**Εκκρεμές εξαναγκασμένο με αρμονική εξωτερική δύναμη**

Η εξίσωση κίνηση του εκκρεμούς είναι

$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \sin\theta = A\cos\omega_f t\,,$$

όπου $\theta$ η γωνιακή θέση από το σταθερό σημείο ισορροπίας. Έχουμε συμπεριλάβει και τριβή ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας. Οι μονάδες χρόνου επιλέγησαν έτσι ώστε μικρές ταλαντώσεις, χωρίς απόσβεση, να έχουν περίοδο $2\pi$ . Θα μελετήσουμε τη κίνηση του εκκρεμούς συναρτήσει του πλάτους της εξωτερικής δύναμης $A$ . Η συχνότητα του εξαναγκασμού θα παραμείνει σταθερή και θα τη λάβουμε $\omega_F = 0.667$ . Ομοίως ο συντελεστής απόσβεσης θα ληφθεί $\mu = 0.5$ , έτσι ώστε σε σχετικό λίγο χρονικό διάστημα το εκκρεμές να περάσει από τη μεταβατική κατάσταση που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες στη κατάσταση που το χαρακτηρίζει ασυμπτωτικά.

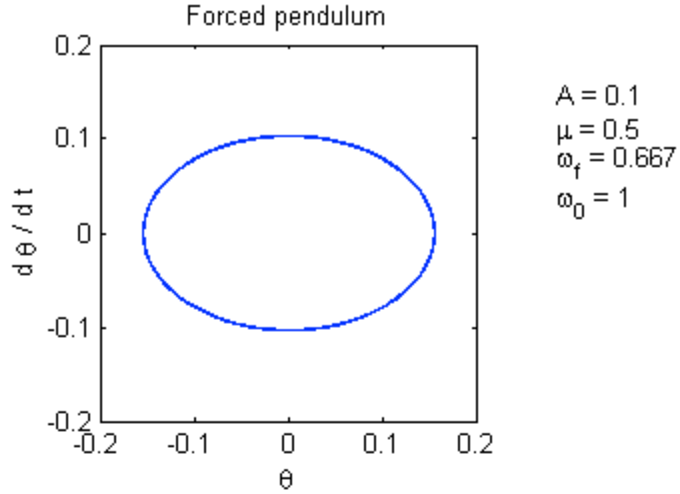
Εάν το $A << 1$ , τότε η συμπεριφορά του εκκρεμούς είναι σε πολύ καλή προσέγγιση αυτή αρμονικού ταλαντωτή, οπότε η χρονική εξέλιξη είναι:

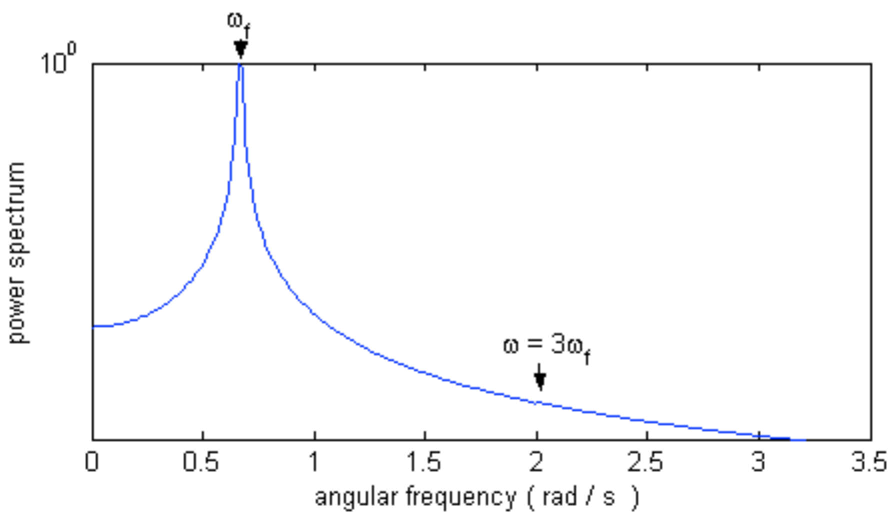
$$\theta = \frac{A}{\sqrt{(1-\omega_F^2)^2 + \mu^2\omega_F^2}}\cos(\omega_F t + \phi) + a\exp\left(-\frac{\mu t}{2}\right)\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

$$\text{με } \tan\varphi = -\frac{\mu\omega_F}{1-\omega_F^2} \text{ και } \omega = \sqrt{1-\frac{\mu^2}{4}}\,.$$

