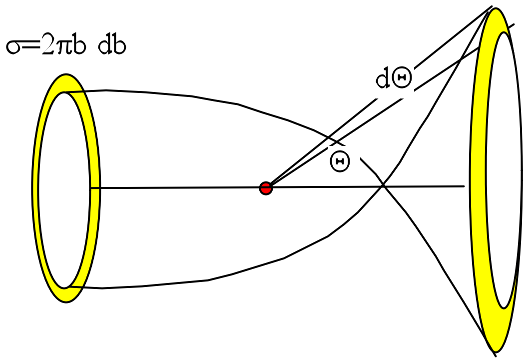
Τέλος η γωνία εκτροπής $\Theta_{\max}$ του σωματιδίου από την αρχική του πορεία είναι $2\theta_0 - \pi$, ή πιο απλά

$$\sin\frac{\Theta_{\max}}{2} = \sin\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta_0 = \frac{1}{\varepsilon} . \qquad (4)$$

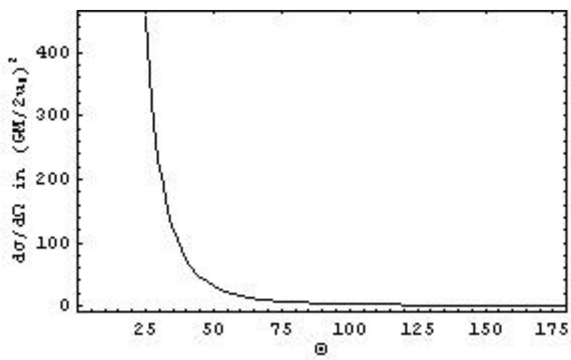
Ας θεωρήσουμε τώρα το μέτωπο της βροχής μετεώρων που κινούνται προς τον πλανήτη και βρίσκονται σε απόσταση από τον άξονα που περνά από το κέντρο του πλανήτη από *b* έως *b*+*db*. Η επιφάνεια του μετώπου αυτού είναι $d\sigma = 2\pi b\, db$, και όλα τα σωματίδια που «βλέπουν» σε αυτό το μέτωπο θα εξοστρακιστούν κατά γωνία $\Theta_{\max}$ περνώντας κοντά από τον πλανήτη, δηλαδή εντός μιας στερεάς γωνίας $d\Omega = 2\pi\sin\Theta_{\max}\, d\Theta_{\max}$ (στο σχήμα λόγω πεπερασμένου μεγέθους δεν είναι εμφανής η ισότητα μεταξύ της γωνίας Θ του σχήματος και της γωνίας εκτροπής – αν απομακρυνόμασταν όμως σε μεγάλη απόσταση από το ελκτικό κέντρο αυτές οι δύο γωνίες θα συνέπιπταν). Από εδώ και πέρα θα αγνοήσουμε το δείκτη “max” αφού για κάθε τιμή του *b* αντιστοιχεί και μια ξεχωριστή γωνία εκτροπής. Από τις σχέσεις (3) και (4) συνεπάγεται ότι $b = \dfrac{GM}{u_0^2}\cot\dfrac{\Theta}{2}$ και αντίστοιχα $db = -\dfrac{GM}{2u_0^2}\dfrac{1}{\sin^2(\Theta/2)}d\Theta$. Η επιφάνεια του μετώπου ανά μονάδα στερεάς γωνίας εκτροπής, η επονομαζόμενη *διαφορική ενεργός διατομή* (differential cross section) είναι λοιπόν

$$\left|\frac{d\sigma}{d\Omega}\right| = \left|\frac{b\,db}{\sin\Theta\, d\Theta}\right| = \left(\frac{GM}{2u_0^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)}.$$

Η απόλυτη τιμή έχει εισαχθεί προκειμένου να αποφευχθούν αρνητικές ποσότητες εξαιτίας του ότι όσο μεγαλώνει η απόσταση *b*, μικραίνει η γωνία εκτροπής ή σκέδασης Θ. Θεωρώντας ότι η βροχή των μετεώρων έχει σταθερή πυκνότητα, δηλαδή η ροή σωματιδίων είναι ίδια σε κάθε μοναδιαία επιφάνεια κάθετη στην ταχύτητα αυτών κατά την προσέγγιση του πλανήτη, μετά την εκτροπή τους από το βαρυτικό πεδίο του πλανήτη θα έχουν διαφορετική πυκνότητα η οποία θα είναι ανάλογη της διαφορικής ενεργού διατομής.



