

Συμπεριφορά ταλαντωτή σε υπεραπόσβεση

Όταν $\gamma > \omega_0$ ο αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 , \quad (1)$$

δεν εκτελεί πλέον ταλαντωτική κίνηση. Η γενική κίνηση δίνεται στη περίπτωση αυτή από άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων:

$$x(t) = ae^{p_+t} + be^{p_-t} , \quad (2)$$

με εκθέτες

$$p_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (3)$$

Είναι ενδιαφέρον ότι στη περίπτωση αυτή ο τελικός χρόνος απόσβεσης της κίνησης και συνεπώς ο χαρακτηριστικός χρόνος απόκατάστασης της ισορροπίας :

$$\tau_e = \frac{1}{p_+} = \frac{1}{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \quad (4)$$

αυξάνεται και καθίσταται άπειρος για $\gamma \rightarrow \infty$. Πράγματι για $\omega_0/\gamma \ll 1$

$$p_+ \approx -\gamma + \gamma \left(1 - \frac{\omega_0^2}{2\gamma^2}\right) = -\frac{\omega_0^2}{2\gamma} \quad (5)$$

και ο χαρακτηριστικός χρόνος εκθετικής απόσβεσης θα είναι:

$$t_e \approx \frac{2\gamma}{\omega_0^2} , \quad (6)$$

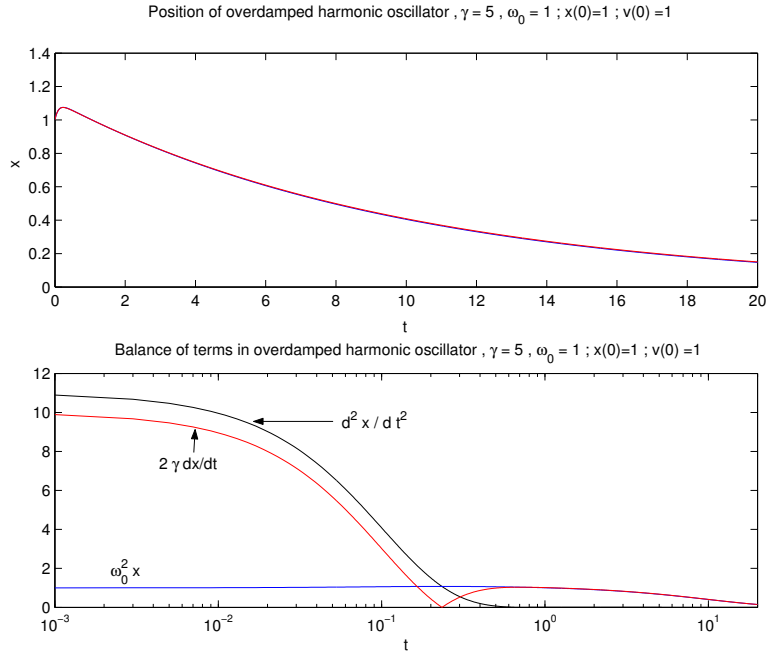
ο οποίος είναι ευθέως ανάλογος του συντελεστή της απόσβεσης γ . Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε ότι για $\gamma \gg \omega_0$ η κίνηση δίνεται κατά πρόσεγγιση από:

$$x(t) \approx ae^{-\frac{\omega_0^2 t}{2\gamma}} + be^{-2\gamma t} . \quad (7)$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η κίνηση χαρακτηρίζεται από δύο κλίμακες χρόνων: τη γρήγορη κλίμακα $1/(2\gamma)$ και τη βραδεία κλίμακα $2\gamma/\omega_0^2$. Οι δύο αυτές κλίμακες προκύπτουν από δύο διαφορετικές ισορροπίες των όρων εξέλιξης του ταλαντωτή. Η γρήγορη κλίμακα προκύπτει όταν κατά προσέγγιση η επιτάχυνση εξισορροπείται από τη δύναμη της τριβής:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} \approx 0 . \quad (8)$$

Αυτό συμβαίνει αρχικά αν ο ταλαντωτής έχει ταχύτητα πρώτης τάξης οπότε ο όρος $2\gamma\dot{x} \gg \omega_0^2 x$ και η δύναμη επαναφοράς είναι αμελητέα. Συνεπώς αρχικά ο ταλαντωτής σχεδόν ακαριαία (σε χρονικά διάστημα τάξης $1/(2\gamma)$) φρενάρει τη ταχύτητα και την καθιστά τάξης $1/\gamma$. Μόλις επιτευχθεί η μείωση της ταχύτητας η κίνηση συνεχίζει αργά υπό την



Σχήμα 1: Πάνω γραφική παράσταση: Εξέλιξη της θέσης του ταλαντωτή συναρτήσει του χρόνου με $\gamma = 5$ και $\omega_0 = 1$. Οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = 1$ και $\dot{x}(0) = 1$. Είναι σχεδιασμένες δύο καμπύλες: η ακριβής εξέλιξη που δίνεται από την ακριβή λύση (2) και η εξέλιξη σύμφωνα με τη προσέγγιση (7). Οι δύο εξελίξεις είναι δυσδιάκριτες και η προσέγγιση είναι εξαιρετική. Κάτω γραφική παράσταση: Η εξέλιξη του μέτρου των όρων της διαφορικής εξίσωσης. Παρατηρείστε ότι αρχικά και για χρόνο $1/(2\gamma) = 0.1$ η δύναμη της τριβής εξισορροπείται κατά προσέγγιση από την επιτάχυνση ενώ αμέσως μετά έχουμε σχεδόν τέλεια ισορροπία μεταξύ τριβής και δύναμης επαναφοράς. Για πλιό λόγο η προσέγγιση της ισορροπίας μεταξύ της δύναμης της τριβής και της δύναμης επαναφοράς που ισχύει για χρόνους $t > 1$ είναι καλύτερη;

επιρροή της δύναμης επαναφοράς με τέτοιο τρόπο ώστε η δύναμη της τριβής να εξισορροπείται από τη δύναμη επαναφοράς:

$$2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x \approx 0. \quad (9)$$

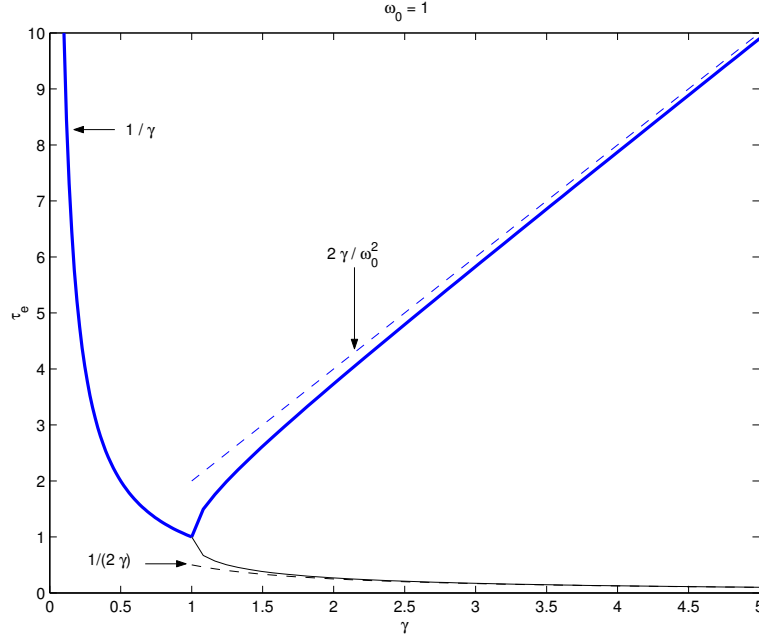
Ο ταλαντωτής τότε επανέρχεται στη κατάσταση ισορροπίας αργά με χαρακτηριστικό χρόνο $2\gamma/\omega_0^2$. Ο όρος της επιτάχυνσης είναι αμελητέος επειδή

$$\ddot{x} \approx \frac{x}{4\gamma^2/\omega_0^4}, \quad 2\gamma\dot{x} \approx \frac{2\gamma x}{2\gamma/\omega_0^2} \quad (10)$$

οπότε ο λόγος των όρων είναι:

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} \approx \omega_0 \frac{\omega_0}{\gamma} \ll 1. \quad (11)$$

Στο Σχ. 1 επιβεβαιώνεται ποσοτικά η ποιοτική συμπεριφορά της κίνησης.