Στην αρχή η συμπεριφορά είναι πολύπλοκη, η φυσική συχνότητα του ταλαντωτή ($\omega_0 = 1$) σχηματίζει διακρότημα με τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης (0.667). Τελικά όμως οι τροχιές στο χώρο των φάσεων $(\theta,\dot{\theta})$ καταλήγουν στο να περιστρέφονται με τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης γύρω από ένα οριακό κύκλο, στον οποίο καταλήγουν όλες οι τροχιές. Η φασματική ισχύς εμφανίζει δύο μέγιστα, τό ένα στη συχνότητα $\omega_F$ και το άλλο στη συχνότητα $\omega$ .

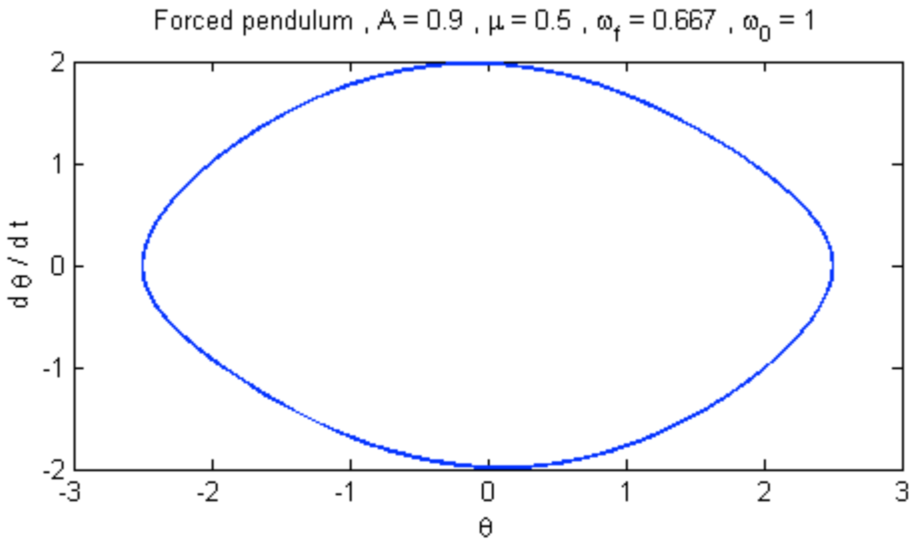
Για μεγαλύτερα πλάτη δεν υπάρχουν αναλυτικές λύσεις. Η συμπεριφορά γίνεται ολοένα και πιο περίπλοκη και θα τη μελετήσουμε παρακολουθώντας την εξέλιξη της φασματικής ισχύος της γωνιακής θέσης του εκκρεμούς.