Για να το καταλάβετε φαντασθείτε ότι κατά την πρόσπτωση έχουμε $I = N/S$ (*N* σωματίδια ανά επιφάνεια *S* κάθε δευτερόλεπτο). Σε μια απειροστή μετωπική επιφάνεια *dS* θα περνούν *IdS* σωματίδια στη μονάδα του χρόνου και τα σωματίδια αυτά θα εκτρέπονται όλα μέσα σε μια στερεά γωνία $d\Omega = \dfrac{dS}{\left|d\sigma/d\Omega\right|}$. Επομένως η πυκνότητα σωματιδίων ανά στερεά γωνία εκτροπής θα είναι ίση με $I\left|\dfrac{d\sigma}{d\Omega}\right|$.



Παρατηρούμε ότι η πυκνότητα των σωματιδίων θα είναι συγκριτικά πολύ-πολύ μεγαλύτερη στην αρχική κατεύθυνση κίνησης (πολύ μικρά Θ) απ' ότι σε μεγάλες γωνίες εκτροπής (βλ. διάγραμμα). Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι τα σωματίδια που θα περάσουν σε μεγάλη απόσταση από τον πλανήτη (η μεγαλύτερη πλειοψηφία δηλαδή) δεν θα εκτραπεί σχεδόν καθόλου από την αρχική δέσμη ενώ μόνο όσα περάσουν αρκετά κοντά στον πλανήτη θα εκτραπούν σημαντικά. Ολοκληρώνοντας, τη διαφορική ενεργό διατομή σε ολόκληρη τη στερεά γωνία γύρω από τον πλανήτη θα έχουμε μια εκτίμηση της συνολικής ενεργής μετωπικής επιφάνειας στην οποία θα κάνει αισθητή (βαρυτικά) την παρουσία του ο πλανήτης.

$$\sigma = \int\left|\frac{d\sigma}{d\Omega}\right| d\Omega = 2\pi\left(\frac{GM}{2u_0}\right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\Theta}{\sin^4(\Theta/2)}\, d\Theta\,.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι η παραπάνω ποσότητα, η επονομαζόμενη *ενεργός διατομή* (cross section), στο συγκεκριμένο παράδειγμα που εξετάζουμε (τη βαρυτική σκέδαση) είναι άπειρη αφού η ολοκληρωτέα ποσότητα για μικρές γωνίες παίρνει τη μορφή $16/\Theta^3$ οπότε το ολοκλήρωμα αποκλίνει στο μηδέν. Ο απειρισμός αυτός υποδηλώνει την άπειρη ενεργό εμβέλεια του πεδίου. Ενδεικτικά, ο λόγος της ενεργού διατομής για γωνίες από 10^o έως 20^o προς την ενεργό διατομή για γωνίες από 170^o έως 180^o και συνεπώς ο αντίστοιχος λόγος πυκνοτήτων των σωματιδίων θα είναι περίπου 12866:1.

Οι έννοιες της ενεργού διατομής χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην πυρηνική φυσική, όπου η κατανομή των βλημάτων-στοιχειωδών σωματιδίων ύστερα από την κρούση τους με κάποιο σωματίδιο-στόχο είναι το εργαλείο που χρησιμοποιούν οι πειραματικοί φυσικοί προκειμένου να μελετήσουν το δυναμικό πεδίο αλληλεπίδρασης του βλήματος με τον στόχο. Η δε ενεργός διατομή για μια συγκεκριμένη πυρηνική αντίδραση, η οποία μετριέται σε barn (1 barn=10^{-24} cm^2), μας δείχνει πόσο πιθανό είναι να γίνει η αντίδραση αυτή για μια δεδομένη πυκνότητα δέσμης βλημάτων. Για παράδειγμα η εξαιρετικά μικρή ενεργός διατομή των νετρίνων γενικά με την ύλη ($\sigma_\nu \cong 10^{-20}$ barn) είναι αυτό που κάνει τη Γη διαφανή στα κοσμικά νετρίνα. Η χρήση των ενεργών διατομών στις πυρηνικές αντιδράσεις είναι εφικτή εξαιτίας της πεπερασμένης εμβέλειας των πυρηνικών αντιδράσεων σε αντίθεση με τη βαρυτική.