Σχήμα 2: Ο χαρακτηριστικός χρόνος αποκατάστασης της ισορροπίας συναρτήσει του συντελεστή απόσβεσης γ . Η συχνότητα έχει ληφθεί $\omega_0 = 1$. Για $\gamma < \omega_0$ έχουμε χαρακτηριστικό χρόνο εκθετικής μείωσης $\tau_e = 1/\gamma$. Για $\gamma > \omega_0$ έχουμε δύο χρόνους προσαρμογής του ταλαντωτή: τον χρόνο $1/|p_-|$ (κάτω καμπύλη) ο οποίος για $\gamma/\omega_0 \gg 1$ προσεγγίζει τον $1/(2\gamma)$ (διακεκομμένη κάτω καμπύλη) και τον αργό χρόνο προσαρμογής $\tau_e = 1/|p_+|$ (άνω καμπύλη) ο οποίος προσεγγίζει τον $\tau_e \approx 2\gamma/\omega_0^2$ (διακεκομμένη άνω καμπύλη) για $\gamma/\omega_0 \gg 1$. Ταχύτερη επαναφορά του συστήματος προς τη κατάσταση ισορροπίας επιτυγχάνεται όταν έχουμε κρίσιμη απόσβεση ($\gamma = \omega_0$).

Ήδη είδαμε ότι όταν $\gamma < \omega_0$ έχουμε ταλαντωτικές λύσεις με χαρακτηριστικό χρόνο απόσβεσης $1/\gamma$. Αυτές οι ταλαντωτικές λύσεις δεν είναι βεβαίως περιοδικές λύσεις αφού το πλάτος της ταλάντωσης φθίνει, αλλά ο χρόνος μεταξύ μεγίστων της θέσης του ταλαντωτή είναι

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (12)$$

Η τριβή δηλαδή οδηγεί σε μία αύξηση του χρονικού διαστήματος μεταξύ διαδοχικών μεγίστων κάτι που ανενέμετο δεδομένου ότι η ταχύτητα του ταλαντωτή μειούται από τη τριβή. Στο όριο $\gamma \rightarrow \omega_0$ ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών μεγίστων απειρίζεται και ο χαρακτήρας της λύσης αλλάζει για $\gamma > \omega_0$ οπότε τις ταλαντωτικές λύσεις διαδέχονται οι εκθετικά μειούμενες λύσεις (2) οι οποίες, όπως είδαμε, εκμηδενίζουν με γρήγορο ρυθμό τη ταχύτητα και με βραδύ ρυθμό τη θέση του ταλαντωτή. Συνεπώς ενώ ο χαρακτηριστικός χρόνος αποκατάστασης της ισορροπίας εμεινύτο όσο μεγάλωνε ο συντελεστής της απόσβεσης γ για $\gamma < \omega_0$, ο χαρακτηριστικός χρόνος απόσβεσης αυξάνεται όταν $\gamma > \omega_0$. Στο Σχ. 2 σχεδιάζεται η εξάρτηση του χαρακτηριστικού χρόνου, τ_e , αποκατάστασης της ισορ-

ροπίας συναρτήσει του συντελεστή της τριβής γ . Συνεπώς ο γρηγορότερος ρυθμός αποκατάστασης της ισορροπίας επιτυγχάνεται όταν $\gamma = \omega_0$ οπότε ο χαρακτηριστικός χρόνος αποκατάστασης της ισορροπίας είναι $1/\omega_0$.