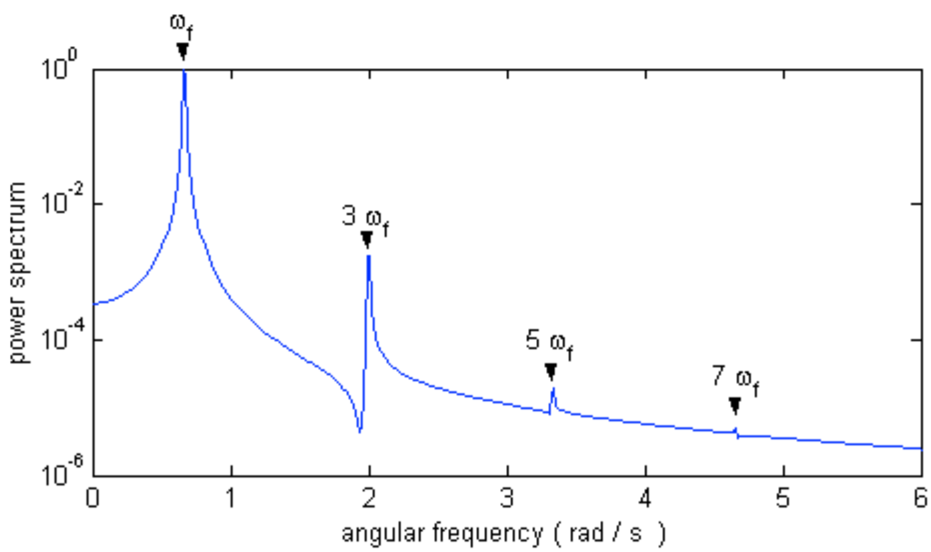


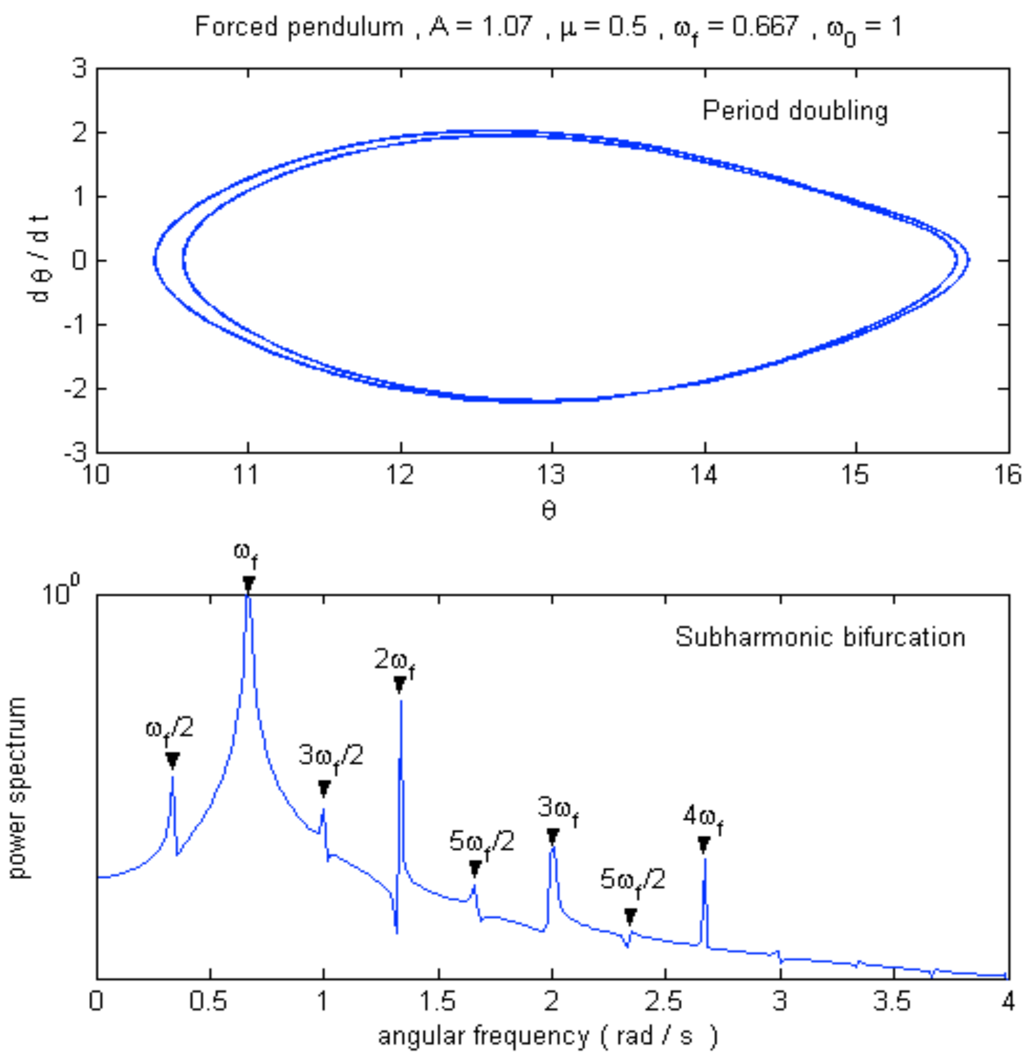

Για μικρή διέγερση, η κίνηση καταλήγει σε ένα σταθερό οριακό κύκλο, και η κίνηση είναι περιοδική. Η καταληκτική κίνηση φαίνεται στο σχήμα. Παρατηρείστε ότι ο οριακός κύκλος είναι σχεδόν κυκλικός και συνεπώς η φασματική ισχύς είναι αποκλειστικά συγκεντρωμένη στη κύρια συχνότητα $\omega_F$ μέ λίγο ισχύ στη συχνότητα $3\omega_F$ (σχεδόν δεν φαίνεται είναι 6 τάξεις μεγέθους μικρότερη). Οπότε η κίνηση είναι σε μεγάλη προσέγγιση αρμονική. Η συχνότητα $\omega$ δεν εμφανίζεται διότι παρουσιάζουμε τη φασματική ισχύ της γωνιακής θέσης έχοντας εξαλήψει τη μεταβατική εξέλιξη. Η φασματική ισχύς δεν είναι μία συνάρτηση δέλτα στο $\omega_F$, διότι η φασματική ισχύς υπολογίστηκε από ένα περιορισμένο χρονικά δείγμα γωνιακών θέσεων. Όσο επεκτείνουμε το χρόνο συλλογής του δείγματος τόσο περισσότερο η φασματική ισχύς θα προσεγγίζει μία συνάρτηση δέλτα.

