Πολύπολα και το σχήμα της Γης

Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

1 Πολυπολική ανάπτυξη του βαρυτικού δυναμικού

Είδαμε ότι το βαρυτικό δυναμικό που προκαλείται από μία σφαιρική κατανομή μάζας ότι είναι ίσο με $\phi = -GM/r$ σε κάθε σημείο έξω από σφαίρα που βρίσκεται απόσταση r από το κέντρο της και M η ολική μάζα του σώματος. Επειδή τα ουράνια σώματα δεν είναι ακριβώς σφαιρικά συμμετρικά αναμένουμε να υπάρξουν διορθώσεις στην απλή αυτή έκφραση του δυμαμικού. Θα υπολογίσουμε τις διορθώσεις αυτές. Αναμένουμε ότι αν βρεθούμε πολύ μακριά από το σώμα ότι το σώμα θα φαίνεται σαν σφαίρα καί ότι σε πρώτη προσέγγιση το δυναμικό θα είναι κατα προσέγγιση ίσο με $\phi = -GM/r$ εφόσον $r >> a$ όπου a η τυπική διάσταση του σώματος.

Από την αρχή της επαλληλίας το δυναμικό στο σημείο $\vec{x}$ που προκαλείται από κατανομή μάζας πυκνότητας ρ είναι:

$$\phi(\vec{x}) = -G \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' ,$$

όπου $\vec{x}'$ τα σημεία του σώματος που έχει όγκο V και dV' στοιχείο του όγκου του σωματος που έχει στο σημείο $\vec{x}'$ μάζα $\rho(\vec{x}')dV'$.

Είναι φυσικό να διαλέξουμε ως αρχή του συστήματος αναφοράς κάποιο σημείο μέσα στο σώμα. Σε αποστάσεις $r = |\vec{x}| >> a \geq |\vec{x}'|$ όπου a η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σημείων του σώματος (που θεωρείται ότι έχει πεπερασμένες διαστάσεις και δεν διαχέεται σε όλο το χώρο) μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} - x'_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) - \cdots ,$$

κάνοντας χρήση του θεωρήματος Taylor

$$s(\vec{x} - \vec{x}') = s(x) - x'_i \frac{\partial s(\vec{x})}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \frac{\partial^2 s(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \cdots .$$

Αντικαθιστώντας τώρα στο δυναμικό έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}) &= -G \int_V \rho(\vec{x}') \left(\frac{1}{r} - x'_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) - \cdots \right) dV' , \\
&= -G \left(\int_V \rho(\vec{x}') dV' \right) \frac{1}{r} + G \left(\int_V x'_i \rho((\vec{x}')) dV' \right) \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + \\
&- G \left(\frac{1}{2!} \int_V x'_i x'_j \rho(\vec{x}') dV' \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= -GM\frac{1}{r} - GD_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) - GQ_{ij} \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) - \cdots .
\end{aligned}$$

όπου M, D_i, Q_{ij} κ.ο.κ οι διάφορες ροπές της κατανομής της μάζας του σώματος. Η μηδενική ροπή

$$M = \int_V \rho(\vec{x}') dV'$$

είναι η συνολική μάζα του σώματος. Η ροπή πρώτης τάξης λέγεται η διπολική ροπή

$$D_i = -\int_V x'_i \rho(\vec{x}') dV'$$

που είναι ενα διάνυσμα και προδιορίζεται από τρείς αριθμούς. Η ροπή δεύτερης τάξης λέγεται τετραπολική (και όχι τριπολική) και είναι ο συμμετρικός πίνακας

$$Q_{ij} = \int_V x'_i x'_j \rho(\vec{x}') dV'$$

που προσδιορίζεται από 6 αριθμούς, και με τον ίδιο τρόπο ορίζονται οι ανώτερες πολυπολικές ροπές.

Τα παραπάνω ισχύουν γενικότερα σε κάθε πρόβλημα που το πεδίο του διέπεται από την εξίσωση Poisson όπως π.χ. στην Ηλεκτροστατική ή στην Υδροδυναμική. Στη βαρύτητα η εξίσωση Poisson παίρνει τη μορφή $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$.

