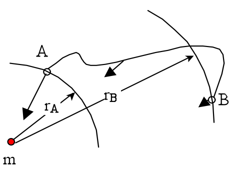
Δυναμική Ενέργεια-Δυναμικό

Στη διάλεξη περί συντηρητικών πεδίων μάθαμε ότι στην περίπτωση αστρόβιλων πεδίων, δηλαδή όταν $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ παντού, υπάρχει μια βαθμωτή ποσότητα *U* από την οποία μπορεί να προκύψει η δύναμη (ως $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$) και η οποία μαζί με την επονομαζόμενη κινητική ενέργεια διατηρείται κατά την κίνηση ενός σωματιδίου μέσα στο πεδίο. Η ποσότητα *U*, η αποκαλούμενη δυναμική ενέργεια του σωματιδίου, δεν είναι τίποτε άλλο από ένας μετρητής του έργου της δύναμης του πεδίου στο σωματίδιο αφού

$$U_A - U_B = W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}\ ,$$

και μάλιστα εξαιτίας της συντηρητικότητας του πεδίου ανεξάρτητο της διαδρομής που θα επιλέξουμε για να μετακινήσουμε το σωματίδιό μας από το σημείο Α του πεδίου στο σημείο Β.

Πολύ συχνά αντί της έννοιας της δυναμικής ενέργειας χρησιμοποιείται η έννοια του δυναμικού. Πρόκειται για τη δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί στη μοναδιαία ποσότητα σωματιδίου που βρίσκεται εντός του πεδίου. Η έννοια του δυναμικού είναι ιδιότητα αποκλειστικά του πεδίου, ενώ η δυναμική ενέργεια εξαρτάται και από το σωματίδιο που βρίσκεται εντός του πεδίου. Ειδικά στην περίπτωση του βαρυτικού πεδίου, που όπως έχουμε δει είναι συντηρητικό, οι έννοιες της δυναμικής ενέργειας και του δυναμικού είναι σχεδόν ταυτόσημες· το δυναμικό είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας ή με άλλα λόγια είναι η δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου με μάζα ίση με ένα.



Ας υπολογίσουμε στη συνέχεια το βαρυτικό δυναμικό μέσα στο πεδίο μιας σημειακής μάζας *m* (πρόκειται για ένα αποτέλεσμα που χρησιμοποιήσαμε πρωθύστερα στον υπολογισμό της βαρυτικής δύναμης από έναν σφαιρικό φλοιό). Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο θέσεων Α και Β είναι

$$\Phi_A - \Phi_B = -Gm\int_A^B \frac{\hat{e}_r}{r^2}\cdot d\vec{r} = -Gm\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{Gm}{r_B} - \frac{Gm}{r_A}.$$

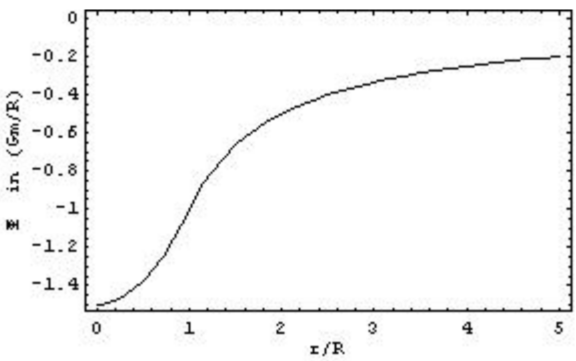
Προφανώς η διαφορά δυναμικού εξαρτάται μόνο από τις αποστάσεις των δύο σημείων από την πηγή του πεδίου και όχι απο τις ακριβείς θέσεις αυτών. Αυτό είναι αυτονόητο εξαιτίας της σφαιρικής συμμετρίας του πεδίου. Αν τώρα θέσουμε μια συγκεκριμένη τιμή στο δυναμικό για μια συγκεκριμένη θέση, αυτόματα καθορίζεται το δυναμικό παντού. Μη ξεχνάτε εξάλλου ότι η τιμή του δυναμικού είναι αυθαίρετη· αυτό που έχει φυσικό νόημα είναι μόνο η διαφορά δυναμικού μεταξύ σημείων. Μια καλή επιλογή για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι να θέσουμε το δυναμικό σε άπειρη απόσταση από τη μάζα –όπου πλέον βρισκόμαστε εκτός κάθε επιρροής του πεδίου- ίσο με μηδέν. Έτσι το δυναμικό σε απόσταση *r* από μια σημειακή μάζα είναι

$$\Phi = -\frac{Gm}{r}.$$

Ως εφαρμογή των παραπάνω θα υπολογίσουμε το δυναμικό εξαιτίας μιας συμπαγούς ομογενούς σφαίρας. Στο μεν εξωτερικό της σφαίρας το δυναμικό είναι το ίδιο με αυτό μιας σημειακής μάζας ίσης με αυτή της σφαίρας τοποθετημένη στο κέντρο της σφαίρας, αφού το πεδίο είναι ταυτόσημο στην περιοχή αυτή του χώρου. Στο εσωτερικό της σφαίρας θα είναι:

$$\Phi(r)-\Phi(R)=\int_r^R -\frac{Gm(r')}{r'^2}dr=\int_r^R -\frac{G}{r'^2}\frac{mr'^3}{R^3}dr=-\frac{Gm}{R^3}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{r^2}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Phi(r)=-\frac{Gm}{R}\left(\frac{3}{2}-\frac{r^2}{2R^2}\right) \quad (1)$$



Στο διπλανό διάγραμμα έχει σχεδιασθεί η μορφή του παραπάνω δυναμικού. Η παραβολική μορφή του δυναμικού στο εσωτερικό της σφαίρας είναι τύπου αρμονικού ταλαντωτή. Το γεγονός αυτό είναι που οδηγεί στο γνωστό φαινόμενο της αρμονικής ταλάντωσης σε μια υποτιθέμενη σήραγγα κατά μήκος της διαμέτρου ενός ομογενούς πλανήτη. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί εναλλακτικά μελετώντας τη βαρυτική δύναμη στο εσωτερικό μιας ομογενούς συμπαγούς σφαίρας.

Έχοντας μάθει να υπολογίζουμε το δυναμικό σε διάφορα σημεία ενός πεδίου, θα υπολογίσουμε στη συνέχεια την ενέργεια που απαιτείται προκειμένου να συνθέσουμε μια συγκεκριμένη κατανομή μάζας που δημιουργεί κάποιο πεδίο. Για δύο σημειακές μάζες η δυναμική ενέργεια είναι $-Gm_1m_2/r_{12}$, αφού τόσο είναι το έργο της βαρυτικής δύναμης προκειμένου δύο μάζες σε απόσταση r_{12} να απομακρυνθούν σε άπειρη απόσταση, είτε κρατάμε τη μία ακίνητη και κινούμε τη δεύτερη στο πεδίο της πρώτης, είτε απομακρύνουμε ταυτόχρονα τη μία από την άλλη. Το αρνητικό πρόσημο σχετίζεται με την ελκτικότητα της δύναμης και υποδηλώνει το γεγονός ότι οι μάζες έχουν την τάση να κρατούν δέσμιες η μία την άλλη, ή με άλλα λόγια ότι πρέπει να δαπανήσουμε ενέργεια για να τις διαχωρίσουμε. Στην περίπτωση τριών μαζών η συνολική δυναμική ενέργεια είναι

$$U^{(3)}=-\frac{Gm_1m_2}{r_{12}}-\frac{Gm_2m_3}{r_{23}}-\frac{Gm_3m_1}{r_{31}}.$$

Ο πρώτος μαζί με τον δεύτερο όρο αποτελούν τη δυναμική ενέργεια της δεύτερης μάζας στο σύνθετο πεδίο των άλλων δύο μαζών και ο τρίτος όρος τη δυναμική ενέργεια της τρίτης μάζας στο πεδίο της πρώτης. Τόση λοιπόν ενέργεια παράγει το πεδίο προκειμένου οι τρεις μάζες να απομακρυνθούν η μια από την άλλη σε άπειρη απόσταση. Αντίστοιχα για *n* μάζες η δυναμική ενέργεια του συσσωματώματος είναι

$$U^{(n)}=\sum_i\sum_{j>i}-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}.$$

Η συνθήκη $j>i$ στην πρώτη σχέση εξασφαλίζει ότι το κάθε ζευγάρι μαζών λογίζεται άπαξ, ενώ στη δεύτερη σχέση απλώς λογαριάζονται όλα τα δυνατά ζευγάρια και το αποτέλεσμα διαιρείται δια δύο. Η συνθήκη $j\neq i$ αποκλείει τους απειρισμούς στους οποίους θα οδηγούσε ένα πιθανός υπολογισμός της ιδιοενέργειας που περικλείει η κάθε σημειακή μάζα. Η εξαίρεση αυτών των άπειρων ποσοτήτων είναι ένα είδος *επανακανονικοποίησης* (renormalization) της θεωρίας μας. Περνώντας τώρα σε μια συνεχή κατανομή μάζας με τοπική πυκνότητα $\rho(\vec{r})$ η προηγούμενη σχέση μετασχηματίζεται σε

$$U = -\frac{1}{2}\iint \frac{G dm_1\, dm_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\frac{1}{2}\iint \frac{G\rho(\vec{r}_1)\,\rho(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dV_1\, dV_2,$$

όπου τα ολοκληρώματα εκτείνονται σε ολόκληρη την περιοχή εξάπλωσης της μάζας. Αν προσέξουμε ότι το μέρος $-\int \frac{G dm_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ δεν είναι τίποτε άλλο από το δυναμικό στη θέση $\vec{r}_2$, οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να επαναγραφούν με τη μορφή

$$U = \frac{1}{2}\int \Phi(\vec{r})dm(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int \Phi(\vec{r})\rho(\vec{r})dV .$$

Ως εφαρμογή θα δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια συγκρότησης μιας ομογενούς σφαίρας ακτίνας *R* και μάζας *M*. Βάσει του πρώτου τρόπου υπολογισμού της δυναμικής ενέργειας

$$U = -\frac{GM^2}{2V^2}\iint \frac{dV_1 dV_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|},$$

αλλά αυτό δεν είναι τίποτε άλλο από το $-GM^2/2$ φορές τη μέση τιμή της αντίστροφης απόστασης μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων μιας σφαίρας ακτίνας *R*, δηλαδή $-\frac{GM^2}{2}\left\langle \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right\rangle$. Ο προσδιορισμός αυτής της μέσης τιμής είναι σχετικά δύσκολος αναλυτικά, αλλά μπορεί να γίνει αριθμητικά λαμβάνοντας έναν μεγάλο αριθμό τυχαίων ζευγαριών σημείων εντός της σφαίρας. Ο υπολογισμός είναι αρκετά απλούστερος αν καταφύγουμε στη δεύτερη γραφή της δυναμικής ενέργειας:

$$U = \frac{M}{2V}\int \Phi(r)dV .$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της σχέσης (1) είναι εύκολο να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα. Αντ` αυτού θα κάνουμε έναν άλλο υπολογισμό χρησιμοποιώντας την ίδια τη φυσική σημασία της δυναμικής ενέργειας. Συγκεκριμένα, ξεκινώντας από τη συμπαγή σφαίρα θα μετρήσουμε πόση ενέργεια θα απαιτηθεί για να την διαλύσουμε παντελώς. Το αντίθετο της ενέργειας που θα βρούμε είναι η δυναμική ενέργεια που περικλείεται στη σφαίρα. Κάθε φλοιός που θα αποσπούμε από την εναπομείνασα σφαίρα ακτίνας *r* προκειμένου να τον «φουσκώσουμε» μέχρις ότου φτάσει στο άπειρο θα χρειάζεται ενέργεια $\frac{Gm(r)dm}{r}$.

Η συνολική ενέργεια λοιπόν διάλυσης της σφαίρας θα είναι

$$-U = \int \frac{Gm(r)}{r}dm = \int_0^R \frac{GMr^3}{R^3 r}\frac{M}{V}4\pi r^2 dr = \frac{3GM^2}{5R} .$$

Με αυτό τον τρόπο βρήκαμε παράλληλα και τη λύση στο δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα που αντιμετωπίσαμε προηγουμένως:

$$\left\langle \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right\rangle = \frac{6}{5R} .$$