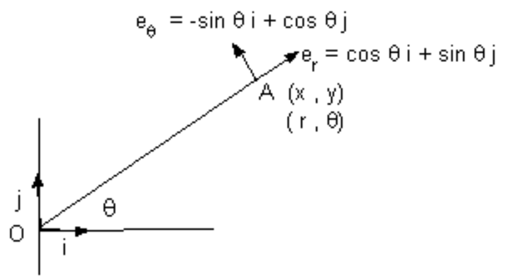
Κυκλική κίνηση-Οδογράφος



Έστω ότι έχουμε ένα σωματίδιο που κινείται σε μία κυκλική τροχιά ακτίνας l. Τότε αν ορίσουμε το επίπεδο της κίνησης ως το επίπεδο (x, y) και ορίσουμε τη Τρίτη διεύθυνση z του καρτεσιανού συστήματος τη κάθετη στο επίπεδο, όπως γνωρίζετε η θέση του σωματιδίου μπορεί να γραφεί: $x(t) = l\cos\theta$, $y(t) = l\sin\theta$, $z(t) = 0$, όπου η γωνία $\theta(t)$ είναι κάποια συνάρτηση του χρόνου. Η γωνιακή ταχύτητα ορίζεται ως η χρονική παράγωγος της γωνίας: $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$. Συνεπώς το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου είναι

$$\vec{r}(t) = l(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j})$$

όπου τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι μοναδιαία σταθερά διανύσματα στη διεύθυνση αντιστοίχως των αξόνων x και y. Η θέση του σωματιδίου μπορεί να γραφεί και ως

$$\vec{r}(t) = l\vec{e}_r, \qquad (1)$$

όπου $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. Το μέτρο της θέσης του σωματιδίου είναι σταθερό και ίσο με την ακτίνα του κύκλου l.
Επειδή τα διανύσματα $\vec{i}$ κα $\vec{j}$ είναι σταθερά η ταχύτητα είναι:

$$\vec{v}(t) = l\dot{\theta}(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j})$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{v}(t) = (l\dot{\theta})\vec{e}_\theta \qquad (2)$$

όπου το διάνυσμα $\vec{e}_\theta$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_\theta = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$, το οποίο είναι κάθετο στο ακτινικό διάνυσμα. Μπορούμε αμέσως να καταλήξουμε στην (2) διαφορίζοντας κατευθείαν την (1) παρατηρώντας ότι επειδή το $\vec{e}_r$ είναι μοναδιαίο τότε $\frac{d\vec{e}_r}{dt} \perp \vec{e}_r$ και $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{e}_\theta\dot{\theta}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι $v = l\dot{\theta}$. Όταν η κυκλική κίνηση είναι ομαλή η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή και το μέτρο της ταχύτητας είναι και αυτό σταθερό.

Ομοίως επειδή το $\vec{e}_\theta$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα τότε: $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \perp \vec{e}_\theta$ και ένας απλός υπολογισμός δίνει $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\vec{e}_r\dot{\theta}$. Οπότε διαφορίζοντας την (2) καταληγουμε ότι η επιτάχυνση είναι

$$\vec{a}(t) = (l\ddot{\theta})\vec{e}_\theta - (l\dot{\theta}^2)\vec{e}_r = (l\ddot{\theta})\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{l}\vec{e}_r$$

έχει δηλαδή δύο συνισταμένες μία συνισταμένη κατά την εφαπτομένη της κυκλικής τροχιάς που προκαλείται από τη γωνιακή επιτάχυνση του σωματιδίου $\ddot{\theta}$, η οποία λέγεται και επιτρόχια επιτάχυνση, και μία ακτινική συνιστώσα, τη κεντρομόλο επιτάχυνση , η οποία ισούται με $\frac{v^2}{l}$. Εάν το σωματίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική έχει μόνο ακτινική επιτάχυνση ίση με $l\omega^2$, όπου ω η σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Συνεπώς για να εκτελεί κυκλική κίνηση πρέπει να ασκείται στο σωματίδιο κεντρική δύναμη.

Όπως το άκρο του διανύσματος θέσης διαγράφει τη τροχιά του σωματιδίου έτσι και το άκρο του διανύσματος της ταχύτητας διαγράφει μία καμπύλη η οποία λέγεται οδογράφος. Για την ομαλή κυκλική κίνηση η οδογράφος είναι ένας κύκλος ακτίνας $l\omega$, όπου ω η σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Ένα κινητό που διαγράφει την οδογράφο έχει γωνιακή ταχύτητα πάλι ω, οπότε η ταχύτητα του κινητού θα είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου η οποία και θα είναι $\omega \times$(ακτίνα κύκλου οδογράφου) = $l\omega^2$.