Αντίθετα με την πυκνότητα φορτίου, η πυκνότητα μάζας στη βαρύτητα έχει μόνο θετικό πρόσημο $\rho > 0$ και έτσι μπορούμε να αγνοήσουμε τον διπολικό όρο αν λάβουμε την αρχή στο κέντρο μάζας του σώματος. Σημειώνουμε ότι ο διπολικός όρος είναι τάξης $O(1/r^2)$ διότι

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x_i}{r^3} .$$

Πράγματι αν μετατοπίσουμε την αρχή των αξόνων κατά X_i και τα σημεία του σώματος γίνουν $x'_i = x_i - X_i$, η διπολική ροπή μετασχηματίζεται στην

$$D'_i = \int_V x_i \rho(\vec{x}) dV - \left(\int_V \rho(\vec{x}) dV\right) X_i = D'_i - MX_i .$$

Επειδή στη βαρύτητα είναι πάντοτε $M > 0$ και το κέντρο μάζας ορίζεται ως $MR_i = \int_V x_i \rho((\vec{x}))dV$, αν λάβουμε $X_i = R_i$ ο διπολικός όρος μηδενιζεται. Συνεπώς θα λαμβάνουμε την αρχή των αξόνων στο κέντρο μάζας του σώματος. Παρατηρήστε ότι αν είχαμε και αρνητικές πυκνότητες και το συνολικό φορτίο τώρα ήταν $M = 0$, τότε η διπολική ροπή έχει τιμή ανεξάρτητη από το σημείο αναφοράς.

Παρατηρούμε ότι το δυναμικό

$$\phi(\vec{x}) = -G\frac{M}{r} - -GQ_{ij}\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) - \cdots$$

είναι σε μεγάλες αποστάσεις το δυναμικό που θα προέκυπτε από σημειακό (ή σφαιρικό) σώμα μάζας M με πρώτη διόρθωση τη τετραπολική διόρθωση η οποία είναι τάξης $O(1/r^3)$ διότι

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} .$$

Από αυτό το ανάπτυγμα είναι εύκολο να επιβεβαιώσετε ότι η $\frac{1}{r}$ είναι αρμονική συνάρτηση (καθώς και όλες οι παράγωγοι της) διότι:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{3x_i x_i - \delta_{ii} r^2}{r^5} \\
&= \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Με τη παρατηρήση αυτή ο τετραπολικός όρος μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως:

$$\phi_4 = -G\left(3Q_{ij} - \delta_{ij}Q_{kk}\right)\frac{3x_i x_j - \delta_{ij} r^2}{6r^5} .$$

Με τη γραφή αυτή ο συμμετρικός πίνακας $D_{ij} = 3Q_{ij} - \delta_{ij}Q_{kk}$ έχει μηδενικό ίχνος (άθροισμα των διαγωνίων του στοιχείων). Ο πίνακας αυτός μπορεί να διαγωνοποιηθεί και τότε σε αυτούς τους άξονες μόνο δύο αριθμοί περιγράφουν την τετραπολική ροπή δεδομένου ότι το ίχνος του πίνακα είναι μηδενικό.

Θα υπολογίσουμε τώρα τη τετραπολική ροπή σε σώματα που εμφανίζουν αξονική συμμετρία δηλαδή σε σώματα που έχουν κάποιο άξονα συμμετρίας. Θα δείξουμε ότι σε αυτή τη περίπτωση μόνο ένας αριθμός αρκεί για να περιγράψει τη τετραπολική ροπή. Επιλέξτε καρτεσιανό σύστημα αξόνων, με άξονα z τον άξονα συμμετρίας, δηλαδή η πυκνότητα θα είναι συνάρτηση μόνο του $\rho(z, x^2+y^2)$. Γράφουμε τα στοιχεία του πίνακα D_{ij}. Το

$$D_{11} = \int_V (2x^2 - y^2 - z^2)\rho(z, x^2+y^2) dV \ ,$$

λόγω της αξονικής συμμετρίας (εναλλάξτε το x y και το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι το ίδιο) θα είναι ίσο με το