Αυξάνουμε το πλάτος της διέγερσης στη τιμή $A = 0.9$. Τότε η καταληκτική κίνηση φαίνεται στο σχήμα (και πάλι δεν δείχνουμε τη μεταβατική εξέλιξη). Η κίνηση είναι και πάλι περιοδική, αλλά πλέον ο οριακός κύκλος έχει απομακρυνθεί από τη κυκλική μορφή. Αυτό φαίνεται στο φάσμα της γωνιακής θέσης που δείχνει ότι η κίνηση έχει ανώτερες περιττές αρμονικές της θεμελιώδους συχνότητας.

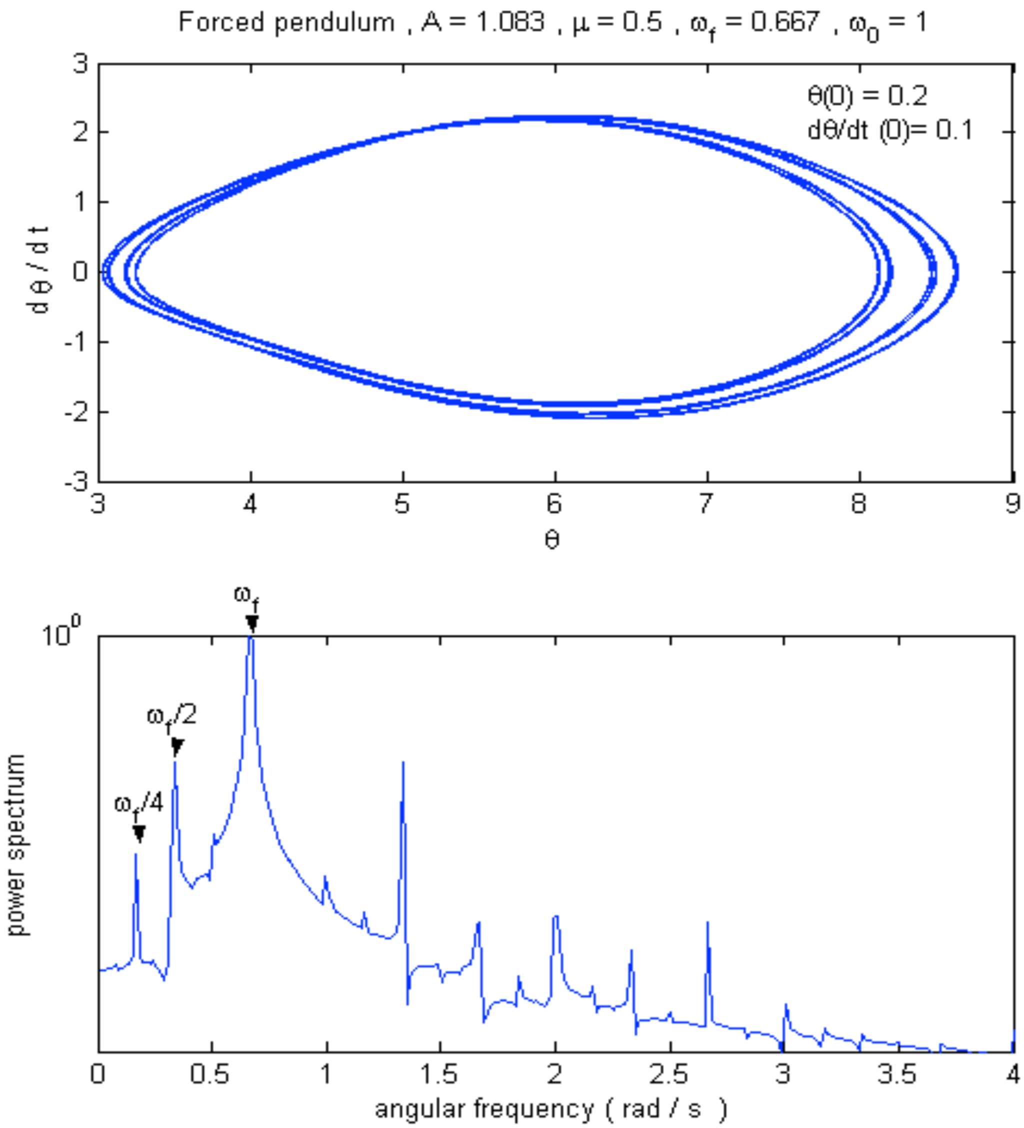


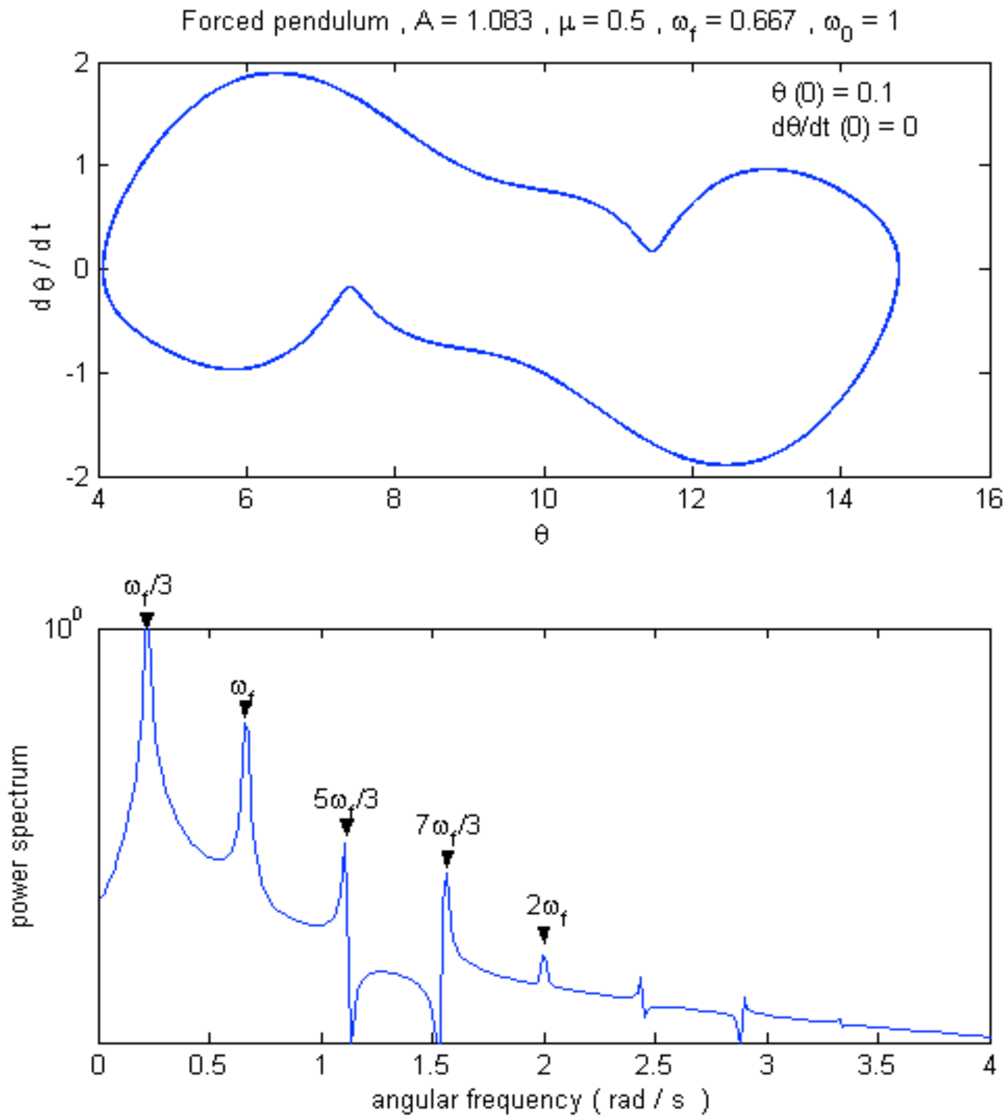
Όταν το πλάτος γίνει $A = 1.07$ ο οριακός κύκλος γίνεται διπλός και έχει διπλάσια περίοδο. Αυτό φαίνεται στο γράφημα της φασματική ισχύος η οποία αποκτά κορυφή στην υποδιπλάσια συχνότητα.



