Τι είναι τα διανύσματα

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει τις επιπτώσεις των νόμων του Νεύτωνα σε ένα μονοδιάστατο κόσμο. Θα αναπτύξουμε τώρα τη μηχανική στο χώρο των τριών διαστάσεων. Αποδεικνύεται όμως ιδιαιτέρως χρήσιμο και αποτελεσματικό να αναπτύξουμε τη θεωρία αυτή με τη βοήθεια του διανυσματικού λογισμού. Σκοπός της παρούσας διάλεξης είναι να γίνει κατανοητό το τι είναι τα διανύσματα και ποιος είναι ο λόγος που οι περισσότεροι φυσικοί νόμοι μπορούν να γραφούν σε διανυσματική μορφή.[1] Με το διανυσματικό λογισμό εισάγονται νέα σύμβολα στη φυσική και διαμορφώνεται έτσι μια νέα γλώσσα με την οποία μπορούμε να διατυπώσουμε τους φυσικούς νόμους. Μπορεί να σκέφτεστε ότι η εισαγωγή νέων συμβόλων είναι ένα τυπικό ή ακόμη και αισθητικό θέμα και δεν έχει ιδιαίτερη ουσία δεδομένου ότι τα ίδια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν και χωρίς τη χρήση των συμβόλων αυτών[2]. Αλλά μία τέτοια θεώρηση παραβλέπει το γεγονός ότι η κατάλληλη γλώσσα είναι ουσιαστικό συστατικό για την ανάπτυξη της σκέψης και τη διατύπωση των συλλογισμών. Σκεφθείτε για παράδειγμα τη σημασία της εισαγωγής του συμβόλου της παραγώγισης ή της ολοκλήρωσης στη ανάπτυξη της φυσικής. Η ανάπτυξη λοιπόν της κατάλληλης γλώσσας για τη περιγραφή των φυσικών νόμων είναι κλειδί για τη κατανόηση των φυσικών φαινομένων. Ο Gibbs μπορεί να ήταν κάπως υπερβολικός όταν έγραφε «*...ο ενδοιασμός μου για τα πλεονεκτήματα των διαφόρων συμβολισμών ήταν αυτό που με έκανε να αναβάλω τη δημοσίευση των αποτελεσμάτων της έρευνάς μου…. Δεν μπορούσα να προχωρήσω σε δημοσίευση διότι είχα την αίσθηση ότι υπήρχε κάτι ακατέργαστο στη χρήση των συμβόλων*», παρόλα αυτά όμως τα λόγια του τονίζουν μια σημαντική αλήθεια.

Ο λόγος που χρησιμοποιούμε τα διανύσματα είναι διότι με τον τρόπο αυτό οι φυσικοί νόμοι παίρνουν μια μορφή ανεξάρτητη από την επιλογή του συστήματος αναφοράς. Φυσικές προτάσεις που είναι εκφρασμένες με διανύσματα ισχύουν ανεξαρτήτως από την επιλογή του συστήματος αναφοράς.

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, κάποιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Οι συντεταγμένες ενός σωματιδίου δίνονται τότε από την τριάδα (x, y, z) και αν οι προβολές της δύναμης στους άξονες του καρτεσιανού συστήματος που επιλέξαμε είναι (F_x, F_y, F_z) τότε η κίνηση του σωματιδίου ικανοποιεί σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα τις τρεις εξισώσεις:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \qquad (1)$$

Λαμβάνουμε τώρα ένα νέο ορθογώνιο σύστημα αξόνων (x', y', z') το οποίο ας υποθέσουμε ότι έχει την ίδια αρχή. Μπορεί να δειχθεί ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο νέο σύστημα αξόνων στρέφοντας το αρχικό σύστημα γύρω από κάποιο άξονα κατά μία συγκεκριμένη γωνία[3]. Για να απλουστεύσουμε την επεξεργασία θεωρούμε

---

[1] Τα διανύσματα εισήχθησαν στη φυσική στις αρχές του 20ου αιώνα από τον Josiah Willard Gibbs [βλ. J. W. Gibbs, *Vector Analysis* (Yale University Press, New Haven, 1901)].

[2] Ο ίδιος ο Maxwell, κατασκεύασε τις φερώνυμες εξισώσεις δίχως τη χρήση διανυσμάτων!

[3] Αυτή η πρόταση είναι το συμπέρασμα του θεωρήματος του Euler. Μια γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος είναι η εξής: Σχηματίστε μια σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων O. O άξονας x τέμνει τη σφαίρα στο A, και ο άξονας y στο B. Γνωρίζοντας τα A και B προσδιορίζεται πλήρως το πρώτο καρτεσιανό σύστημα. Έστω ότι η νέα θέση του συστήματος αναφοράς δίδεται από τις αντίστοιχες τομές A΄ και B΄ οι οποίες και προσδιορίζουν το δεύτερο καρτεσιανό σύστημα. Φέρω τον μεγάλο κύκλο που ενώνει τα A και A΄ και λαμβάνω το διάμεσο σημείο A_1 του τόξου AA΄ και φέρω το μεσοκάθετο τόξο A_1X. Ομοίως φέρω το μέγιστο κύκλο που συνδέει τα B και B΄ και στο διάμεσο σημείο B_1 το μεσοκάθετο τόξο B_1Y. Τα τόξα A_1X και B_1Y τέμνονται στο σημείο Ω της σφαίρας. Τότε

ότι η στροφή γίνεται περί τον άξονα z και συνεπώς οι συντεταγμένες στα δύο συστήματα συνδέονται μέσω του (γραμμικού) μετασχηματισμού στροφής:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta\,,$$
$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta\,, \quad (2)$$
$$z' = z\,.$$

Ας υπολογίσουμε τις προβολές της δύναμης στο νέο σύστημα αξόνων. Αυτό απαιτεί τον προσδιορισμό των προβολών των δυνάμεων στους νέους άξονες που δεν μπορεί να γίνει παρά αν δεχθούμε την αρχή ότι οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα μπορούν να προστεθούν με τον κανόνα του παραλληλογράμμου[4]. Θα έχουμε τότε ότι $F_{z'} = F_z$ διότι ο άξονας z παραμένει ο ίδιος. Η δύναμη στον άξονα x' θα δίνεται από την προβολή στον άξονα αυτό της δύναμης F_x που ασκείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x και την προβολή της δύναμης F_y που ασκείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $y\cdot$ δηλαδή $F_{x'} = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta$. Ομοίως υπολογίζουμε την $F_{y''}$. Συνεπώς οι προβολές της δύναμης μετασχηματίζονται ως εξής:

$$F_{x'} = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta\,,$$
$$F_{y'} = F_y\cos\theta - F_x\sin\theta\,, \qquad (3)$$
$$F_{z'} = F_z\,.$$

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες της δύναμης μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και οι συντεταγμένες της θέσης. Το συμπέρασμα αυτό βασίζεται στις φυσικές παραδοχές της Νευτώνειας μηχανικής για τη φύση της δύναμης, που είναι αποτέλεσμα πειραμάτων και παρατηρήσεων.

Θέλουμε να διερευνήσουμε κατά πόσο οι νόμοι του Νεύτωνα συνεχίζουν να ισχύουν στο νέο σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή αν ισχύει ότι

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'}\,,\quad m\frac{d^2y'}{dt^2} = F_{y'}\,,\quad m\frac{d^2z'}{dt^2} = F_{z'}\,. \quad (4)$$

Διαφορίζοντας την (1) μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση στους νέους άξονες. Καταλήγουμε ότι

$$m\,d^2x'\big/dt^2 = m\,d^2x\big/dt^2\cos\theta + m\,d^2y\big/dt^2\sin\theta\,,$$
$$m\,d^2y'\big/dt^2 = m\,d^2y\big/dt^2\cos\theta - m\,d^2x\big/dt^2\sin\theta\,, \quad (5)$$
$$m\,d^2z'\big/dt^2 = m\,d^2z\big/dt^2\,.$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι ισχύει ο νόμος του Νεύτωνα (1) στο αρχικό σύστημα αναφοράς, το δεξιό μέλος της (5) δίνει, κάνοντας χρήση του κανόνα μετασχηματισμού της δύναμης (3):

το σύστημα (x', y', z') προκύπτει από το (x, y, z) με στροφή περί τον άξονα ΟΩ έτσι ώστε το Α να συμπέσει με το Α΄. Αποδείξτε ότι αυτή η κατασκευή είναι ορθή, δηλαδή αποδείξτε ότι όταν το Α συμπέσει με το Α΄, τότε και το Β θα συμπέσει με το Β΄.

[4] Αυτό είναι το πρώτο πόρισμα του Νεύτωνα. Ο Νεύτων ουσιαστικά προϋποθέτει ότι η δύναμη είναι «διανυσματικό» μέγεθος, δίχως να το γράφει εκπεφρασμένα, και ότι ισχύει η αρχή της ανεξαρτησίας των δυνάμεων.

$$m\,{d^2x'}\big/{dt^2} = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta = F_{x'},$$
$$m\,{d^2y'}\big/{dt^2} = F_y\cos\theta - F_x\sin\theta = F_{y'},$$
$$m\,{d^2z'}\big/{dt^2} = F_z = F_{z'}.$$

Συνεπώς ο νόμος του Νεύτωνα ισχύει και στο νέο σύστημα αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχει σημασία τι κατεύθυνση έχει το σύστημα αναφοράς. Οι νόμοι του Νεύτωνα θα ισχύουν σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς που έχει στραφεί ως προς το αρχικό. Άρα οι νόμοι του Νεύτωνα δεν εξαρτώνται από κάποια διεύθυνση στο χώρο, είναι δηλαδή ισοτροπικοί.

Αν συμβολίσουμε τώρα τις τρείς συνιστώσες της δύναμης με ένα σύμβολο $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ και της επιτάχυνσης με το ${d^2\vec{r}}\big/{dt^2} = ({d^2x}\big/{dt^2}, {d^2y}\big/{dt^2}, {d^2z}\big/{dt^2})$ ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί ως

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \qquad \text{(A)}$$

όπου με την ισότητα μεταξύ των συμβόλων εννοούμε ισότητα των συνισταμένων. Η πρόταση αυτή για να έχει έννοια απαιτεί ότι οι συνισταμένες του συμβόλου της δύναμης $\vec{F}$ και του συμβόλου της επιτάχυνσης *μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο* όταν οι καρτεσιανοί άξονες στραφούν· αλλοιώτικα δεν θα ισχύει ο ίδιος νόμος σε όλα τα συστήματα αναφοράς ανεξαρτήτως από την κατεύθυνση τους στο χώρο. Επειδή όμως η δύναμη εξ ορισμού μετασχηματίζεται όπως και οι συντεταγμένες της θέσης, καθώς επίσης η επιτάχυνση μετασχηματίζεται και αυτή όπως και οι συντεταγμένες της θέσης, ο νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί με την συμβολική μορφή (A). Ο νόμος εκπεφρασμένος με τα νέα σύμβολα παίρνει μορφή η οποία είναι ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς.

Γενικά, τριάδες αριθμών που έχουν την ιδιότητα να μετασχηματίζονται όπως και οι συντεταγμένες της θέσης στις στροφές λέγονται διανύσματα. Φυσικά μεγέθη που είναι αναλλοίωτα στις στροφές λέγονται *μονόμετρα* ή *βαθμωτά* μεγέθη. Στην περίπτωση του νόμου του Νεύτωνα η δύναμη είναι διάνυσμα επειδή μετά από διενέργεια πειραμάτων έγινε αντιληπτό ότι η δύναμη είναι διάνυσμα και αυτό αποτυπώθηκε ως νόμος· ενώ στην περίπτωση της επιτάχυνσης, η επιτάχυνση είναι διάνυσμα διότι μετασχηματίζεται όπως και οι μετατοπίσεις, όντας μέγεθος παράγωγο της θέσης. Είναι πολύ σημαντικό να συνειδητοποιήσετε ότι ο διανυσματικός χαρακτήρας των βασικών φυσικών ποσοτήτων είναι αποτέλεσμα πειράματος. Οι νόμοι της φύσης όταν γράφονται σε διανυσματική μορφή αποτυπώνουν τη βασική παραδοχή ότι το σύμπαν είναι ισοτροπικό δηλαδή δεν υπάρχει κάποια επιλεγμένη διεύθυνση.

Τις βασικές ιδιότητες των διανυσμάτων τις γνωρίζετε. Ήδη ορίσαμε τι σημαίνει ισότητα μεταξύ δύο διανυσμάτων. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι το άθροισμα των συνισταμένων δύο διανυσμάτων ορίζει ένα νέο διάνυσμα, το οποίο και ορίζουμε ως άθροισμα των διανυσμάτων. Επίσης αν πολλαπλασιάσουμε τις συνισταμένες ενός διανύσματος $\vec{a}$ με κάποιο αριθμό k τότε πάλι έχουμε ένα νέο διάνυσμα που το συμβολίζουμε $k\vec{a}$. Έτσι ορίζεται και η διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$. Αν οι συνισταμένες ενός διανύσματος είναι συναρτήσεις του χρόνου τότε η παράγωγος των συνισταμένων σχηματίζει πάλι ένα διάνυσμα το οποίο και λέγεται χρονική παράγωγος του διανύσματος. Έτσι αποδεικνύεται ότι η ταχύτητα $\vec{v} = d\vec{r}/dt = \dot{\vec{r}}$ και η επιτάχυνση $\vec{a} = d\vec{v}/dt = \ddot{\vec{r}}$ είναι διανύσματα.

Πρέπει να γίνει σαφές ότι κάθε τριάδα αριθμών δεν σχηματίζει διάνυσμα. Για να είναι διάνυσμα πρέπει να μετασχηματίζεται καταλλήλως Π.χ. εάν το $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ σχηματίζει διάνυσμα τότε η τριάδα $(a_x, 2a_y, 3a_z)$ δεν σχηματίζει διάνυσμα. Αντιθέτως η τριάδα $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ σχηματίζει ένα διανυσματικό τελεστή (αποδείξτε το). Ο τελεστής συμβολίζεται ως $\vec{\nabla}$ και λέγεται *ανάδελτα* ή *βαθμίδα*. Συνεπώς όταν δράσει ο τελεστής αυτός σε ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(\vec{r})$ τότε σχηματίζεται το διάνυσμα $\vec{\nabla}\phi$ που ονομάζεται βαθμίδα του πεδίου ϕ.

Πίνακες στροφής και ορθογώνιοι μετασχηματισμοί

Εάν οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{a}$ γραφούν διαδοχικά σε μορφή στήλης τότε όταν μεταβαίνουμε σε ένα νέο καρτεσιανό σύστημα αξόνων που προκύπτει από το αρχικό με στροφή περί τον άξονα z κατά γωνία θ τότε οι νέες συντεταγμένες του διανύσματος θα είναι $a' = \mathbf{R}_z(\theta)a$, όπου $\mathbf{R}_z(\theta)$ είναι ο πίνακας της στροφής περί τον άξονα z κατά γωνία θ:

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ο πίνακας $\mathbf{R}_z(\theta)$ είναι ορθογώνιος δηλαδή ότι $\mathbf{R}_z^T(\theta)\mathbf{R}_z(\theta) = \mathbf{I}$, όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας και $\mathbf{R}^T$ ο ανάστροφος του $\mathbf{R}$. Συνεπώς οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί αφήνουν αναλλοίωτη την απόσταση μεταξύ δύο σημείων δηλαδή αν η απόσταση δύο σημείων είναι το διάνυσμα $\Delta\vec{x}$ στο ένα καρτεσιανό σύστημα και $\Delta\vec{x}'$ στο μετασχηματισμένο σύστημα θα ισχύει ότι η ευκλείδια απόσταση πού δίνεται[5] από το $\mathbf{\Delta x}^T\mathbf{\Delta x}$ είναι αναλλοίωτο (θα επανέλθουμε αργότερα στο σημείο αυτό). Γενικότερα μπορεί να δειχθεί ότι κάθε μετασχηματισμός στροφής είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός [6].

Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύει εν μέρει και το αντίστροφο· δηλαδή ότι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι μετασχηματισμοί στροφής. Για να εξετάσουμε το θέμα αυτό ας περιοριστούμε στις 2 διαστάσεις και ας θεωρήσουμε τον ορθογώνιο μετασχηματισμό $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Επειδή ο μετασχηματισμός έχει ληφθεί ορθογώνιος τα 4 στοιχεία του πίνακα θα πρέπει να ικανοποιούν τις 3 σχέσεις: $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$ και συνεπώς ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει μία παράμετρο ελεύθερη. Άρα οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί σε δύο διαστάσεις προσδιορίζονται από μία παράμετρο. Αν θέσουμε $a = d = \cos\theta$ και $b = -c = \sin\theta$ τότε οι παραπάνω σχέσεις ικανοποιούνται και προκύπτει ο μετασχηματισμός της στροφής. Η ελεύθερη δε παράμετρος αναγνωρίζεται ως η γωνία στροφής. Αλλά δεν έχουμε εξαντλήσει όλες τις λύσεις. Επειδή ο $\mathbf{A}$ είναι ορθογώνιος θα πρέπει $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = 1$, και επειδή για κάθε πίνακα ισχύει ότι: $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$, θα ισχύει

[5] Εδώ το διάνυσμα γράφεται ως στήλη.
[6] Θα το δείξουμε αυτό αργότερα όταν γράψουμε τη γενική μορφή του μετασχηματισμού στροφής.

επίσης ότι η ορίζουσα κάθε ορθογωνίου πίνακα είναι ± 1. Παρατηρούμε ότι οι λύσεις που γράψαμε έχουν ορίζουσα μονάδα. Επομένως χρειάζεται να προσθέσουμε μια δεύτερη οικογένεια λύσεων με ορίζουσα -1 η οποία μπορεί να παραχθεί από το μετασχηματισμό της ανάκλασης $x \to x$ και $y \to -y$, ο πίνακας του οποίου είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, δρώντας πάνω στον προηγούμενο μετασχηματισμό της στροφής.

Συνεπώς οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί σε δύο διαστάσεις αναγνωρίζονται ως στροφές (ή γενικότερα ως στροφές με ανάκλαση). Τα ίδια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν για τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς σε τρεις διαστάσεις (πόσες ελεύθερες παράμετρες –γωνίες- απαιτούνται τώρα για το προσδιορισμό του μετασχηματισμού;).

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η στροφή του καρτεσιανού συστήματος που δίνεται από το μετασχηματισμό (2) αφήνει αναλλοίωτη την ποσότητα $x^2 + y^2 + z^2$ η οποία δεν είναι άλλη από την απόσταση του σημείου (x, y, z) από την αρχή των αξόνων. Δηλαδή κατά τις στροφές ισχύει ότι: $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Η ισχύς της πρότασης αυτής για κάθε στροφή είναι διαισθητικά προφανής διότι το μήκος ενός διαστήματος αναμένεται να είναι μονόμετρο μέγεθος, δηλαδή μέγεθος ανεξάρτητο από το σύστημα αναφοράς[7] και πράγματι μπορεί να αποδειχθεί ότι μια γενική στροφή, επειδή είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, δεν μεταβάλλει το μήκος των διαστημάτων. Ορίζουμε λοιπόν το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ως το μονόμετρο μέγεθος που δίνεται από :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Επειδή οι συντεταγμένες του $\vec{a}$ μετασχηματίζονται όπως και της θέσης κατά τις στροφές είναι προφανές ότι το μέτρο του διανύσματος είναι μία αναλλοίωτη ποσότητα, δηλαδή ένα μονόμετρο μέγεθος. Μπορούμε τότε να ορίσουμε το «γινόμενο» ενός διανύσματος με τον εαυτό του ως το $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ το οποίο όπως αποδείξαμε είναι μονόμετρο μέγεθος και άρα για τον υπολογισμό του αρκεί να επιλέξουμε ένα καρτεσιανό σύστημα για να υπολογίσουμε το αναλλοίωτο άθροισμα $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. Με τον τρόπο αυτό τα διανύσματα αποκτούν μέτρο. Μοναδιαίο διάνυσμα θα λέγεται το διάνυσμα που έχει μέτρο 1. Όταν έχουμε δύο διανύσματα μπορούμε να γενικεύσουμε το γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του και να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ως εξής:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Θα αποδείξουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζει πάλι ένα μονόμετρο μέγεθος. Γράφοντας το διανύσματα υπό μορφή στηλών έχουμε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$, οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι $\mathbf{a}'^T \mathbf{b}' = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ ύστερα από κάποιο μετασχηματισμό στροφής, **R**. Επειδή τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι διανύσματα οι συντεταγμένες τους μετασχηματίζονται ως εξής: $\mathbf{a}' = \mathbf{R}\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}' = \mathbf{R}\mathbf{b}$, συνεπώς το εσωτερικό

[7] Οι μετασχηματισμοί που αφήνουν το μήκος αναλλοίωτο λέγονται ορθογώνιοι μετασχηματισμοί και σχηματίζουν ομάδα. Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί και έχουν ορίζουσα ±1. Οι στροφές είναι η υποομάδα των ορθογωνίων μετασχηματισμών που έχουν ορίζουσα 1.

γινόμενο είναι αναλλοίωτο διότι $\mathbf{a}'^T\mathbf{b}' = \mathbf{a}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$, επειδή ο μετασχηματισμός $\mathbf{R}$ είναι ορθογώνιος. Μπορούμε να αποδείξουμε όμως την αναλλοιώτητα του εσωτερικού γινομένου άμεσα από την αναλλοιώτητα του μέτρου ενός διανύσματος, παρατηρώντας ότι τα $\vec{a}\cdot\vec{a}$, $\vec{b}\cdot\vec{b}$, και $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ είναι αναλλοίωτα στις στροφές και άρα αναλλοίωτο είναι και το $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) - \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b}$ το οποίο ισούται με το $2\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Για τον υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου αρκεί να λάβουμε ως άξονα x στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{a}$. Τότε $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x = ab\cos\theta$, όπου a, b τα μέτρα των αντιστοίχων διανυσμάτων και θ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ τους. Όταν δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι μηδέν τότε οι φορείς των διανυσμάτων είναι κάθετες και τα διανύσματα λέμε ότι είναι κάθετα.

Είναι σύνηθες να συμβολίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα με φορά τις διευθύνσεις των αξόνων (x,y,z) αντιστοίχως με $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$. Τότε επειδή $\vec{i}\cdot\vec{i} = 1$ κ.λ.π. καθώς και το εσωτερικό γινόμενο δύο διαφορετικών μοναδιαίων διανυσμάτων είναι μηδενικό π.χ. $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$, τότε μπορούμε να αναλύσουμε κάθε διάνυσμα ως εξής: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ και με τον τρόπο αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάνυσμα από τις συντεταγμένες του.

Όταν δύο διανύσματα $\vec{a}(t)$ και $\vec{b}(t)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου τότε θα έχουμε ότι $\dfrac{d(\vec{a}\cdot\vec{b})}{dt} = \dfrac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dfrac{d\vec{b}}{dt}$. Μια ειδική περίπτωση της σχέσης αυτής εμφανίζεται συχνά στη μηχανική: αν το $\vec{a} = \vec{b}$ τότε $2\vec{a}\cdot\dfrac{d\vec{a}}{dt} = \dfrac{d(\vec{a}\cdot\vec{a})}{dt} = \dfrac{d(a^2)}{dt} = 2a\dfrac{da}{dt}$, όπου με a συμβολίζουμε τώρα το μέτρο του διανύσματος. Προσέξτε ότι στη παραπάνω σχέση το αριστερό σκέλος είναι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ενώ το δεξιό σκέλος είναι το σύνηθες γινόμενο δύο αριθμών. Ένα χρήσιμο πόρισμα της σχέσης αυτής που θα συναντήσουμε επανηλειμένα είναι το ακόλουθο:

Εάν ένα διάνυσμα που εξαρτάται από μια μεταβλητή, t, έχει σταθερό μέτρο τότε το διάνυσμα είναι κάθετο στο διάνυσμα της παραγώγου του ως προς τη μεταβλητή.

Αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα για να περιγράψουμε διανυσματικά την κυκλική κίνηση.

Δύο λήμματα

1. *Εάν το $\vec{a}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα και η τριάδα (b_x, b_y, b_z) είναι τέτοια ώστε σε κάθε σύστημα αξόνων η ποσότητα $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ να είναι αναλλοίωτη (είναι ένα βαθμωτό μέγεθος) τότε το $\vec{b}$ είναι διάνυσμα.* Εδώ προϋποτίθεται ότι γνωρίζουμε πως να βρούμε τις συνιστώσες του $\vec{b}$ σε κάθε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

Απόδειξη: Έστω $\mathbf{R}$ μια στροφή των αξόνων τότε $\mathbf{a}' = \mathbf{R}\mathbf{a}$. Επειδή $\mathbf{a}'^T\mathbf{b}' = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$, θα έχουμε ότι $\mathbf{a}^T(\mathbf{R}^T\mathbf{b}' - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$. Επειδή το $\vec{a}$ είναι τυχαίο θα πρέπει $\mathbf{R}^T\mathbf{b}' = \mathbf{b}$ και επειδή ο $\mathbf{R}$ είναι ορθογώνιος $\mathbf{b}' = \mathbf{R}\mathbf{b}$, δηλαδή το $\vec{b}$ είναι διάνυσμα.

2. *Εάν η συνιστώσα κάποιου φυσικού μεγέθους σε τυχαία κατεύθυνση* $\vec{n}$, b_n, *είναι* $b_n = b_x n_x + b_y n_y + b_z n_z$, *όπου* b_i *οι συνιστώσες σε τρεις ορθογώνιους άξονες τότε το* $\vec{b}$ *είναι διάνυσμα.*

Απόδειξη: Απλοποιούμε το πρόβλημα εργαζόμενοι με στροφές περί τον άξονα z. Έστω ότι κατά τη στροφή ο άξονας $x \to x'$ και $y \to y'$. Λαμβάνουμε πρώτα ως $\vec{n}$ μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του άξονα x'. Τότε το $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, όπου θ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των x' και x και συνεπώς από την υπόθεση:

$$b_{x'} = b_x \cos\theta + b_y \sin\theta .$$

Ομοίως λαμβάνοντας το $\vec{n}$ μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του y' θα έχουμε

$$b_{y'} = -b_x \sin\theta + b_y \cos\theta .$$

Οπότε το $\vec{b}$ είναι πράγματι διάνυσμα.

Αθροιστική σύμβαση - Τανυστές

Ένα διάνυσμα προσδιορίζεται στον τριδιάστατο χώρο με τρεις αριθμούς, τις συντεταγμένες του ως προς κάποιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Συνήθως ονομάζουμε αυτές τις συνιστώσες, x, y, z συντεταγμένες του διανύσματος. Αντ' αυτού μπορούμε να τις αριθμούμε οπότε θα τις ονομάζουμε με τον αριθμό του άξονα που αντιστοιχεί στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη συντεταγμένη. Οπότε το διάνυσμα $\vec{a}$ προσδιορίζεται και από τις συντεταγμένες του a_i όπου $i = 1,2,3$ και η ισότητα $\vec{a} = \vec{b}$ γράφεται και ως $a_i = b_i$. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων γράφεται τότε: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$. Παρατηρούμε ότι ο δείκτης i εμφανίζεται δυο φορές και επειδή αθροίζεται θα μπορούσε να αντικατασταθεί με κάποιο άλλο γράμμα π.χ. θα μπορούσαμε να γράψουμε το εσωτερικό γινόμενο ισοδυνάμως ως $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j$. Οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες οι οποίοι εμφανίζονται σε άθροισμα γινομένων συντεταγμένων λέγονται εικονικοί δείκτες (dummy indices)[8]. Οι δείκτες που δεν επαναλαμβάνονται δηλώνουν τη συγκεκριμένη συντεταγμένη του διανύσματος. Στις περιπτώσεις επαναλαμβανόμενων δεικτών σε γινόμενα συντεταγμένων το σύμβολο του αθροίσματος μπορεί και να παραληφθεί και να συμφωνηθεί ότι όταν εμφανίζονται ζευγάρια δεικτών σε γινόμενα συνισταμένων διανυσμάτων οι δείκτες αυτοί είναι εικονικοί και εννοείται ότι αθροίζονται. Η σύμβαση αυτή λέγεται αθροιστική σύμβαση ή σύμβαση του Einstein. Με την αθροιστική σύμβαση το εσωτερικό γινόμενο γράφεται: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$. Χρειάζεται όμως προσοχή να μην επαναλαμβάνεται το ίδιο γράμμα δείκτη πάνω από δύο φορές διότι η έκφραση δεν έχει σαφές νόημα, π.χ. η έκφραση $a_i b_i c_i d_i$ στερείται νοήματος. Αν π.χ. θέλουμε να γράψουμε την έκφραση $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ με την αθροιστική σύμβαση πρέπει να την γράψουμε ως $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{c}) = a_i b_i b_j c_j$ κάνοντας χρήση δύο διαφορετικών εικονικών δεικτών.

---

[8] Dummy index σημαίνει κατά λέξη βουβός δείκτης ή δείκτης που υπάρχει μόνο κατ' όνομα. Θα μπορούσε να μεταφραστεί μη δηλωτικός δείκτης, ή δείκτης μπαλαντέρ, αλλά μάλλον πολύ πιο κομψή είναι η μετάφραση που αναφέρεται στο κείμενο.

Ένα άλλο παράδειγμα. Έστω **R** ένας μετασχηματισμός στροφής. Τότε με αθροιστική σύμβαση οι συντεταγμένες ενός διανύσματος στο μετασχηματισμένο σύστημα αναφοράς θα είναι: $a'_i = R_{ij} a_j$, όπου R_{ij} το στοιχείο της i γραμμής και της j στήλης του πίνακα στροφής.

Όπως όταν γράφουμε a_i εννοούμε τις τρεις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a}$, που συνιστούν τον πίνακα στήλη $(a_1, a_2, a_3)^T$, έτσι και όταν γράφουμε $a_i b_j$ εννοούμε τους 9 αριθμούς που σχηματίζονται από όλα τα δυνατά γινόμενα των συνισταμένων των δύο διανυσμάτων που συνιστούν τον 3×3 πίνακα με στοιχείο στην i γραμμή και j στήλη το $a_i b_j$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι 3^N αριθμοί $a_{i_1} b_{i_2} \cdots z_{i_N}$ σχηματίζουν έναν $\underbrace{3\times 3\times\cdots\times 3}_{N}$ υπερκύβο. Επειδή κάθε γράμμα του αντικειμένου αυτού μετασχηματίζεται ως διάνυσμα σε στροφές των αξόνων οι 3^N αυτοί αριθμοί μετασχηματίζονται σε στροφές των αξόνων με τον εξής τρόπο:

$$a'_{i_1} b'_{i_2} \ldots z'_{i_N} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \ldots R_{i_N j_N} a_{j_1} a_{j_2} \ldots z_{j_N}, \qquad (*)$$

χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση. Γενικότερα όταν οι 3^N αριθμοί που συμβολίζονται με $T_{i_1 \cdots i_N}$ μετασχηματίζονται σε στροφές των αξόνων σύμφωνα με τη σχέση (*) τότε λέγεται ότι σχηματίζουν ένα τανυστή N τάξης, και αποτελούν γενίκευση των διανυσμάτων τα οποία είναι στην ουσία τανυστές πρώτης τάξης.

Ένας πολύ χρήσιμος τανυστής δευτέρας τάξης είναι ο μοναδιαίος πίνακας (δείξτε ότι είναι τανυστής). Με δείκτες ο τανυστής αυτός συμβολίζεται με το δέλτα του Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Οι συνισταμένες ενός διανύσματος τότε μπορούν να γραφούν ως εξής: $a_i = \delta_{ij} a_j$, το δε εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφεί ως: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_j \delta_{ij}$. Ομοίως επειδή το ίχνος του μοναδιαίου πίνακα είναι 3 θα έχουμε ότι $\delta_{ii} = 3$.

Μια πολλή χρήσιμη ταυτότητα που εμφανίζεται συχνά όταν παραγωγίζουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών είναι η $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$. Ένα παράδειγμα: έχουμε δείξει ότι η βαθμίδα $\vec{\nabla}$ σχηματίζει ένα διάνυσμα με συνιστώσες τις $\partial/\partial x_i$ (βλ. Στ΄ σειρά ασκήσεων). Ας υπολογίσουμε τη βαθμίδα της ακτινικής απόστασης ενός σημείου από την αρχή των αξόνων $\vec{\nabla} r$, όπου $r = \sqrt{x_i x_i}$. Θα έχουμε:

$$\frac{\partial\sqrt{x_j x_j}}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{x_j x_j}} \frac{\partial(x_j x_j)}{\partial x_i} = \frac{1}{r} x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{1}{r} x_j \delta_{ij} = \frac{x_i}{r}$$

δηλαδή αποδείξαμε ότι $\vec{\nabla} r = \dfrac{\vec{r}}{r}$. Με άλλα λόγια η βαθμίδα της ακτινικής απόστασης είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα, που συμβολίζουμε και ως $\vec{e}_r$. Επίσης ορίζουμε τη Λαπλασιανή (Laplacian) ως τον τελεστή που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο: $\nabla^2 \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$. Είναι χρήσιμο για να εμπεδώσετε τα παραπάνω να δείξετε ότι για $r \neq 0$ έχουμε ότι $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$.

Ένας άλλος πολύ χρήσιμος τανυστής είναι ο *πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής* ε_{ijk} που είναι μηδέν εάν δύο τουλάχιστον δείκτες είναι ίσοι, +1 όταν οι i, j, k αποτελούν κυκλική μετάθεση των 1,2,3 (δηλαδή τα ijk είναι ένας από τους ακόλουθους συνδυασμούς123, 231, 312), και -1 άλλως (αποδείξτε ότι είναι τανυστής). Παρατηρήστε ότι ο $\varepsilon_{ijk}a_j b_k$ έχει συντεταγμένες $(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ δηλαδή οι συντεταγμένες δίνονται από την ορίζουσα του διανύσματος:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Ομοίως η ορίζουσα ενός πίνακα A_{ij} μπορεί να γραφεί ως $\varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$. Μια πολύ χρήσιμη ταυτότητα είναι η ακόλουθη που αφορά 81 αριθμούς:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

Για να αποδείξουμε αυτή τη σχέση πρέπει να εξετάσουμε περιπτώσεις. Αν $j = l$ και $k = m$ τότε και τα δύο *ε* έχουν το ίδιο πρόσημο ή είναι ίσα με μηδέν, ενώ αν $j = m$ και $k = l$ τα δύο *ε* έχουν αντίθετο πρόσημο ή είναι ίσα με μηδέν, από τις περιπτώσεις αυτές προκύπτουν τα πρόσημα των γινομένων των *δ*.