$$D_{22} = \int_V (2y^2 - x^2 - z^2)\rho(z, x^2+y^2) dV \ ,$$

δηλαδή $D_{11} = D_{22}$, επειδή

$$\int_V y^2 \rho dV = \int_V x^2 \rho dV \ .$$

Επειδή το ίχνος του πίνακα είναι μηδενικό το τρίτο διαγώνιο στοιχείο θα είναι $D_{33} = -2D_{11}$. Συμπεραίνουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία προσδιορίζονται από ένα αριθμό. Θα αποδείξουμε τώρα ότι ό πίνακας D είναι στη περίπτωση αξονικά συμμετρικού σώματος διαγώνιος. Για να το δούμε αυτό πιο εύκολα εργαζόμαστε σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες, όπου η πολική γωνία υπολογίζεται από τον άξονα συμμετρίας z. Οπότε θα είναι: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\cos\phi$ και $z = r\cos\theta$ και το στοιχείο του όγκου $dV = r^2 \sin\theta \ dr d\theta d\phi$. Επειδή το σώμα είναι αξονικά συμμετρικό η πυκνότητα $\rho(r,\theta)$ θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από την αρχή των αξόνων (το κέντρο μάζας του σώματος), r, και τη πολική γωνία θ. Τα διαγώνια στοιχεία είναι όλα μηδενικά. Διότι:

$$\begin{aligned}
D_{12} &= 3\int_V xy\rho dV \\
&= 3\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{R(\theta)} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \ \ \rho(r,\theta) \ \ r\sin\theta\cos\phi \ \ r\sin\theta\sin\phi \\
&= 3\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{R(\theta)} r^4 \ \ \rho(r,\theta) dr \left(\int_0^{2\pi} d\phi \ \ \cos\phi \ \sin\phi\right) \\
&= 0 \, ,
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
D_{13} &= 3\int_V xz\rho dV \\
&= 3\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{R(\theta)} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \ \ \rho(r,\theta) \ \ r\sin\theta\cos\phi \ \ r\cos\theta \\
&= 3\int_0^\pi \sin^2\theta\cos\theta d\theta \int_0^{R(\theta)} r^4 \ \ \rho(r,\theta) dr \left(\int_0^{2\pi} d\phi \ \ \cos\phi\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

και με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $D_{23} = 3\int_V yz\rho dV = 0$. Συνεπώς μόνο ο αριθμός Q απαιτείται για να προσδιορισθεί η τετραπολική διόρθωση και ο πίνακας D είναι:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

όπου

$$\begin{aligned} Q &= -2\int_V (2x^2 - y^2 - z^2)\rho dV \\ &= -2\int_V (x^2 - z^2)\rho dV \\ &= -\int_V (x^2 + y^2 - 2z^2)\rho dV \\ &= \int_V (2z^2 - x^2 - y^2)\rho dV \ . \end{aligned}$$

Τελικά η τετραπολική διόρθωση παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \phi_4 &= -GD_{ij}\frac{3x_i x_j - \delta_{ij} r^2}{6r^5} \\ &= -\frac{GQ}{12r^5}\left(-3x^2 + r^2 - 3y^2 + r^2 + 6z^2 - 2r^2\right) \\ &= -\frac{GQ}{4r^5}\left(2z^2 - x^2 - y^2\right) \\ &= -\frac{GQ}{4r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \end{aligned}$$

όπου, επαναλαμβάνουμε το Q είναι:

$$Q = \int_V (2z^2 - x^2 - y^2)\rho dV$$

Υπενθυμίζουμε ότι η γωνία θ είναι η πολική γωνία που σχηματίζεται με τον άξονα συμμετρίας. Παρατηρούμε ότι όταν βρισκόμαστε μακρυά από το σώμα το δυναμικό σε πρώτη προσέγγιση είναι αυτό που θα πρόεκυπτε από μία σημειακή μάζα M. Δηλαδή αν βρισκόμαστε μακρυά από ένα σώμα μπορούμε να εκτιμήσουμε σε πρώτη τάξη τη μάζα του μακρυνού σώματος μετρώντας τη βαρυτική έλξη. Αν όμως το σώμα δεν είναι σφαιρικό θα υπάρχουν διορθώσεις και η βαρυτική έλξη δεν θα είναι μόνο στη κατεύθυνση του κέντρου μάζας του σώματος (δεν θα είναι κεντρική που συνεπάγεται τη μη διατήρηση της στροφορμής). Η πρώτη διόρθωση θα είναι η τετραπολική διόρθωση η οποία φθίνει με την απόσταση ως $1/r^3$.