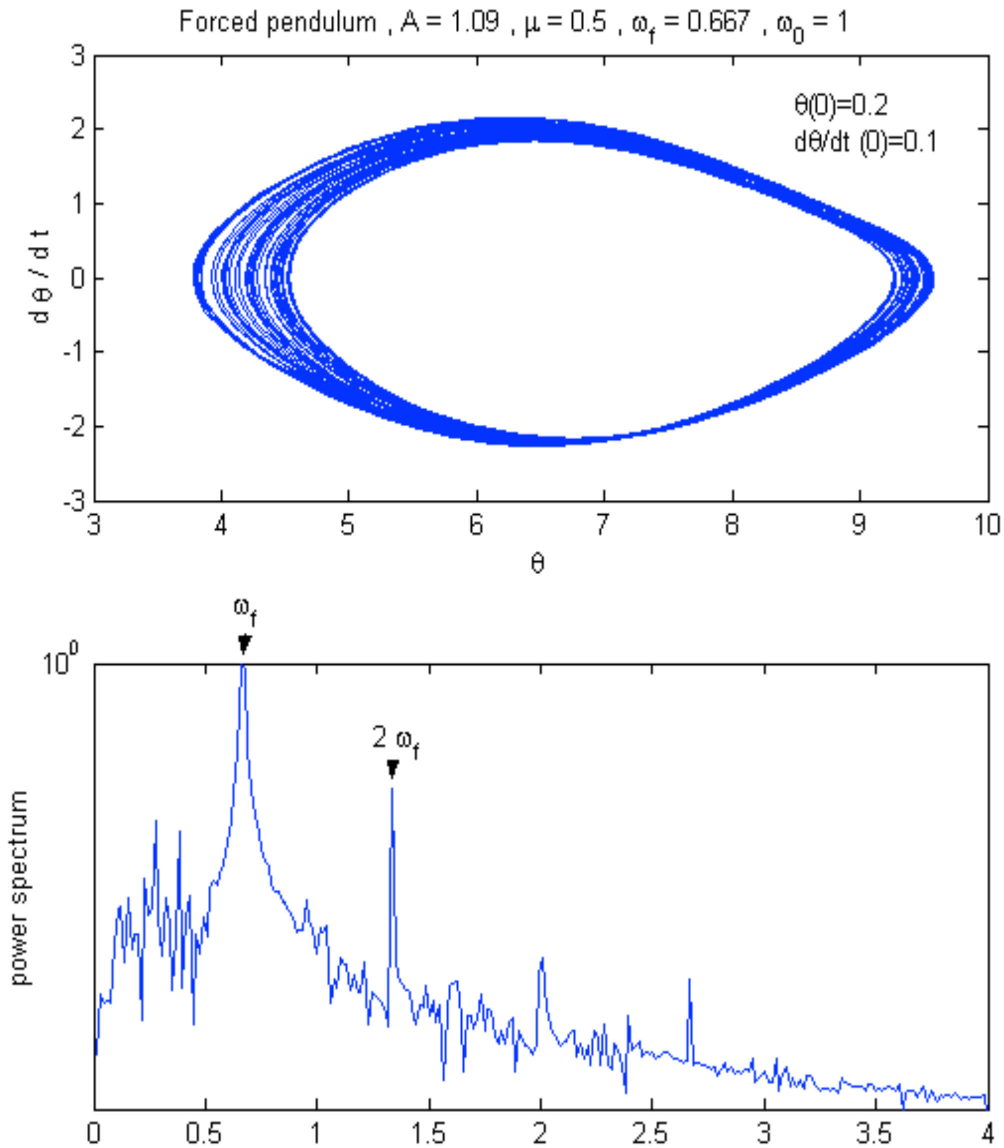
Αν αυξήσουμε το πλάτος λίγο ακόμα έχουμε και νέο διπλασμό της περιόδου.
Ο οριακός κύκλος και η αντιστοιχούσα φασματική ισχύς για $A = 1.083$ φαίνεται στο σχήμα:



Για αυτό το πλάτος διέγερσης υπάρχει και άλλος ελκυστής στον οποίο μπορεί κανείς να καταλήξει με αρχικές συνθήκες π.χ. $\theta(0) = 0.1$ και $\dot{\theta}(0) = 0$:



Αν αυξήσουμε το πλάτος ακόμα περισσότερο εμφανίζονται όλο και περισσότερες υποδιπλάσιες συχνότητες. Όταν όμως ξεπεράσουμε τη τιμή $A = 1.09$ ο χαρακτήρας της κίνησης αλλάζει, και η κίνηση φαίνεται να γίνεται απεριοδική.



Παρατηρείτε ότι το φάσμα έχει γεμίσει. Αυτό φαίνεται καλύτερα αν αυξήσουμε το πλάτος ακόμη περισσότερο: