ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Συναρτήσεις δέλτα και συναρτήσεις Green

Μηχανική Ι
22 Ιανουαρίου 2014

1 Εισαγωγή

Θα ξεκινήσουμε με ένα εξαιρετικά απλό πρόβλημα μηχανικής. Θα το λύσουμε, όπως έχετε μάθει να το λύνετε στο Λύκειο, και στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε οριακά τη συνάρτηση δέλτα και θα εξετάσουμε τις επιπτώσεις εφαρμογής μιας δύναμης με μορφή δέλτα (μιας κλωτσιάς δηλαδή) σε ένα ελεύθερο σωματίδιο.

Κατόπιν θα δείξουμε πως θα δρούσε μια δύναμη δέλτα σε ένα γενικότερο πρόβλημα μηχανικής και θα γενικεύσουμε το αποτέλεσμα για μια χρονοεξαρτώμενη δύναμη.

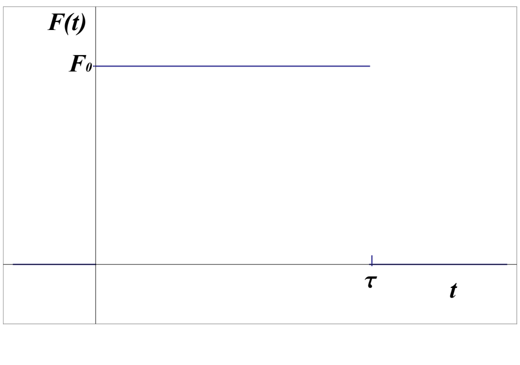
Τέλος θα εφαρμόσουμε αυτό που μάθαμε στην περίπτωση του αρχικού προβλήματος με το οποίο ξεκινήσαμε. Θα διαπιστώσετε ότι η λύση αυτή που κατασκευάσαμε με το δεύτερο τρόπο είναι άλλου τύπου, και από πρακτικής άποψης πιο απλή, από τη λύση που μάθατε στο Λύκειο.

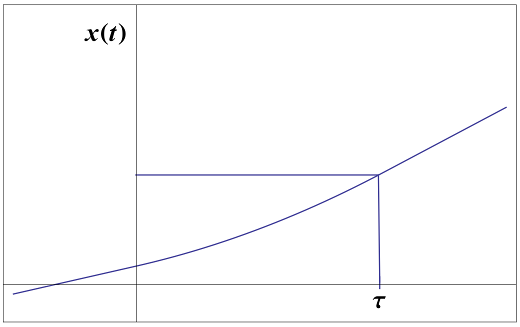
2 Το πρόβλημα

Σε ένα ελεύθερο σωματίδιο μάζας m (δυνάμενο να κινείται σε μια ευθεία – μονοδιάστατο πρόβλημα) ασκείται μια δύναμη της μορφής

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ F_0 & \text{για } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{για } t > \tau. \end{cases} \tag{1}$$

Πως θα κινηθεί το σωματίδιο αν αρχικά (τη χρονική στιγμή 0) βρίσκεται στη θέση x_0 και έχει ταχύτητα v_0;





Απάντηση Θα χωρίσουμε το πρόβλημα σε δύο διαστήματα διερεύνησης. Στο πρώτο διάστημα $0 \leq t \leq \tau$ το σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση σταθερής δύναμης σύμφωνα με την εξίσωση κίνησης

$$m\ddot{x} = F_0. \tag{2}$$

Όπως έχετε μάθει στο σχολείο η κίνησή του θα είναι

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2. \tag{3}$$

Στο δεύτερο διάστημα ($t > \tau$) που έχει παύσει η δύναμη, η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$m\ddot{x} = 0 \tag{4}$$

με λύση μια ομαλή κίνηση της μορφής

$$x(t) = x(\tau) + v(\tau)(t - \tau), \tag{5}$$

όπου τα $x(\tau)$ και $v(\tau)$ υπολογίζονται από τη λύση στο τέλος του πρώτου διαστήματος και συγκεκριμένα

$$x(\tau) = x_0 + v_0\tau + \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}\tau^2 \quad v(\tau) = v_0 + \frac{F_0}{m}\tau. \tag{6}$$