Για μία σφαιρική κατανομή ύλης είναι εύκολο να δείτε ότι για λόγους συμμετρίας $Q = 0$. Το ίδιο ισχύει για τους πολυπολικούς όρους. Το Q μετρά πόσο πεπλατυσμένο είναι το σώμα. Αν το σώμα είναι σαν λεμόνι τότε $Q > 0$ ενώ αν είναι σαν πορτοκάλι τότε το $Q < 0$. Η Γή είναι σαν πορτοκάλι όπως προέβλεψε ο Νεύτων, και αποδείχθηκε απο τις μετρήσεις του Cassini και του de Maupertois.

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό του σχήματος της Γης ας υπολογίσουμε τον τετραπολικό όρο στη περίπτωση ομογενούς ελλειψοειδούς σώματος, με εξωτερική επιφάνεια που ορίζεται από την:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ .$$

Γι τον υπολογισμό είναι χρήσιμο να αλλάξουμε τις μεταβλητές στις $x = a\xi$, $y = a\eta$, $z = c\zeta$, οπότε η ολοκλήρωση γίνεται στο εσωτερικό της σφαίρας:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \ .$$

Σε αυτές τις μεταβλητές

$$\begin{aligned} Q &= \int_V (2z^2 - x^2 - y^2)\rho dV \\ &= \rho a^2 c \int\int\int_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le 1} d\xi d\eta d\zeta \ \left(2c^2\zeta^2 - a^2\xi^2 - a^2\eta^2\right) , \end{aligned}$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας θα είναι:

$$\int\int\int_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leq 1} d\xi d\eta d\zeta \ \zeta^2 = \int\int\int_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leq 1} d\xi d\eta d\zeta \ \eta^2 = \int\int\int_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leq 1} d\xi d\eta d\zeta \ \xi^2 \,,$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\int\int\int_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leq 1} d\xi d\eta d\zeta \ \zeta^2 &= \int\int\int_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leq 1} d\xi d\eta d\zeta \ \frac{\zeta^2+\eta^2+\xi^2}{3} \\
&= \frac{4\pi}{3}\int_0^1 r^4 dr \\
&= \frac{4\pi}{15}
\end{aligned}$$

Ο όγκος του ελλειψοειδούς είναι:

$$V = \frac{4\pi}{3}a^2 c$$

και συνεπώς βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}
Q &= \rho a^2 c\frac{4\pi}{15}(2c^2 - 2a^2) \\
&= \rho a^2 c\frac{8\pi}{15}(c^2 - a^2) \\
&= \frac{2}{5}M(c^2 - a^2)
\end{aligned}$$

2 Το σχήμα της Γης

Η Γή δεν είναι απόλυτα σφαιρική η πολική διάμετρος (απόσταση βορείου και νοτίου πόλου είναι $2c = 12714\ km$ ενώ η διάμετρος στον ισημερινό είναι περί τα $2a = 12756\ km$.

Ο βαθμός πεπλάτυνσης ενός σώματος ορίζεται ως

$$\epsilon = \frac{a-c}{a}\,.$$

και για τη Γή είναι $\epsilon \approx 1/300$. Η πλάτυνση προκύπτει κυρίως λόγω της περιστροφής της Γης, όπως παρατηρήσε ο Νεύτων. Το φυγοκεντρικό δυναμικό είναι

$$\Phi = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

οπότε η επιφάνεια της Γης πρέπει να είναι μία ισοδυναμική επιφάνεια, οπότε αν ϕ είναι το βαρυτικό δυναμικό, επί της επιφανείας της Γης θα ισχύει: $\phi + \Phi =$ σταθερό. Αν το βαρυτικό δυναμικό γραφεί με τη τετραπολική διόρθωσή του, γράφουμε τη τετραπολική ροπή ως

$$Q = -2Ma^2 J_2.$$

με J_2 μία αδιάστατη σταθερά. Στην περίπτωση που το σχήμα είναι ένα ομογενές ελλειψοειδές εκ περιστροφής θα είναι

$$Q = -\frac{2Ma^2}{5}\frac{a^2-c^2}{a^2} = -\frac{2Ma^2}{5}\frac{a-c}{a}\frac{a+c}{a} \approx -2Ma^2\frac{2\epsilon}{5}$$

οπότε η σταθερά θα είναι ίση με $J_2 = 2\epsilon/5$

Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι η επιφάνεια είναι ισοδυναμική επιφάνεια (που είναι πολύ καλή προσέγγιση) τότε το σχήμα της επιφανείας $R(\theta)$ λαμβάνοντας υπόψη μόνο τετραπολικούς όρους και θεωρώντας ότι η Γή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα περιστροφής της θα δίνεται από την εξίσωση:

$$C = -\frac{GM}{R} + \frac{GMa^2 J_2}{2R^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) - \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2\theta \ ,$$

όπου C μία σταθερά. Εξισώνοντας τη τιμή του δυναμικού στον πόλο ($\theta = 0$) και στον ισημερινό ($\theta = \pi/2$) θα πρέπει να ισχύει:

$$-\frac{GM}{c} + \frac{GMa^2 J_2}{c^3} = -\frac{GM}{a} - \frac{GMJ_2}{2a} - \frac{\omega^2}{2} a^2$$

Επειδή

$$c = a(1-\epsilon)$$

και επειδή $\epsilon << 1$ μπορούμε να γράψουμε $1/c \approx (1+\epsilon)/a$ και επειδή $J_2 = O(\epsilon)$ σε πρώτη τάξη ως προς ϵ) η παραπάνω σχέση είναι:

$$-\frac{GM\epsilon}{a} + \frac{3GMJ_2}{2a} = -\frac{\omega^2}{2} a^2 \ .$$

Αν $g_e = -GM/a^2$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στον ισημερινό προκύπτει η ισότης:

$$2g_e a\epsilon - 3J_2 g_e a = -\omega^2 a^2 \ .$$

ή

$$\frac{\omega^2 a}{g_e} = 2\epsilon - 3J_2 \ .$$

Η σχέση αυτή δίνει μία σχέση μεταξύ των σταθερών ϵ J_2. Αν υποθέσουμς ότι είναι ένα ομογενές ελλειψοειδές τότε $J_2 = 2\epsilon/5$ και

$$\epsilon = \frac{5\omega^2 a}{4g_e} \ ,$$

που είναι $\epsilon = 1/230$ αρκετά μεγαλύτερο από το παρατηρούμενο $\epsilon = 1/300$. Η Γή δεν έχει στη πραγματικότητα σταθερή πυκνότητα και στο κέντρο της υπάρχει ένα πιο συμπαγής περιοχή.

3 Η κίνηση ενός σώματος σε πεδίο βαρύτητας με τετραπολική διόρθωση

΄Εάν $\vec{k}$ μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας το βαρυτικό δυναμικό θα είναι:

$$\phi = \frac{GM}{r} - \frac{GQ}{4r^5}\left(3(\vec{x}\cdot\vec{k})^2 - R^2\right) \ ,$$

και η δύναμη $\vec{F} = -\nabla\phi$ που ασκείται στο σώμα δεν είναι πλέον κεντρική ούτε αντιστρόφου τετραγώνου. Η εξίσωση κίνησης του σώματος θα είναι:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\left(\frac{GM}{r^2} - \frac{2GQ}{r^4}\right)\frac{\vec{x}}{r} - \frac{15GQ}{4r^6}(\vec{x}\cdot\vec{k})^2\,\frac{\vec{x}}{r} + \frac{3GQ}{2r^5}(\vec{x}\cdot\vec{k})\,\vec{k} \ .$$

Η εξίσωση αυτή δεν έχει απλή λύση. Η μη κεντρικότητα της δύναμης (υπάρχει συνιστώσα της δύναμης στη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας του σώματος) καθώς και οι όροι $O(1/r^4)$ που προστίθενται στη δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου εξαρτώνται από τη τετραπολοκή ροπή και την απόσταση από το κεντρικό σώμα. Η επίπτωση της τετραπολοκής ρολης μειώνεται με την απόσταση από το κεντρικό σώμα.

