

Φασματική ισχύς σήματος

Ας υποθέσουμε ότι μια μετρητική συσκευή καταμετρά την εξέλιξη με το χρόνο κάποιου φαινομένου. Η περιοδικότητα που μπορεί να υποκρύπτεται σε μια τέτοια χρονοσειρά είναι πολλές φορές σημαντικό να αναδυθεί, γιατί μέσω αυτής μπορεί να αποκαλυφθεί η δυναμική που δημιουργεί την εξέλιξη του εν λόγω φαινομένου. Άλλες φορές η περιοδικότητα αυτή μπορεί να είναι γνωστή αλλά λόγω πολυπλοκότητας ή ακόμη και θορύβου που είναι εμπλεγμένος στις μετρήσεις μας δεν είναι αυτή άμεσα ορατή στη χρονοσειρά των μετρήσεών μας. Ο καλύτερος τρόπος να αναδειχθεί οποιαδήποτε περιοδικότητα είναι πιθανώς κρυμμένη μέσα στο σήμα είναι να υπολογίσουμε το φάσμα του σήματός μας, δηλαδή τον μετασχηματισμό Fourier αυτού. Το φάσμα ενός χρονικά εξαρτώμενου σήματος μας πληροφορεί για το πόσο έντονο είναι το σήμα σε μία δεδομένη συχνότητα.

Έστω μια συνάρτηση μιας μεταβλητής $x(t)$, τότε από το θεώρημα Fourier μπορούμε να αναλύσουμε τη συνάρτηση στο χώρο των συχνοτήτων f :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) e^{-i2\pi f t} df$$

όπου το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier $\tilde{x}(f)$ της $x(t)$ δίνεται από:

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i2\pi f t} dt.$$

Προτιμήσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη συχνότητα f (μετρημένη σε κύκλους/μονάδα χρόνου, ή Hz εάν η μονάδα χρόνου είναι το second) αντί της κυκλικής συχνότητας $\omega = 2\pi f$ (με μονάδες rad/μονάδα χρόνου), διότι έτσι αποφεύγονται οι σταθεροί όροι με τα π στον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier. Οι παραπάνω δύο σχέσεις φαίνεται άμεσα πως είναι συνεπείς μεταξύ τους, αρκεί να χρησιμοποιήσει κανείς την ταυτότητα

$$\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi f (t - t_0)} df.$$

Σχηματική απόδειξη: Επειδή είναι ιδιαίτερα άβολο να ολοκληρώσει κανείς το ημίτονο και το συνημίτονο που περιέχονται στο παραπάνω ολοκλήρωμα, θα ορίσουμε την παραμετροποιημένη συνάρτηση δ_v ,

$$\delta_v(t - t_0) = \int_{-v}^{+v} e^{i2\pi f (t - t_0)} df$$

Το ημίτονο, όντας περιττή συνάρτηση εξαφανίζεται και απομένει μόνο το συνημίτονο, του οποίου το ολοκλήρωμα βρίσκεται απλά ότι είναι

$$\delta_v(t - t_0) = 2 \frac{\sin[2\pi v(t - t_0)]}{2\pi(t - t_0)}.$$

Η τελευταία αυτή ποσότητα στη θέση $t = t_0$ είναι $2v$ ενώ απομακρυνόμενοι από το t_0 ταλαντώνεται με συχνότητα v και ταυτόχρονα φθίνει. Το ενδιαφέρον όμως είναι πως το ολοκλήρωμα της ποσότητας αυτής (υπολογίζεται εύκολα με μιγαδική ολοκλήρωση της e^{iz} / z αποφεύγοντας τον πόλο στη θέση $z=0$) στον άξονα των t είναι 1 για κάθε τιμή του

ν . Η περιγραφή αυτή θυμίζει ακριβώς τη μορφή της συνάρτησης δέλτα όταν το $\nu \rightarrow \infty$. Η «τρελή» ταλάντωση της συνάρτησης αυτής για μεγάλα ν , όταν $t \neq t_0$, εξασφαλίζει την μηδενική συμμετοχή της συνάρτησης στις περιοχές αυτές. Ουσιαστικά με τη βοήθεια μιας μιγαδικής ολοκλήρωσης, εύκολα μπορείτε να δείτε τη δράση της παραπάνω συνάρτησης όταν αυτή πολλαπλασιάζει κάποια τυχαία συνάρτηση και να πιστοποιήσετε ότι ικανοποιεί τη βασική ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα στο όριο $\nu \rightarrow \infty$.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα μετασχηματισμού Fourier:

(1) Το ημίτονο $w(t) = \sin 2\pi f_0 t$ εκτεινόμενο σε όλους τους χρόνους έχει προφανώς μια καλά καθορισμένη συχνότητα, την f_0 . Για να ελέγξουμε τη διαίσθησή μας. Ο μετασχηματισμός Fourier του ημιτόνου θα είναι

$$\tilde{w}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi f_0 t) e^{i2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i} \left[e^{i2\pi(f+f_0)t} - e^{i2\pi(f-f_0)t} \right] dt = \frac{1}{2i} [\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]$$

Με άλλα λόγια το φάσμα του ημιτόνου αποτελείται από δύο συχνότητες την f_0 και την $-f_0$ και μάλιστα με φανταστικά πλάτη! Αυτά τα αποτελέσματα όμως δεν θα έπρεπε να μας προκαλούν έκπληξη αφού είναι άμεσα φανερό ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας πραγματικής συνάρτησης G είναι συμμετρικός ως προς τις συχνότητες και ειδικότερα $\tilde{G}(f) = \tilde{G}^*(-f)$. Όσο για τα πλάτη αυτά είναι εν γένει μιγαδικά και ιδιαίτερη αξία έχουν τα σχετικά μέτρα τους για να καταλάβουμε πόσο έντονο είναι το περιεχόμενο του σήματος στην κάθε συχνότητα.

(2) Μια άλλη ιδιαίτερη περίπτωση σήματος είναι αυτή ενός εντοπισμένου στο χρόνο σήματος $w(t) = e^{-(t-t_0)^2/\sigma}$. Είναι εύκολο ναδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier αυτού έχει πάλι την ίδια γκαουσιανή μορφή $|\tilde{w}(f)| \propto e^{-\pi^2 \sigma f^2}$. Άξιο παρατήρησης εδώ είναι το γινόμενο του εύρους των δύο γκαουσιανών είναι σταθερό και ίσο με $1/\pi$. Το γεγονός αυτό σχετίζεται άμεσα με την αρχή της αβεβαιότητας που συναντά κανείς στην κβαντομηχανική αφού ο μετασχηματισμός Fourier μιας κυματοσυνάρτησης είναι η ίδια κυματοσυνάρτηση στο χώρο των ορμών. Έτσι συσχετίζονται άμεσα οι αβεβαιότητες εντοπισμού στο χώρο των θέσεων και των ορμών ενός σωματιδίου.

Εάν είχαμε στη διάθεση μας τη συνάρτηση, $x(t)$, δηλαδή τις τιμές της συνάρτησης στο άπειρο διάστημα $(-\infty, \infty)$ τότε θα μπορούσαμε να αναλύσουμε την $x(t)$ κατά Fourier και να υπολογίσουμε την ισχύ του φάσματος του σήματος σε κάθε συχνότητα (power spectrum): $P(f) \propto |\tilde{x}(f)|^2$, αυτό δηλαδή που μας ενδιαφέρει για το σήμα. Συνήθως, όμως, έχουμε μόνο ένα μικρό δείγμα της $x(t)$, ένα πεπερασμένο αριθμό τιμών (μετρήσεις) από ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα (διάρκεια της μέτρησης). Εάν αναλύσουμε αυτό το δείγμα της $x(t)$ κατά Fourier και υπολογίσουμε τη φασματική ισχύ του διακριτού σήματος $\hat{P}(f)$ προκύπτει το ερώτημα ποια είναι η σχέση του ιδανικού $P(f)$ (αυτού που θα παίρναμε από τον μετασχηματισμό Fourier της $x(t)$)

για όλους τους χρόνους) με το $\hat{P}(f)$; Πρόκειται για πιστό αντίγραφο της $P(f)$ ή απλώς ένα αλλοιωμένο κατέκτυπο αυτής;

Για να συγκεκριμενοποιήσουμε το ερώτημα θεωρούμε ότι ανά χρονικά διαστήματα τ μετρούμε την $x(t)$, δηλαδή διαθέτουμε τις μετρήσεις $\hat{x}_n = x(n\tau)$, με $n = \dots -1, 0, 1, 2, \dots$. Ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της $\hat{x}$, $\tilde{\hat{x}}(f)$, ακολουθώντας την ακόλουθη συνταγή ως προσέγγιση του συνεχούς μετασχηματισμού Fourier:

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i2\pi f t} dt \rightarrow \tilde{\hat{x}}(f) = \tau \sum_n x_n e^{i2\pi f n \tau}.$$

Θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει «τη «χτένα του Dirac» $D(t) = \tau \sum_n \delta(t - n\tau)$ (ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας τ έχει εισαχθεί προκειμένου η παραπάνω συνάρτηση να γίνει αδιάστατη) για να επιλέξει τις διακριτές μετρήσεις, οπότε ο μετασχηματισμός Fourier $\tilde{\hat{x}}(f)$ που κατασκευάσαμε παραπάνω κατ' αναλογία του αντίστοιχου ολοκληρώματος θα προέκυπτε αυτόματα και όχι ως προσέγγιση.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier $\tilde{\hat{x}}(f)$ είναι περιοδικός με περίοδο $1/\tau$ (αφού $e^{i2\pi(f+1/\tau)n\tau} = e^{i2\pi f n \tau} e^{i2\pi n} = e^{i2\pi f n \tau}$). Έτσι

$$\tilde{\hat{x}}(f) = \tilde{\hat{x}}\left(f + \frac{n}{\tau}\right).$$



Με άλλα λόγια το φάσμα της $\hat{x}$ επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα συχνοτήτων εύρους $1/\tau$. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να οδηγήσει σε δύο ποιοτικά διαφορετικά είδη φάσματος. (α) Αν το φάσμα του πραγματικού σήματος $x(t)$ έχει μικρό εύρος και συγκεκριμένα αν περιορίζεται στην περιοχή

$$-1/2\tau \leq f \leq 1/2\tau,$$

τότε το φάσμα ισχύος αυτού, στην περίπτωση διακριτών μετρήσεων απλώς θα επαναλαμβάνεται περιοδικά (βλ. διάγραμμα). Παρακάτω θα συζητήσουμε εκτενέστερα την περίπτωση αυτή. (β) Αν το εύρος του φάσματος ισχύος του $x(t)$



εξαπλώνεται εκτός της προαναφερθείσας περιοχής (εστιγμένη καμπύλη), η περιοδικότητα του φάσματος των διακριτών μετρήσεων (συνεχής καμπύλη) θα επιφέρει αλλοίωση αυτού. Το κομμάτι του φάσματος εκτός της απώτατης συχνότητας $1/2\tau$ θα ανακλαστεί στην περιοχή εντός της $f=1/2\tau$ και θα «μολύνει» κατάλληλα το φάσμα ώστε αυτό να αποκτήσει την αναμενόμενη περιοδικότητα. Στο πλάτος του φάσματος

στην περιοχή των συχνοτήτων $[-1/2\tau, 1/2\tau]$ συντελούν αθροιστικά και το πλάτος του ιδανικού σήματος στις αριθμήσιμα άπειρες συχνότητες $f + \frac{n}{\tau}$. Το αποτέλεσμα δηλαδή της χρονικά διακριτής δειγματοληψίας του σήματος είναι η αλλοίωση του φάσματος του πραγματικού σήματος. Το φαινόμενο αυτό λέγεται *ετερισμός* (μετάφραση του aliasing).

Άξιο προσοχής είναι το γεγονός ότι η διακριτή δειγματοληψία οδηγεί σε ένα φάσμα με περιορισμένο, κατ' ουσία, εύρος συχνοτήτων, από $-1/2\tau$ μέχρι $1/2\tau$, όπου τ το χρονικό διάστημα δειγματοληψίας του σήματος. Οτιδήποτε πέραν αυτών των ορίων είναι απλώς επανάληψη, δεν κρύβει κάποιο φυσικό περιεχόμενο του σήματος. Ποια είναι όμως η φυσική σημασία αυτής της οριακής συχνότητας $\frac{1}{2\tau}$;

Έστω ότι παρατηρούμε ανά χρονικά διαστήματα τ ένα φυσικό φαινόμενο του οποίου η συχνότητα είναι f_0 , δηλαδή οι τιμές που μετράμε είναι οι $\sin(2\pi f_0 n\tau)$. Με λίγο σκέψη μπορείτε να δείτε ότι τις ίδιες τιμές θα έδινε και μία ταλάντωση συχνότητας

$$f_0 + \frac{k}{\tau} \quad (1)$$

όπου k κάποιος θετικός ή αρνητικός ακέραιος, οπότε το φάσμα των χρονικά διακριτών μετρήσεων θα είναι συναρτήσεις δέλτα επικεντρωμένες στα σημεία $f_0 + \frac{k}{\tau}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Παρατηρήστε ότι η μεγαλύτερη συχνότητα που δεν μπορεί να μολυνθεί από μικρότερες συχνότητες είναι η $\frac{1}{2\tau}$. Συνεπώς αν επιλέξουμε αρκετά μικρό διάστημα τ (αρκετά πυκνή δειγματοληψία) ώστε το φυσικό φαινόμενο να μην έχει φασματική ισχύ για συχνότητες με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από τη συχνότητα $\frac{1}{2\tau}$, τότε ο

υπολογισμός του φάσματος στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}\right]$ είναι απόλυτα ακριβής.

Η πρόταση αυτή έχει γενική ισχύ και ονομάζεται θεώρημα δειγματοληψίας των Shannon-Whittaker. Το θεώρημα Shannon-Whittaker αποδεικνύει ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ανακατασκευαστεί πλήρως ένα σήμα $x(t)$ από διακριτές μετρήσεις αυτού ανά διαστήματα τ είναι:

$$|\tilde{x}(f)| = 0 \text{ για } |f| \geq \frac{1}{2\tau}.$$

Το θεώρημα μάλιστα δίνει και τον αναλυτικό τύπο για τον υπολογισμό της $x(t)$ από τις διακριτές τιμές $\hat{x}(n\tau)$:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(n\tau) \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{2\tau}(t - n\tau)\right]}{\frac{2\pi}{2\tau}(t - n\tau)}.$$

Σε αδρές γραμμές η απόδειξη ότι το πραγματικό σήμα δίνεται από τον ανωτέρω τύπο είναι η ακόλουθη:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(f) e^{i2\pi f' t} df = \int_{-1/2\tau}^{+1/2\tau} \tilde{x}(f) e^{i2\pi f' t} df,$$

αφού συχνότητες πέραν του ορίου $\pm 1/2\tau$ απλώς δεν υπάρχουν στο φάσμα. Αντικαθιστώντας την $\tilde{x}(f)$ με την $\tilde{\tilde{x}}(f)$ που γράψαμε παραπάνω και όπως είπαμε είναι ταυτόσημα στην περιοχή των συχνοτήτων $\left[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}\right]$ και χρησιμοποιώντας την περιγραφή της δέλτα συνάρτησης που παρουσιάσαμε στο σχετικό πλαίσιο στην αρχή του κειμένου καταλήγει κανείς εύκολα στο αποτέλεσμα των Shannon-Whittaker.

Το θεώρημα Shannon-Whittaker είναι καταπληκτικό διότι παρέχει τις προϋποθέσεις ώστε μία συνάρτηση η οποία λαμβάνει μη αριθμήσιμο (συνεχές) πλήθος τιμών να μπορεί να ανακατασκευασθεί πλήρως από ένα αριθμήσιμο πλήθος παρατηρήσεων!

Πρακτικά λοιπόν συμπεραίνουμε ότι για να έχουμε πιστό καθορισμό του φάσματος θα πρέπει να επιλέξουμε ικανά μικρό τ , τέτοιο μάλιστα ώστε να μην υπάρχει σημαντική ισχύς του σήματος για συχνότητες μεγαλύτερες του $\frac{1}{2\tau}$. Η συχνότητα $\frac{1}{2\tau}$ λέγεται συχνότητα Nyquist. Όταν μάλιστα υπολογίζουμε την ισχύ του φάσματος ενός φαινομένου μόνο το διάστημα συχνοτήτων $\left[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}\right]$ αρκεί να υπολογίζεται, διότι το

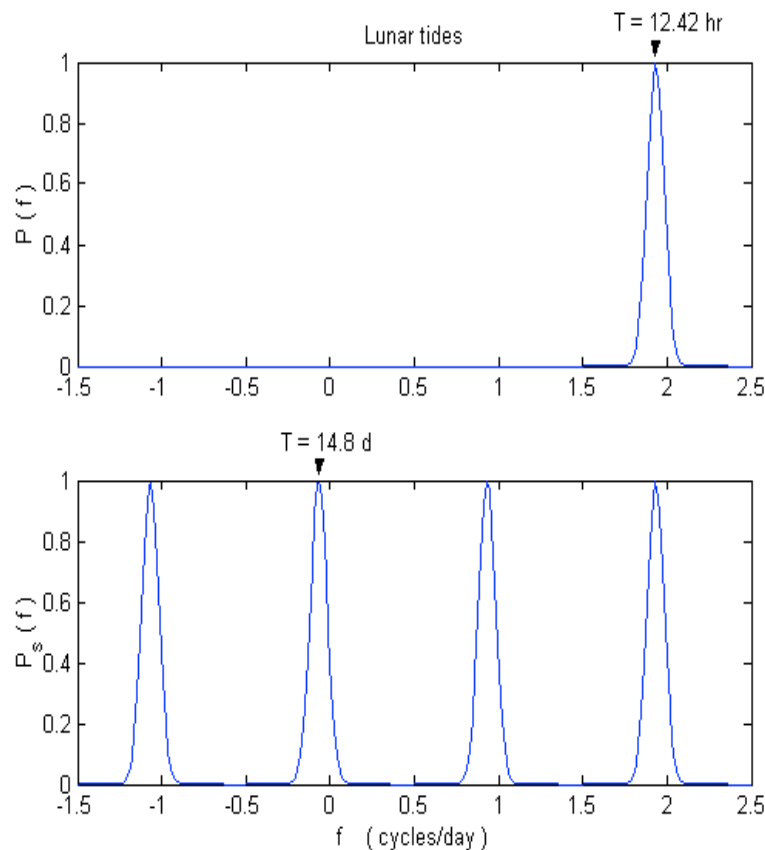
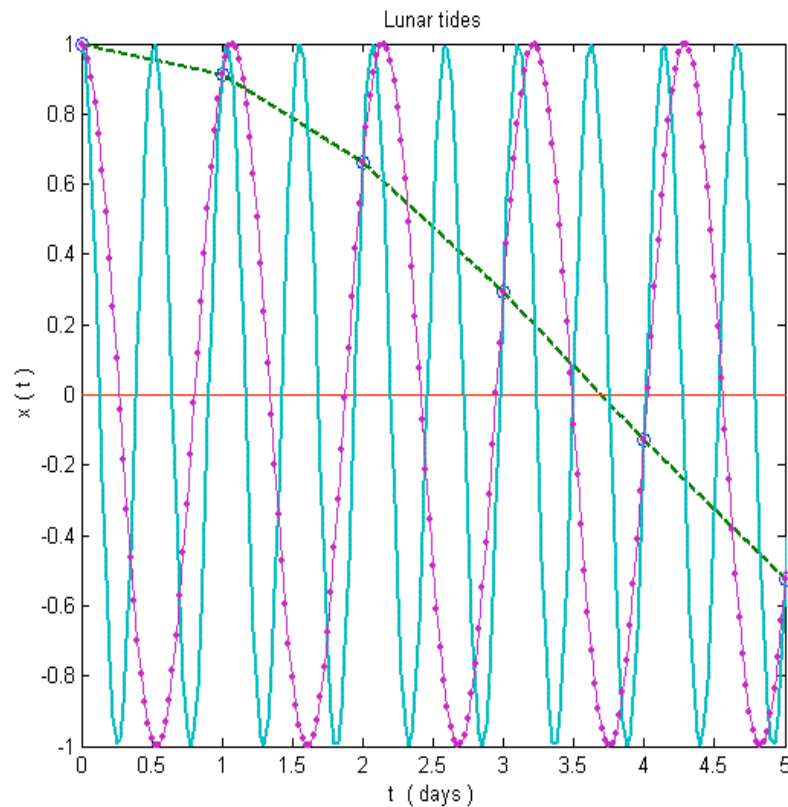
φάσμα όπως είδαμε είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{1}{\tau}$. Αλλά και αντιστρόφως, εάν θέλουμε να αναπαράγουμε ένα φαινόμενο συχνότητας f_0 θα πρέπει να κάνουμε παρατηρήσεις ανά χρονικά διαστήματα μικρότερα του $\frac{1}{2f_0}$ ώστε να πάρουμε τουλάχιστον δύο

δείγματα ανά κύκλο του φαινομένου (συνήθως για ασφάλεια λαμβάνονται κατ'ελάχιστον 4 δείγματα ανά κύκλο). Ομοίως εάν θέλουμε να μεταδώσουμε πιστά τη μουσική μιας συμφωνικής ορχήστρας μέσω μιας ψηφιακής συσκευής θα πρέπει οι μηχανισμοί να λαμβάνουν δείγματα του ήχου ανά διαστήματα μικρότερα του $\frac{1}{2f_0}$, όπου f_0 η

μεγαλύτερη συχνότητα την οποία ενδιαφερόμαστε να μεταφέρουμε (για ήχο συχνότητας 5 kHz, απαιτείται μηχανισμός με ταχύτητα δειγματοληψίας τουλάχιστον 0.1 ms).

Τα περισσότερα φυσικά περιοδικά φαινόμενα περιορίζονται σε μία πεπερασμένη περιοχή (μπάντα) συχνοτήτων. Οπότε η παραπάνω ανάλυση μπορεί να μας καθοδηγήσει στο προσδιορισμό της συχνότητας των παρατηρήσεων που απαιτείται για να τα αναπαράγουμε.

Οι επιπτώσεις αθέτησης του κριτηρίου του Nyquist μπορεί να είναι καταστρεπτικές. Ως παράδειγμα, αναφέρουμε τις απαιτήσεις για τη παρατήρηση της κύριας σεληνιακής παλίρροιας στη θάλασσα, η οποία συμβολίζεται με M_2 που έχει περίοδο 12.42 ώρες, δηλαδή $f_0 = 1.932 \text{ cycles/day}$. Για την ακριβή επισήμανση της σεληνιακής παλίρροιας απαιτούνται σύμφωνα με το κριτήριο Nyquist παρατηρήσεις ανά



διαστήματα μικρότερα των
 $\tau = \frac{24}{2 \times 1.932} = 6.2$ ωρών,

δηλαδή δύο παρατηρήσεις ανά παλιρροιακό κύκλο, ώστε

$\frac{1}{2\tau} > f_0$. Ας υποθέσουμε ότι

ένας ανύποπτος ερευνητής παρατηρεί το ύψος της θάλασσας ακριβώς κάθε 24 ώρες στις 10π.μ. (βλ. το διπλανό σχήμα – κύκλους). Το παραγματικό ύψος της θάλασσας δίνεται από τη συνεχή γραμμή. Αλλά καθώς φαίνεται, επειδή η συχνότητα παρατηρήσεων ανά μία ημέρα είναι μεγαλύτερη από τη κρίσιμο διάστημα

παρατηρήσεων Nyquist $\frac{1}{2f_0}$,

οι ίδιες παρατηρήσεις είναι συνεπείς και με περιοδικά φαινόμενα μικρότερης συχνότητας (σύμφωνα με τον τύπο (1)), $f_0 - 1 = 0.932$ cycles/day και $f_0 - 2 = -0.0676$ cycles/day. Η τελευταία (στο σχήμα η διακεκομμένη γραμμή), η οποία είναι η μόνη που βρίσκεται στο διάστημα συχνοτήτων Nyquist $[-0.5, 0.5]$ για παρατηρήσεις ανά μία μέρα, προβλέπει ότι σύμφωνα με τις παρατηρήσεις ότι η περίοδος των παλιρροιών είναι 14.8 μέρες! Τα δύο φάσματα, το πραγματικό και το ετερισμένο που προκύπτει από τις ημερίσιες παρατηρήσεις, παρουσιάζονται στο δεύτερο σχήμα που ακολουθεί. Εάν μεν ο ερευνητής καταλαβαίνει τι συμβαίνει δεν υπάρχει πρόβλημα. Αντιλαμβάνεται ότι υπάρχει ετερισμός, και ότι η

παραγματική περίοδος των παλιρροιών είναι μία απο τις συχνότητες που δίνει ο τύπος (1) (όπως ακριβώς παρατηρητής ενός περιστρεφόμενου τροχού ποδηλάτου με στροβοσκόπιο δεν ξεγελιέται όταν δει τις ακτίνες του ποδηλάτου ακίνητες ή ακόμη και κινούμενες με ανάποδη φορά). Εάν όμως ο ερευνητής δεν γνώριζε το φαινόμενο των παλιρροιών και πρότεινε στην επιστημονική κοινότητα ότι ανακάλυψε θαλάσσιο φαινόμενο περιόδου 14.8 ημερών θα ήταν σε κίνδυνο να παρουσιάσει μαζί με τις παρατηρήσεις του και κάποια περίεργη θεωρία για να υποστηρίξει τις παρατηρήσεις αυτές. Το παράδειγμα μπορεί να σας φαίνεται απλοϊκό, αλλά πρέπει να γνωρίζετε ότι πολλές φορές ψευδοφαινόμενα τέτοιας μορφής έρχονται στη δημοσιότητα. Σε αυτό το κίνδυνο προφανώς είναι πλέον ευάλωτοι και καλοπροαίρετοι άνθρωποι του τύπου ή και μέλη κυβερνήσεων.

Φάσμα ισχύος περιοδικών φαινομένων

Γενικά ένα φαινόμενο στο οποίο επικρατεί κάποια συγκεκριμένη συχνότητα, αυτή εμφανίζεται υπο τη μορφή κάποιας ξεχωριστής κορυφής στο φάσμα ισχύος του. Όσο πιο αρμονικό είναι το φαινόμενο, δηλαδή αυτό εξελίσσεται χρονικά σαν ένα καθαρό ημίτονο (ή συνημίτονο), τόσο πιο στενή είναι η κορυφή στο φάσμα ισχύος. Οποιαδήποτε αναρμονικότητα του φαινομένου κάνει αισθητή την παρουσία της με πλάτυνση της αντίστοιχης κορυφής αλλά και εμφάνιση άλλων κορυφών (αρμονικές) σε ανώτερες συχνότητες πολλαπλάσιες της πρώτης (η οποία ονομάζεται και θεμελιώδης). Ένας δεύτερος λόγος πλάτυνσης μιας κορυφής είναι το πεπερασμένο χρονικό εύρος μιας μέτρησης [Δείξτε για παράδειγμα ότι ένα σήμα της μορφής $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ για $0 \leq t \leq \nu / f_0$, όπου ν φυσικός αριθμός και $x(t) = 0$ για τους υπόλοιπους χρόνους οδηγεί σε φάσμα ισχύος με εύρος συχνοτήτων ανάλογο του $1/\nu$.] Παράδειγμα περιοδικού μη αρμονικού φαινομένου, όπου εμφανίζονται και έχουν ιδιαίτερη παρακτική σημασία για την ανίχνευση του φαινομένου οι αρμονικές της θεμελιώδους, είναι τα βαρυτικά κύματα που εκπέμπονται από ένα σύστημα ζεύγους αστερών (binary) όταν αυτά κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους. Αν η τροχιά τους ήταν κυκλική μόνο η διπλάσια της συχνότητας περιστροφής θα ήταν παρούσα στο φάσμα (αυτό οφείλεται στην τετραπολική φύση της γένεσης των βαρυτικών κυμάτων). Η ελλειπτικότητα των τροχιών όμως οδηγεί σε κύμανση της στιγμιαίας συχνότητας περιστροφής γύρω από τη μέση συχνότητα $1/T$ (όπου T η περίοδος των τροχιών) με άμεσο επακόλουθο την εμφάνιση αρμονικών στο εν λόγω φάσμα και μάλιστα τόσο περισσότερων και με πιο έντονο πλάτος όσο πιο ελλειπτικές είναι οι τροχιές.

Το απλούστερο χαρακτηριστικότερο και συνάμα εντυπωσιακότερο όμως αναρμονικό περιοδικό φαινόμενο είναι το επίπεδο εκκρεμές. Οι περιττές αρμονικές της θεμελιώδους συχνότητας είναι παρούσες, αλλά τόσο αμυδρές ακόμη και για μεγάλα πλάτη απομάκρυνσης (π.χ. για αρχική γωνία $\pi/2$ με μεγάλη δυσκολία διακρίνεται η αρμονική της $3f_0$ σε απλό διάγραμμα του αντίστοιχου φάσματος ισχύος, ενώ στο αντίστοιχο λογαριθμικό διάγραμμα μετά βίας ξεχωρίζει η επόμενη αρμονική $5f_0$) που κάνουν έκδηλο τον μικρό βαθμό αναρμονικότητας του συστήματος (αυτός είναι άλλωστε και ο λόγος που το εκκρεμές χρησιμοποιήθηκε για μεγάλο διάστημα ως πολύ καλό ρολόι). Από την άλλη το απλούστατο αυτό σύστημα γίνεται πολύ πλούσιο όταν αρχίσει

να διεγείρεται από μια περιοδική δύναμη. Μεγαλώνοντας το πλάτος της διέγερσης το σύστημα μπορεί να οδηγηθεί σε χαοτική κίνηση.

Ανάδειξη σήματος μέσα από θόρυβο

Πολλές φορές κάποιο σήμα που θέλουμε να καταγράψουμε περιβάλλεται από θόρυβο (είτε εγγενή της ανιχνευτικής διάταξης που έχουμε κατασκευάσει προκειμένου να καταγράψουμε το σήμα, είτε εξαιτίας του περιβάλλοντος το οποίο βρίθκει από παρόμοια σήματα με αυτά που θα θέλαμε να μετρήσουμε αλλά δεν προέρχονται από την πηγή η οποία μας ενδιαφέρει). Υπάρχει τρόπος να καθαρίσουμε το ενδιαφέρον σήμα από το θόρυβο; Η σχετική θεωρητική έρευνα ξεκίνησε παράλληλα με την ανάπτυξη των ραντάρ, όταν ο ασθενικός παλμός που ανακλώνταν και επέστρεφε στην πηγή έπρεπε να αναγνωριστεί μέσα στον ηλεκτρομαγνητικό θόρυβο του περιβάλλοντος, ή τον ηλεκτρονικό θόρυβο της συσκευής.

Ας σκεφθούμε τι χαρακτηριστικά έχει αυτό που ονομάζουμε θόρυβο. Κατ' αρχήν θα έλεγε κανείς ότι ο θόρυβος δεν είναι τίποτε άλλο παρά διακυμάνσεις με μέση τιμή μηδέν που εμφανίζονται στην έξοδο της ανιχνευτικής διάταξης όταν δεν υπάρχει σήμα. Αν όμως καταγράψουμε ένα ημιτονικό σήμα σε χρονικές διαστήματα μεγάλα σε σχέση με την περίοδο του σήματος, οι μετρήσεις μας θα μοιάζουν εντελώς τυχαίες, με μέση τιμή μηδέν, ενώ στην πραγματικότητα θα αφορούν τις τιμές μιας καλά καθορισμένης συνάρτησης του χρόνου. Μια βασική ιδιότητα του θορύβου είναι ότι η μέση τιμή του γινομένου μιας οποιασδήποτε περιοδικής συνάρτησης με το θόρυβο είναι μηδενική. Έτσι, ο αποκαλούμενος *συσχετισμός* (correlation) του θορύβου με το ίδιο το σήμα θα είναι μηδενικός.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(t)s(t+\tau)dt = 0 \text{ ,}$$

όπου $n(t)$ η χρονική εξέλιξη του θορύβου και $s(t)$ η χρονική εξέλιξη του σήματος. Ο λόγος που καταφύγαμε στη χρήση του συσχετισμού των δύο αυτών συναρτήσεων είναι ότι ο μετασχηματισμός Fourier του συσχετισμού δύο συναρτήσεων παίρνει μια πολύ απλή μορφή.

$$\text{Αν } K(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau)H(\tau+t)d\tau \text{ , τότε } \tilde{K}(f) = \tilde{G}^*(f)\tilde{H}(f) \text{ .}$$

[Η πρόταση αυτή είναι εύκολο να αποδειχθεί αν εισάγετε στο ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Fourier της $K(t)$ τη μονάδα υπό τη μορφή $e^{i2\pi f\tau}e^{-i2\pi f\tau}$.] Έτσι αν συσχετίσετε την έξοδο ενός ανιχνευτή $o(t) = s(t) + n(t)$ με το ίδιο το σήμα $s(t)$ που περιμένετε να ανιχνεύσετε, ο θόρυβος δεν θα συμβάλει καθόλου στη συσχέτιση και ο μετασχηματισμός Fourier της συσχέτισης θα σας δώσει το φάσμα ισχύος του σήματος. Αυτό ακριβώς είναι το ζητούμενο. Μάλιστα ακόμη και αν το σήμα που υποθέτατε ότι υπάρχει στην έξοδο του ανιχνευτή δεν είναι ακριβώς το σωστό, η ζημιά είναι σχετικά μικρή αρκεί το φάσμα και των δύο (του πραγματικού σήματος και του υποτιθέμενου) να είναι επικεντρωμένα γύρω από την ίδια περίπου συχνότητα.

Η επεξεργασία σήματος με θόρυβο έχει σήμερα πάρα πολλές εφαρμογές και στην τεχνολογία και στα πολυσύνθετα πειράματα που στήνονται με σκοπό την ανίχνευση κάποιου φαινομένου που προβλέπει η θεωρία. Κορυφαίο ίσως όλων παράδειγμα

αποτελεί σήμερα η διεθνής προσπάθεια ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων από κοσμικές πηγές του Σύμπαντος. Πρόκειται για ένα είδος ακτινοβολίας που αν και έχει προβλεφθεί εδώ και έναν περίπου αιώνα, η ένταση των κυμάτων είναι τόσο ασθενική όταν αυτά καταφθάνουν στη Γη ώστε είναι σχεδόν αδύνατο να παρατηρηθούν. Μόνο με τη σύγχρονη τεχνολογία και την καλά θεμελιωμένη σήμερα θεωρία επεξεργασίας σήματος μπορεί να καταστεί δυνατή η ανίχνευση των κυμάτων αυτών. Ακόμη κι έτσι όμως η μορφή των βαρυτικών κυμάτων πρέπει να είναι λίγο πολύ γνωστή για να πιστοποιηθεί οποιαδήποτε ενδεχόμενη ανίχνευση. Η ανάπτυξη και η επιτυχία του μεγαλεπήβολου αυτού πειράματος έχει την ανάγκη θεωρητικής κατασκευής υποτιθέμενων σημάτων σύμφωνων με τις θεωρητικές προβλέψεις.