Συνολικά η κίνηση θα είναι:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_0 t & \text{για } t < 0 \\ x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 & \text{για } 0 \leq t \leq \tau \\ x_0 + v_0\tau + \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}\tau^2 + \left(v_0 + \frac{F_0}{m}\tau\right)(t - \tau) & \text{για } t > \tau. \end{cases} \tag{7}$$

Η τελευταία έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί στην $x_0 + v_0 t - (F_0/(2m))\tau^2 + (F_0/m)\tau t$.
Παρατήρηση: Η εύρεση της κίνησης απαιτεί την ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης δύο φορές προκειμένου να υπολογίσουμε πρώτα την ταχύτητα και στη συνέχεια τη θέση. Απλώς λόγω της σταθερής δύναμης του προβλήματος γράψαμε κατευθείαν το αποτέλεσμα αυτής της διπλής ολοκλήρωσης.

Τώρα ας δούμε πως απλοποιείται αυτή η τελική έκφραση για την κίνηση του σωματιδίου αν η δύναμη F_0 είναι ίση με $1/\tau$, στο όριο $\tau \to 0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε πως η δύναμη έχει τη μορφή μιας δέλτα συνάρτησης: είναι 0 για όλους τους χρόνους εκτός από τη στιγμή 0, κατά την οποία απειρίζεται καταλλήλως έτσι ώστε η ώθησή της (το ολοκλήρωμά της στο χρόνο) να έχει μέγεθος 1. (Σημειώστε εδώ ότι οι διαστάσεις των αποτελεσμάτων πιθανώς να αλλοιωθούν, καθόσον η ώθηση που έχει διαστάσεις δύναμης επί χρόνου, μετά την αντικατάσταση $F_0 = 1/\tau$ θα φαίνεται ότι είναι αδιάστατη.) Αντικαθιστώντας $F_0 = 1/\tau$

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_0 t & \text{για } t < 0 \\ x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{1}{m\tau}t^2 & \text{για } 0 \leq t \leq \tau \\ x_0 + v_0 t - \frac{1}{2m\tau}\tau^2 + \frac{1}{m\tau}\tau t & \text{για } t > \tau \end{cases} \tag{8}$$

και στο όριο $\tau \to 0$

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_0 t & \text{για } t < 0 \\ x_0 + (v_0 + 1/m)t & \text{για } t > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Βλέπετε ότι τώρα έχει εξαφανιστεί η περιοχή της μη μηδενικής δύναμης καθόσον αυτή δεν έχει πλεον χρονική διάρκεια, είναι μόνο μια στιγμή!

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η κίνηση είναι συνεχής, παρότι έδρασε μια εξαιρετικά ασυνεχής (και κάπως παλαβή) δύναμη. Οι επιπτώσεις της ασυνεχούς αυτής δύναμης βρίσκονται στην ακαριαία αλλαγή της ταχύτητας του σωματιδίου, και όχι στη συνέχεια της θέσης αυτού. Η θέση ενός σωματιδίου δεν μπορεί ποτέ να είναι ασυνεχής συνάρτηση! Ίσως σκεφθείτε ότι ο απειρισμός της δύναμης θα μπορούσε να οδηγήσει σε απειρισμό της ταχύτητας και άρα ασυνέχεια της θέσης. Όμως ο απειρισμός αυτός της δύναμης έχει τέτοια χρονική διάρκεια (μηδέν) ώστε δεν μπορεί αυτό να συμβεί. Αν η δύναμη γινόταν άπειρη για πεπερασμένο χρονικό διάστημα, το σωματίδιο θα εξαφανιζόταν για πάντα στο άπειρο και δεν θα είχε νόημα να μιλάμε για κίνηση πέραν του χρονικού ορίζοντα που η δύναμη είναι πεπερασμένη.

Εκ του αποτελέσματος, αλλά και απλούστερα από τη γνώση ότι η ώθηση μιας δύναμης ισούται με τη μεταβολή της ορμής του σώματιδίου (2ος νόμος του Νεύτωνα, σε ολοκληρωτική μορφή), μπορούμε απλά να περιγράψουμε την κίνηση ως ακολούθως: Προ της εμφάνισης της δύναμης δέλτα το σωματίδιο κινούνταν με σταθερή ταχύτητα, ενώ μετά την εμφάνιση της δέλτα δύναμης, το σωματίδιο συνέχισε από το σημείο που είχε φτάσει με αλλαγμένη ταχύτητα κατά $1/m$.

3 Ένα γενικώτερο πρόβλημα

Ας πάμε τώρα σε ένα πιο γενικό πρόβλημα. Ας υποθέσουμε πως θέλουμε να βρούμε την κίνηση κάτω από την επίδραση της δύναμης

$$F = F_l(x) + \delta(t - t_0) \tag{10}$$

ή και της ακόμη πιο δύσκολης περίπτωσης

$$F = F_l(x) + f(t) \tag{11}$$

υποθέτωντας ότι η F_l είναι μια γραμμική δύναμη της μορφής λx. Ας ξεκινήσουμε με την ευκολώτερη περίπτωση (10). Η περίπτωση της δράσης μόνο της $F_l(x)$ (χωρίς καμία χρονοεξάρτηση) είναι αρκετά εύκολο να αντιμετωπιστεί, όπως θα δείξουμε αργότερα στο μάθημα. Έτσι εμείς θα υποθέσουμε ότι ξέρουμε να βρίσκουμε την κίνηση κάτω από την επίδραση μόνο αυτής της δύναμης.

Η επιπλέον παρουσία της $\delta(t-t_0)$ αλλάζει καθόλου τα πράγματα; Η δέλτα στην παραγματικότητα είναι απούσα σε όλους τους χρόνους (είναι μηδέν) εκτός από τη χρονική στιγμή $t = t_0$. Αλλά μάθαμε τι κάνει η δέλτα σε αυτή την περίπτωση από το προηγούμενο παράδειγμα. Απλώς αλλάζει την ταχύτητα του σωματιδίου, προσδίδοντάς του αμέσως μετά την $t = t_0$ ταχύτητα όση είχε μόλις πριν την $t = t_0$ συν $1/m$, αφού η ώθηση της δέλτα είναι $1/m$ στο μηδενικής χρονικής διάρκειας αυτό διάστημα (αμέσως μετά – αμέσως πριν), ενώ η ώθηση της δύναμης $F(x)$ στο μηδενικό αυτό διάστημα είναι 0 (θεωρώντας ότι η $F(x)$ είναι φραγμένη).

Και πώς θα φτιάξουμε αυτή την κίνηση με τη σπασμένη κλίση στο t_0; Η απάντηση είναι απλή: Η λύση $x(t)$ της δευτεροτάξιας διαφορικής εξίσωσης $F(x) = m\ddot{x}(t)$ που περιγράφει το 2ο νόμο του Νεύτωνα, είναι προφανώς μια συνάρτηση η οποία μπορεί να παραμετροποιηθεί μέσω δύο παραμέτρων (αρχικών συνθηκών). Μπορούμε να επιλέξουμε την θέση και την ταχύτητα σε κάποια δοσμένη χρονική στιγμή για τις παραμέτρους αυτές. Η αρχή του ντετερμινισμού μας εξασφαλίζει ότι η κίνηση θα είναι μοναδική (και προς το παρελθόν και προς το μέλλον). Ας γράψουμε τη συνάρτηση αυτή ως

$$x(t) = x_F(t; x_0 = x(t_0), v_0 = v(t_0)), \tag{12}$$

όπου το “;” διαχωρίζει τη μεταβλητή της συνάρτησης t από τις παραμέτρους x_0, v_0. Η λύση αυτή στην περίπτωση που το πρόβλημα είναι γραμμικό, δηλαδή όταν η $F(x) = F_l(x)$ είναι γραμμική συνάρτηση, μπορεί να γραφεί πολύ απλά ως γραμμικός συνδυασμός δύο λύσεων με πολλαπλασιαστικούς παράγοντες τα x_0 και v_0 αντίστοιχα, δηλαδή $x(t) = x_0\psi_x(t) + v_0\psi_v(t)$. Συνεπώς η κίνηση όταν υπάρχει και η χρονοεξαρτώμενη δέλτα δύναμη θα έχει τη μορφή

$$x_{F+\delta}(t; t_0) = \begin{cases} x_F(t; x_0, v_0) = x_0\psi_x(t-t_0) + v_0\psi_v(t-t_0) & \text{για } t < t_0 \\ x_F(t; x_0, v_0 + 1/m) = x_0\psi_x(t-t_0) + (v_0 + 1/m)\psi_v(t-t_0) & \text{για } t \geq t_0. \end{cases} \tag{13}$$

Σχόλιο: Μην εκπλαγείτε που οι αρχικές (στην πραγματικότητα τελικές) συνθήκες του πρώτου σκέλους καθορίζουν μόνο το παρελθόν αλλά όχι με τις ίδιες τιμές το μέλλον, σε φαινομενική διαφωνία με τα λεγόμενα της προηγούμενης παραγράφου. Αυτή που γράψαμε είναι η κίνηση υπό τη δράση και της χρονοεξαρτώμενης δέλτα. Αν είχαμε μόνο την $F_l(x)$ η γνώση των x_0, v_0 θα καθόριζε πλήρως και το μέλλον και το παρελθόν (το πρώτο σκέλος θα ίσχυε για όλους τους χρόνους). Στην πραγματικότητα, όμως, η γνώση των x_0, v_0, αμέσως πριν τη δράση της δέλτα, καθορίζει και το παρελθόν και το μέλλον του σωματιδίου υπό τη δράση της πλήρους δύναμης $F_l + \delta$. Απλώς το μέλλον είναι λίγο πιο ανορθόδοξο και πρέπει απλώς να αλλάξουμε τη μία παράμετρο, προκειμένου να συμπεριλάβουμε και τη δράση της δέλτα.

Η τελευταία αυτή συνάρτηση που γράψαμε στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες είναι $x_0 = v_0 = 0$ έχει ένα ιδιαίτερο όνομα, λέγεται συνάρτηση Green[1] της συγκεκριμένης γραμμικής δυναμικής εξίσωσης υπό την παρουσία μιας δέλτα χρονοεξάρτησης:

$$x_G(t; t_0) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < t_0 \\ \frac{1}{m}(t-t_0) & \text{για } t \geq t_0 \end{cases} = \frac{1}{m}\Theta(t-t_0)(t-t_0). \tag{14}$$

Η συνάρτηση βήματος Θήτα που χρησιμοποιήσαμε εδώ είναι 0 για αρνητικά ορίσματα και 1 για θετικά και περιγράφει κομψά αυτή την ακαριαία αλλαγή της κλίσης στο t_0.

[1] Ο Βρετανός George Green έγραψε το 1828 μια πρώτη μαθηματική θεωρία για τον ηλεκτρισμό και το μαγνητισμό *“An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism”* η οποία αποτέλεσε θεμέλιο για τη μεταγενέστερη δουλειά του Maxwell και του Thomson. Στην εργασία αυτή εισήγαγε ανάμεσα στα άλλα τη βασική ιδέα της συνάρτησης Green που περιγράφουμε εδώ, εφαρμόζοντας την σε μηχανικά προβλήματα.

Τώρα είμαστε σε θέση να επιτεθούμε στο δύσκολο πρόβλημα. Πρέπει όμως πρώτα να δείξουμε ότι για κάθε φραγμένη συνάρτηση

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{15}$$

ή με άλλα λόγια μπορούμε κάθε συνάρτηση να την αναλύσουμε σε συναρτήσεις δέλτα με μέτρο κάθε φορά την τιμή της συνάρτησης στο κέντρο της αντίστοιχης δέλτα. Η δέλτα στο παραπάνω ολοκλήρωμα δουλεύει σαν ένα φίλτρο που αφήνει να φανεί η τιμή της συνάρτησης στο σημείο που δεν μηδενίζεται η δέλτα. Για να το δείτε γιατί ισχύει αυτό, θεωρήστυε τη δέλτα σαν το όριο της συνάρτησης παλμού που είδαμε και παραπάνω, με ολοκλήρωμα μονάδα, καθώς η διάρκεια του παλμού αυτού τείνει στο μηδέν. Τότε το ολοκλήρωμα στο δεξί σκέλος θα γίνει

$$\lim_{\tau\to 0} \int_{t-\tau}^{t} dt_0 f(t_0)\frac{1}{\tau}.$$

[**Εξήγηση:** Η δέλτα είναι 0 παντού εκτός από το διάστημα $0 \leq t - t_0 \leq \tau$ στο οποίο παίρνει την τιμή $1/\tau$. Λύνοντας ως προς t_0 το διάστημα αυτό γίνεται $t-\tau \leq t_0 \leq t$.] Τώρα αναπτύσσοντας κατά Taylor την f στο μικρό αυτό διάστημα γύρω από το t θα έχουμε $f(t_0) \simeq f(t) + (t_0 - t)f'(t) + \mathcal{O}(t_0 - t)^2$. Εισάγοντας το ανάπτυγμα αυτό στο ολοκλήρωμα και παίρνοντας το όριο είναι εύκολο να δείτε ότι η έκφραση αυτή καταλήγει να είναι απλά $f(t)$:

$$\lim_{\tau\to 0} \int_{t-\tau}^{t} dt_0 f(t_0)\frac{1}{\tau} = f(t). \tag{16}$$

Οι ανώτεροι όροι, $\mathcal{O}(t_0 - t)^2$, όπως άλλωστε και ο γραμμικός όρος, δεν συμβάλλουν καθόλου! Το αποτέλεσμα αυτό γίνεται ολοφάνερο αν "δείτε" το παραπάνω όριο ολοκληρώματος γραφικά.

Ας προχωρήσουμε στη λύση του προβλήματος (11) γράφοντας κάπως διαφορετικά τη χρονοεξαρτώμενη δύναμη (σύμφωνα με τη σχέση (15)):

$$m\ddot{x} = F_l(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 f(t_0)\delta(t-t_0). \tag{17}$$

Εδώ παρατηρούμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα περιλαμβάνει μια μεταβλητή t_0 η οποία δεν υπάρχει πουθενά αλλού εκτός του ολοκληρώματος. Επομένως μπορούμε να δούμε το ολοκλήρωμα ως μια άθροιση από δυνάμεις δέλτα με διαφορετικό κέντρο και διαφορετική ένταση η καθεμία. Έτσι το δύσκολο πρόβλημα μοιάζει σαν μια σειρά από εύκολα προβλήματα τύπου (10). Μπορείτε ίσως να φανταστείτε ότι η λύση του δύσκολου αυτού προβλήματος είναι μια κατάλληλη διαδοχή από λύσεις τύπου $x_G(t;t_0)$ με ταχύτητα της καθεμίας μετά το t_0 αυτήν που είχε πριν το t_0 συν $1/m$.

Ας γράψουμε αυτή τη διαδοχή με λίγη φαντασία και στη συνέχεια θα ελέγξουμε αν κατασκευάστηκε σωστά.

$$x_{F_l+f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 x_G(t;t_0) f(t_0). \tag{18}$$

Έλεγχος: Ας παραγωγίσουμε την παραπάνω συνάρτηση δύο φορές ως προς t. Η παράγωγος θα χτυπήσει μόνο στην x_G και θα δώσει $(F_l(x_G) + \delta(t-t_0))/m$. Έτσι

$$m\ddot{x}_{F_l+f}(t) \;=\; m\int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 \ddot{x}_G(t;t_0) f(t_0)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F_l(x_G) + \delta(t-t_0))dt_0 f(t_0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda x_G + \delta(t-t_0))dt_0 f(t_0) \\ &= \lambda x_{F_l+f}(t) + f(t) = F_l + f(t), \end{aligned} \tag{19}$$

αυτό ακριβώς το πρόβλημα δηλαδή που θέλαμε να λύσουμε.

Τώρα που μάθαμε πως να βρίσκουμε τη λύση ας επανέλθουμε στο πρώτο λυκειακό πρόβλημα από το οποίο ξεκινήσαμε:

$$m\ddot{x} = F(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ F_0 & \text{για } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{για } t > \tau. \end{cases} \tag{20}$$

Πρώτα θα βρούμε τη συνάρτηση Green, δηλαδή τη λύση του προβλήματος

$$m\ddot{x} = \delta(t-t_0) \tag{21}$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Όπως δείξαμε παραπάνω η λύση σε αυτό το πρόβλημα $x_G(t;t_0)$ θα είναι η συγκόλληση δύο γραμμικών συναρτήσεων με διαφορά στην κλίση $1/m$, δηλαδή

$$x_G(t;t_0) = \frac{1}{m}\Theta(t-t_0)(t-t_0). \tag{22}$$

Η λύση του ευρύτερου προβλήματος (20) θα είναι απλά

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 x_G(t;t_0)F(t_0) \\ &= \int_{0}^{+\infty} dt_0 \frac{1}{m}\Theta(t-t_0)(t-t_0)F(t_0), \end{aligned} \tag{23}$$

αφού θεωρούμε ότι η δράση της $F(t)$ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Στη λύση αυτή θα μπορούσαμε να κολλήσουμε και την κίνηση με τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες για χρόνους $t < 0$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε συνολικά

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_{0}^{+\infty} dt_0 \frac{1}{m}\Theta(t-t_0)(t-t_0)F(t_0). \tag{24}$$

Για τη δεδομένη δύναμη τύπου παλμού θα πρέπει να θεωρήσουμε τρεις χρονικές περιόδους. Για $t < 0$ το ολοκλήρωμα είναι 0 αφού $\Theta(t-t_0) = 0$ για $t_0 > 0$ και $t < 0$. Για $\tau > t > 0$ το ολοκλήρωμα εξαιτίας της Θ έχει μη μηδενική συνεισφορά στο διάστημα $t > t_0 > 0$ ενώ η $F(t_0)$ είναι συνεχώς F_0 στο διάστημα αυτό. Τέλος στο διάστημα $t > \tau$ η $F(t_0)$ συνεισφέρει στο διάστημα $0 < t_0 < \tau$ αλλά η Θ έχει την τιμή 1 σε όλο το διάστημα $t > t_0 > 0$. Συγκεντρωτικά η γενική λύση θα είναι

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \begin{cases} 0 & \text{για } t < 0 \\ \frac{F_0}{m}\left(t^2 - \frac{t^2}{2}\right) = \frac{F_0}{2m}t^2 & \text{για } 0 \le t \le \tau \\ \frac{F_0}{m}\left(t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right) & \text{για } t > \tau. \end{cases} \tag{25}$$

Ελέγξτε ότι η απάντηση αυτή είναι ακριβώς η λυκειακή λύση (7).

Τελειώνοντας θα σημειώσουμε για άλλη μια φορά αυτό που είπαμε στην αρχή. Η διαφορά της αρκετά πολύπλοκης, ως προς την ιδέα της κατασκευής, λύσης (24) είναι ότι από πρακτικής άποψης είναι εξαιρετικά πιο απλή. Η λύση μέσω της συνάρτησης Green δίνεται από ένα ολοκλήρωμα, ενώ η λυκειακή για να κατασκευαστεί χρειάζεται δύο ολοκληρώματα! Όσο για τη συνάρτηση Green, δεν είναι και πολύ δύσκολη στην κατασκευή της. Πρόκειται για τη λύση του ομογενούς προβλήματος (χωρίς τη δέλτα) με τρόπο ώστε εκατέρωθεν της στιγμής που δρα η δέλτα να αλλάζει η κλίση κατά $1/m$.

Η χρήση των συναρτήσεων Green σε όλα τα γραμμικά προβλήματα, στηρίζεται ακριβώς στη γραμμική ιδιότητα των προβλημάτων: η πρόσθεση λύσεων είναι και πάλι λύση. Επειδή μάλιστα τα γραμμικά προβλήματα κατέχουν εξέχοντα ρόλο στη Φυσική, όχι τόσο για την ευκολία τους αλλά κυρίως για το ότι φαίνεται να εμφανίζονται στις πλέον θεμελιώδεις θεωρίες, (η ηλεκτρομαγνητική θεωρία, η κβαντομηχανική, ο αρμονικός ταλαντωτής στη Μηχανική είναι τέτοια γραμμικά προβλήματα) οι συναρτήσεις Green αποτελούν σοβαρό εργαλείο στην επίλυση προβλημάτων στα θεωρητικά αυτά πεδία.