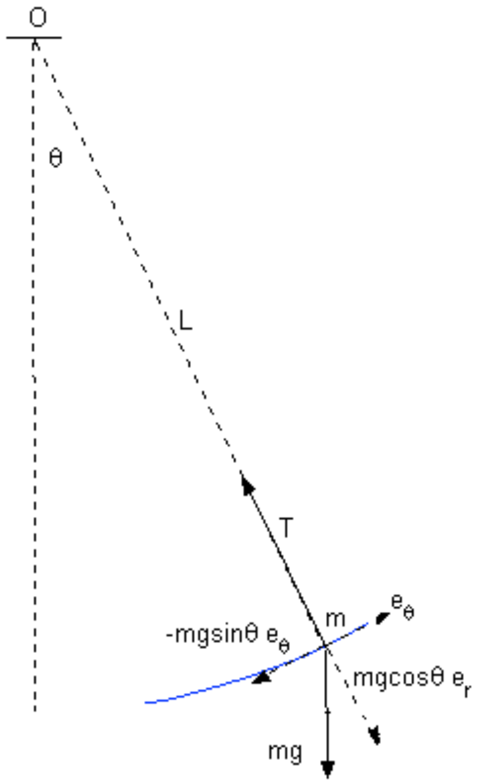
Το επίπεδο εκκρεμές

Θεωρείστε τώρα το επίπεδο εκκρεμές (βλ. σχήμα). Το σώμα κινείται επί του κύκλου και η θέση του προσδιορίζεται από τη γωνία θ που σχηματίζει το (θεωρούμενο ως αβαρές) νήμα με τη κατακόρυφο. Η ταχύτητα της μάζας δίνεται από $\vec{v} = \vec{e}_\theta L\dot{\theta}$, το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_\theta$ είναι κάθετο στην ακτίνα του κύκλου και έχει διεύθυνση κατά την εφαπτομένη του κύκλου και φορά ίδια με την αύξηση της γωνίας. Από την έκφραση της επιτάχυνσης βρίσκουμε την ακτινική και γωνιακή εξίσωση της κίνησης ως:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{T}{mL} - \frac{g}{L}\cos\theta$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις κίνησης εμπεριέχουν δύο άγνωστες συναρτήσεις του χρόνου την γωνία $\theta(t)$ και την άγνωστη τάση του νήματος $T(t)$. Για να προσδιορίσουμε τη κίνηση πρέπει να απαλείψουμε τις άγνωστες εσωτερικές δυνάμεις (τάσεις, αντιδράσεις) . Για να το επιτύχουμε όμως αυτό έχουμε κάνει παραδοχές για το χαρακτήρα των τάσεων. Π.χ. στο εκκρεμές έχουμε κάνει τη λογική παραδοχή ότι η τάση έχει διεύθυνση κάθετη στη κίνηση δηλαδή η τάση ασκείται κατά την ακτινική διεύθυνση. Βλέπουμε λοιπόν ότι για να προσδιορίσουμε τη κίνηση στο πλαίσιο της μηχανικής του Νεύτωνα σε ένα πολύπλοκο μηχανικό σύστημα πρέπει να απαλείψουμε τις εμφανιζόμενες εσωτερικές δυνάμεις και αφού τις απαλείψουμε να προσδιορίσουμε την συμπεριφορά του συστήματος όταν επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις. Επιπλέον για να επιτευχθεί αυτό το πρόγραμμα πρέπει να γίνουν ξεχωριστές παραδοχές για τη δομή των εσωτερικών δυνάμεων. Η απαλοιφή των εσωτερικών δυνάμεων είναι γενικά μια πολύπλοκη διαδικασία και για αυτό, ιστορικά τουλάχιστον, έγιναν προσπάθειες για την ανακάλυψη μίας διαφορετικής θεμελίωσης της μηχανικής στην οποία δεν υπεισέρχονται οι εσωτερικές δυνάμεις για το προσδιορισμό της κίνησης του μηχανικού συστήματος.
Στη περίπτωση του εκκρεμούς η απαλοιφή της τάσης είναι ιδιαιτέρως εύκολη. Η επιτρόχια εξίσωση δεν συμπεριλαμβάνει την άγνωστη τάση και συνεπώς μπορεί να λυθεί για τη θέση. Τότε η θέση μπορεί να αντικατασταθεί στη δεύτερη εξίσωση για να προσδιορισθεί η τάση.



Η λύση της επιτρόχιας κίνησης γράφεται γενικά υπό τη μορφή ελλειπτικών συναρτήσεων.

Για μικρές κινήσεις προσεγγίζουμε $\sin\theta \approx \theta$ και βρίσκουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί τότε ισόχρονες ταλαντώσεις με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Για μεγαλύτερα πλάτη η ταλάντωση παύει να είναι ισόχρονη και η περίοδος αυξάνεται με το πλάτος. Έχουμε ήδη υπολογίσει ότι η περίοδο σε δεύτερη προσέγγιση ως προς το μέγιστο γωνιακό πλάτος α της ταλάντωσης είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

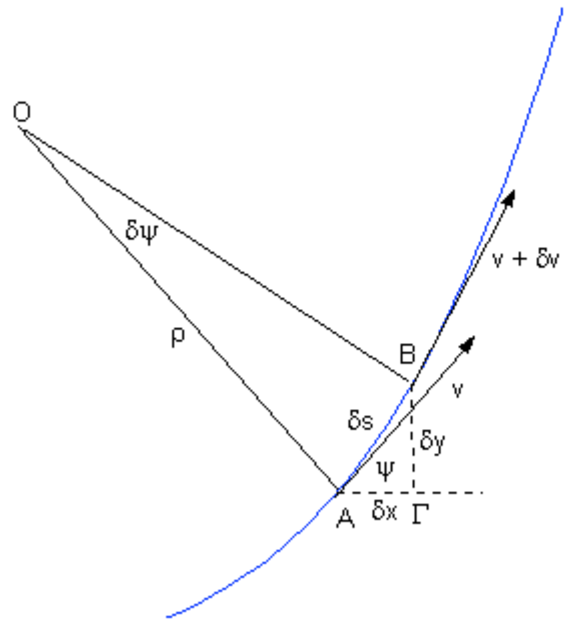
οπότε η περίοδος μεγαλώνει κατά $1/10^3$ όταν το πλάτος της ταλάντωσης γίνει $\alpha \approx 7^o 12'$.

Κίνηση σωματιδίου στο επίπεδο

Σωματίδιο κινείται πάνω στο επίπεδο. Η θέση του δίνεται από το διάνυσμα $\vec{r}(t)$. Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Το μέτρο της ταχύτητας είναι $v = \frac{ds}{dt}$, όπου $ds = \sqrt{dr \cdot dr}$ το διαφορικό μήκος τόξου. Αν λοιπόν θεωρήσουμε το μήκος τόξου ως παράμετρο που ορίζει τη τροχιά τότε η θέση του σωματιδίου πάνω στη τροχιά είναι $\vec{r}(s(t))$ και το διάνυσμα της ταχύτητας είναι

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_\psi$$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_\psi = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{i}\cos\psi + \vec{j}\sin\psi$ έχει τη κατεύθυνση της εφαπτομένης στη τροχιά και η γωνία ψ είναι η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και τον άξονα x. Από το σχήμα φαίνεται ότι $\cos\psi = \frac{dx}{ds}$ και $\sin\psi = \frac{dy}{ds}$ και συνεπώς οι γωνίες αυτές υπολογίζονται από την εξίσωση της τροχιάς.



Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση θεωρούμε το σωματίδιου σε δύο διαδοχικές θέσεις που απέχουν δt μονάδες χρόνου. Σε αυτό το απειροστό χρονικό διάστημα το μέτρο της ταχύτητας γίνεται $v+\delta v$ και η διεύθυνση της ταχύτητας αλλάζει κατά $\delta\psi$ (βλ. σχήμα). Παρατηρούμε από το διπλανό σχήμα ότι η επιτάχυνση έχει δύο συνιστώσες. Η επιτρόχια συνιστώσα (στη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς) δίδεται από:

$$a_\varepsilon = \lim_{\delta t\to 0}\frac{(v+\delta v)\cos\delta\psi - v}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta v}{\delta t} = \dot{v} = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

ενώ η κεντρομόλος συνιστώσα δίδεται από:

$$a_k = \lim_{\delta t\to 0}\frac{(v+\delta v)\sin\delta\psi}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0} v\frac{\delta\psi}{\delta t} = v\frac{ds}{dt}\frac{d\psi}{ds} = \frac{v^2}{\rho},$$

όπου ρ η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς. Παρατηρούμε από το σχήμα ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι αντίθετη στην κάθετο στην καμπύλη οπότε αν το κάθετο διάνυσμα στη τροχιά το συμβολίσουμε με $\vec{n}$ τότε η επιτάχυνση παίρνει τη μορφή

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{e}_\psi - \frac{v^2}{\rho}\vec{n}.$$

Οπότε αν γνωρίζουμε τη ταχύτητα και την επιτάχυνση μπορούμε να προσδιορίσουμε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς. Μπορείτε να δώσετε την έκφραση που δίνει την ακτίνα καμπυλότητας;

Έστω τώρα ότι έχουμε ένα «ελεύθερο» σωματίδιο που κινείται επί μίας επίπεδης καμπύλης π.χ. μία χάνδρα πάνω σε ένα σύρμα. Το σωματίδιο δεν είναι πραγματικά ελεύθερο, ασκούνται σε αυτό δυνάμεις από το σύρμα. Το θεωρούμε ελεύθερο επειδή δεν ασκούνται σε αυτό εξωτερικές δυνάμεις. Θεωρούμε ότι το σωματίδιο κινείται χωρίς τριβή, και συνεπώς η αντίδραση του σύρματος, $\vec{F}$, πρέπει να είναι κάθετη στην εφαπτομένη της τροχιάς αλλοιώτικα θα επιβράδυνε τη κίνηση. Συνεπώς θεωρούμε ότι $\vec{F}\cdot\vec{e}_\psi = 0$. Η εξίσωση κίνησης τότε είναι $\frac{d^2 s}{dt^2}\vec{e}_\psi - \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \vec{F}$. Η επιτρόχια εξίσωση της κίνησης είναι προφανώς $\frac{d^2 s}{dt^2} = 0$ και συνεπώς η χάντρα κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας.