Η περίοδος ταλάντωσης ενός εκκρεμούς συναρτήσει του πλάτους ταλάντωσης

Η κίνηση ενός εκκρεμούς στο ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης g προσδιορίζεται από την εξίσωση

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

όπου $\omega^2 = g/l$, l το μήκος της αβαρούς ράβδου, και θ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με τη κατακόρυφο (η κίνηση τώρα διαδραματίζεται στον κύκλο $-\pi < \theta \leq \pi$). Έχουμε υποθέσει ότι η κίνηση του εκκρεμούς περιορίζεται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Έτσι όπως έχουν ληφθεί οι γωνίες η θέση $\theta = 0$ (με $\dot{\theta} = 0$) είναι το σημείο ευσταθούς ισορροπίας (αντιστοιχεί στη χαμηλότερη θέση), ενώ η θέση $\theta = \pi$ που αντιστοιχεί στην υψηλότερη θέση του σωματιδίου είναι το ασταθές σημείο ισορροπίας. Αποδείξτε τη παραπάνω πρόταση. Είναι η παραπάνω εξίσωση γραμμική;

Αυτό το φυσικό σύστημα έχει τεράστια σημασία, διότι η μελέτη του οδηγεί στη κατασκευή ρολογιών, και αποτέλεσε το εφαλτήριο ανάπτυξης και μελέτης πολλών φαινομένων. Μπορεί σήμερα να έχουμε βρεί καλύτερους τρόπους να μετράμε το χρόνο, αλλά το σύστημα αυτό παραμένει χρήσιμο και πρώτιστο παράδειγμα.

Θεωρήστε ότι το εκκρεμές αρχικά βρισκόταν στη θέση θ_0 με μηδενική αρχική γωνιακή ταχύτητα. Πριν προχωρήσουμε σε αναλυτική περιγραφή της κίνησης ολοκληρώστε αριθμητικά την εξίσωση του εκκρεμούς και προσδιορίστε τη κίνηση $\theta(t)$ που προκύπτει για $\omega = 1$. Θα δείτε ότι προκύπτει περιοδική κίνηση και προσδιορίστε την εξάρτηση της περιόδου από τη γωνία θ_0 για $0 < \theta_0 < 3\pi/2$. Προς τούτο θεωρήστε αρκετές γωνίες στο διάστημα αυτό, ώστε να μπορέσετε να κατασκευάσετε μία ακριβή γραφική παράσταση της περιόδου T συναρτήσει του πλάτους ταλάντωσης θ_0 (προσέξτε το βήμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης). Θα έχετε κάνει σωστά τον υπολογισμό αν για μικρά πλάτη η περίοδος είναι περίπου $2\pi/\omega$. Πόσο τρέχει πίσω ένα ρολόϊ του τοίχου που εκτελεί ταλάντωση με πλάτος $\theta_0 = \pi/2$ από ένα ρολόϊ που εκτελεί μικρές αρμονικές ταλαντώσεις με περίοδο $2\pi/\omega$;

Κάντε και τον εξής αριθμητικό υπολογισμό. Λάβετε $\omega = 1$ και προσδίοριστε τη κίνηση $\theta(t)$ που προκύπτει αν αρχικά το εκκρεμές ήταν στη θέση $\theta(0) = 0$ με ταχύτητα $\dot{\theta}(0) = 2$. Τι συμβαίνει τώρα;

Τώρα θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την εξάρτηση της περιόδου από το πλάτος της ταλάντωσης. Επίσης θα διερευνήσουμε διεξοδικά το χαρακτήρα της κίνησης.

Αποδείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα του εκκρεμούς στη γωνία θ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0) \; , \tag{1}$$

και αποδείξτε ότι για όλους τους χρόνους θα έχουμε περιοδική κίνηση πλάτους θ_0, δηλαδή θα είναι $\theta(t) \leq \theta_0$ για κάθε t και αποδείξτε ότι υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός T (η περίοδος) ο οποίος ικανοποιεί για κάθε t τη σχέση

$$\theta(t+T) = \theta(t) \; .$$

Σχεδιάστε για διαφορετικές τιμές του θ_0 τις τροχιές του συστήματος στο χώρο των "φάσεων" $(\theta, \dot{\theta})$.

Αποδείξτε επίσης ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T(\theta_0) = \frac{2\sqrt{2}}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} .$$

Θέλουμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό (που είναι ένα ελλειπτικό ολοκλήρωμα) συναρτήσει της θ_0. Για μικρές γωνίες μπορούμε να προσφύγουμε στην εξίσωση κίνησης και να κάνουμε την προσέγγιση $\sin\theta \approx \theta$, οπότε χωρίς άλλο προκύπτει προσεγγιστικά η κίνηση του αρμονικού ταλαντωτή

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

ο οποίος εκτελεί ισόχρονη ταλάντωση (δηλαδή η περίοδος ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη από το πλάτος ταλάντωσης) περιόδου $T = 2\pi/\omega$, δηλαδή αναμένουμε για μικρά πλάτη η περίοδος να έχει το όριο:

$$\lim_{\theta_0 \to 0} T(\theta_0) = \frac{2\pi}{\omega}$$

Πως όμως μπορούμε να βρούμε τις διορθώσεις στη περίοδο για μεγαλύτερες τιμές του θ_0 ; Για να το επιτύχουμε αυτό κάνουμε μερικούς μετασχηματισμούς στην σχέση (1). Δείξτε πρώτα από όλα ότι η (1) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή:

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega^2(\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)) . \tag{2}$$

῎Επειτα ορίστε τη γωνία ϕ έτσι ώστε

$$\sin(\theta/2) = \sin(\theta_0/2)\sin\phi$$

οπότε η (2) λαμβάνει τη μορφή

$$\dot{\phi}^2 = \omega^2(1 - \sin^2(\theta_0/2)\sin^2\phi)$$

και η περίοδος της κίνησης είναι

$$T(\theta_0) = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2\phi}}$$

όπου $\epsilon = \sin(\theta_0/2)$. Γράφοντας το ολοκλήρωμα της περιόδου με αυτόν τον τρόπο είναι πλέον εύκολο να προσδιορίσουμε την εξάρτηση της περιόδου από τη παράμετρο ϵ, και συνεπώς την εξάρτηση του ολοκληρώματος από το πλάτος της ταλάντωσης. Προς τούτο αναπτύσσουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα ως

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2\phi}} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon^2\sin^2\phi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\epsilon^4\sin^4\phi + \cdots$$

Το ανάπτυγμα αυτό είναι μία συγκλίνουσα σειρά, και ολοκληρώνοντάς την υπολογίστε το ανάπτυγμα της περιόδου

$$T(\theta_0) = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\epsilon^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\epsilon^4 + \cdots\right) .$$

Αυτή η έκφραση δίνει την εξάρτηση της περιόδου από το πλάτος. Παρατηρείτε ότι η περίοδος αυξάνει μονότονα με το πλάτος. Συγκρίνατε την προσέγγιση στην οποία κρατάτε μόνο τους πρώτους δύο όρους στο ανάπτυγμα αυτό με τις περιόδους που υπολογίσατε με την αριθμητική ολοκλήρωση. Μέχρι πιο πλάτος το σχετικό λάθος στην εκτίμηση είναι μικρότερο του 1 τοις εκατό ;