Όταν το σώμα κινείται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου τότε η κίνηση είναι επίπεδη και η τροχιά ελλειπτική σε ένα επίπεδο. Υπό την επίδραση του τετραπολοκού όρου η κίνηση δεν θα παραμείνει ελλειπτική ούτε θα περιορίζεται σε ένα επίπεδο. Αναμένουμε όμως επειδή το τετραπολικό δυναμικό είναι μία διαταραχή στη κεντρική βαρυτική δύναμη $1/r^2$ ότι η κίνηση του σώματος (όταν είναι φραγμένη) να διαγράφει μία αργά μεταβαλόμενη ελλειπτική τροχιά επί ενός αργά μεταβαλλόμενου επιπέδου. Τι εννοούμε με τον όρο αργά μεταβαλλόμενου; Εννοούμε ότι αν T είναι η περίοδος περιστροφής του σώματος περί τον πλανήτη η τροχιά σε χρόνους της τάξης της περιόδου περιστροφής κείται σε ένα επίπεδο και είναι ελλειπτική. Η αλλαγή της τροχιάς και του επιπέδου της τροχιάς πραγματοποιείται σε χρόνους πολύ μεγαλύτερους από το χρόνο περιστροφής.

3.1 Ο κλονισμός του επιπέδου της τροχιάς

Θα αναλύσουμε πρώτα τη κίνηση του επιπέδου της τροχιάς. Προς τούτο θα αναλύσουμε την εξέλιξη της στροφορμής του σώματος $\vec{L} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ όπου m η μάζα του σώματος η οποία δεν διατηρείται πλέον λόγω της ύπαρηγς μη κεντρικού όρου στη δύναμη. Πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά την εξίσωση κίνησης με το διάνυσμα θέσης βρίσκουμε ότι η χρονική μεταβολή της στροφορμής είναι:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{3mGQ}{2r^5}(\vec{x}\cdot\vec{k})\,\vec{k}\times\vec{x}\;.$$

η οποία είναι ανάλογη της τετραπολικής ροπής Q και επιτελείται μικρή μεταβολή της στροφορμής σε μία περιστροφή, δηλαδή

$$\frac{\Delta L}{L} \approx \frac{T dL/dt}{L} << 1\;,$$

(εκτιμείστε πόσο μεταβάλλεται η στροφορμή σε μία περιστροφή). Οπότε το επίπεδο κίνησης θα μεταβάλλεται αργά. Ας υπολογίσουμε τώρα τον τρόπο που μεταβάλλεται το επίπεδο κίνησης του σώματος. Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς ας θεωρήσουμε ότι το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση (θα δούμε σε λίγο πως μεταβάλλεται η ελειπτική τροχιά του σώματος) σε ένα επίπεδο που σχηματίζει γωνία α με το επίπεδο του ισημερινού (όπως είπαμε αυτή η γωνία θα αλλάζει πολύ αργά) και $\vec{n}$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο το οποίο και αυτό θα σχηματίζει γωνία α με το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{k}$ που είναι στη κατεύθυνση του άξονα συμμετρίας του σώματος, οπότε $\vec{k}\cdot\vec{n} = \cos\alpha$. Ορίζουμε τώρα στο επίπεδο κίνησης του σώματος δύο μοναδιαία διανύσματα $\hat{x} = \vec{k}\times\vec{n}$ και $\hat{y} = \vec{n}\times\hat{x}$ οπότε τα $(\hat{x},\hat{y},\vec{n})$ σχηματίζουν μία ορθοκανονική βάση, και τα δύο πρώτα διανύσματα μπορούν να ορίσουν όλα τα σημεία του επιπέδου. Επίσης παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\vec{k}$,$\vec{n}$ και $\hat{y}$ κείνται στο ίδιο επίπεδο, και συνεπώς

$$\vec{k} = \cos\alpha\,\vec{n} + \sin\alpha\,\hat{y}\;.$$

Υποθέτουμε, ότι η τροχιά είναι κυκλική οπότε η θέση του σώματος είναι

$$\vec{x} = r(\cos\psi\hat{x} + \sin\psi\hat{y})\;,$$

όπου ψ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης με τον άξονα $\hat{x}$. Οπότε

$$\begin{aligned}\vec{k}\times\vec{x} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \vec{n} \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ r\ \cos\psi & r\ \sin\psi & 0 \end{vmatrix} \\ &= -r\ \cos\alpha\sin\psi\,\hat{x} + r\ \cos\alpha\cos\psi\,\hat{y} - r\ \sin\alpha\cos\psi\,\vec{n}\end{aligned}$$

και

$$\vec{k}\cdot\vec{x} = r\ \sin\alpha\sin\psi$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στην εξίσωση εξέλιξης της στροφορμής έχουμε:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{3mGQ}{2r^3} \left(-\cos\alpha \sin\alpha \sin^2\psi \, \hat{x} + \cos\alpha \sin\alpha \sin\psi \cos\psi \, \hat{y} - \sin^2\alpha \sin\psi \cos\psi \, \vec{n} \right) .$$

Αυτή η έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί παρατηρώντας ότι οι όροι $\sin\psi\cos\psi$ μηδενίζονται σε μία περιστροφή, έχουν μηδενικό μέσο όρο και δεν συμβάλουν σε πρώτη τάξη στην αργή εξέλιξη της στροφορμής, η οποία αλλάζει σε χρόνους πολύ μεγαλύτερους από το χρόνο περιστροφής. Η κύρια συμβολή στην εξέλιξη της στροφορμής πρόερχεται από τον όρο $\sin^2\psi = 1/2 - \cos 2\psi$, ο οποίος αποτελείται από το μέσο όρο $1/2$ και ένα ταλαντωτικό όρο που και αυτός δεν συμβάλει στην αργή εξέλιξη της στροφορμής. Συνεπώς σε καλή προσέγγιση η στροφορμή εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{3mGQ}{4r^3} \cos\alpha \sin\alpha \, \hat{x} \\ &= \frac{3GQ}{4r^5\omega} \cos\alpha \, \vec{k} \times \vec{L} \\ &= \vec{\Omega} \times \vec{L} \end{aligned}$$

δεδομένου ότι $|\vec{L}| = mr^2\omega$ με $\omega = |\dot{\psi}|$. Βλέπουμε ότι το διάνυσμα της στροφορμής περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του σώματος $\vec{k}$ με γωνιακή ταχύτητα:

$$\vec{\Omega} = \frac{3GQ}{4r^5\omega} \cos\alpha \vec{k} \, ,$$

όπου μπορούμε να προσεγγίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος με $\omega = \sqrt{GM}/r^{3/2}$. Αν θέσουμε $Q = -2Ma^2 J_2$ λαμβάνουμε ότι η κάθετος του επιπέδου της τροχιάς θα περιστρέφεται περι τον άξονα συμμετρίας με γωνιακή ταχύτητα

$$\vec{\Omega} = -\frac{3J_2\omega}{2} \cos\alpha \left(\frac{a^2}{r^2} \right) \vec{k} \, .$$

Ο κλονισμός τού επιπέδου της τροχιάς είναι αντίθετος στη διεύθυνση περιστροφής του σώματος, και είναι μεγαλύτερος για κινήσεις πλησίον του ισημερινού και εξαφανίζεται αν το σώμα τεθεί σε πολική τροχιά. Η τάξη μεγέθους του κλονισμού του επιπέδου της τροχιάς για τροχιάς κοντά στο επίπεδο του ισημερινού και σε ύψος της τάξης των $500 \; km$ από την επιφάνεια της γης είναι ένας ή δύο μήνες (υπολογίστε το !).