Διάλεξη 5η

Δυναμικό-Δυναμική ενέργεια

Σε προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε την περίπτωση μονοδιάστατης κίνησης σε πεδίο δυνάμεων εξαρτώμενο από τη θέση. Είδαμε ότι υπάρχει τότε μια ιδιόμορφη ποσότητα που διατηρείται: το άθροισμα της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας. Η δυναμική ενέργεια κατασκευάστηκε ως

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')dx' + V(x_0)\,.$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι η δυναμική ενέργεια χαρακτηρίζεται από μια αυθαιρεσία· μπορεί κανείς να προσδώσει όποια τιμή επιθυμεί στη σταθερά $V(x_0)$ δίχως να επηρεάσει καθόλου τη δυναμική του προβλήματος. Απλώς η επιλογή της τιμής τής δυναμικής ενέργειας σε κάποια θέση x_0 καθορίζει και την ολική ενέργεια του σωματιδίου. Συνήθως επιλέγεται η τιμή μηδέν είτε για κάποια συγκεκριμένη ξεχωριστή θέση του σωματιδίου (π.χ. στην επιφάνεια της Γης όταν θεωρείται το πεδίο βαρύτητας της Γης ομογενές), είτε σε άπειρη απόσταση από την αρχική του θέση όταν το πεδίο δυνάμεων εξασθενεί ολοένα και περισσότερο με την απόσταση (π.χ. σε άπειρη απόσταση από τη Γη αν ληφθεί υπόψη η ελάττωση της βαρυτικής δύναμης με την απόσταση από το κέντρο της Γης). Αντίστοιχη αυθαιρεσία, εξάλλου, ενυπάρχει και στην κινητική ενέργεια, αφού σύμφωνα με τη Γαλιλαϊκή συμμετρία οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι ισοδύναμο, όσον αφορά την περιγραφή της κίνησης ενός μηχανικού συστήματος. Η ενέργεια λοιπόν αν και δεν είναι κάποια μετρήσιμη ποσότητα, διατηρείται με την έννοια ότι η μεταβολή της κατά τη διάρκεια της κίνησης παραμένει μηδενική· οιαδήποτε μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ενός μηχανικού συστήματος θα συνοδεύεται από αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.

Η διατήρηση της ενέργειας ενός σωματιδίου κινούμενου σε μία διάσταση, οδηγεί αυτόματα στην εύρεση της τροχιάς του:

$$\frac{1}{2}mu^2 + V(x) = E \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(x)\big)} \Rightarrow t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x(t)} dx\sqrt{\frac{m}{2\big(E - V(x)\big)}},$$

πρόκειται, όπως λέγεται, για *ολοκληρώσιμο*[1] πρόβλημα. Πάλι, βέβαια, η τροχιά προσδιορίζεται πλήρως από δύο αρχικές συνθήκες, την αρχική θέση x_0 και την ενέργεια E του σωματιδίου. Η επιλογή δε του προσήμου, παραμένει αδιευκρίνιστη αφού η αντιστροφή του χρόνου αποτελεί συμμετρία των μηχανικών συστημάτων. Αν εμείς επιβάλουμε στο χρόνο να ρέει με μια συγκεκριμένη φορά, θα πρέπει να επιλέξουμε το πρόσημο εκείνο που κάνει το χρόνο, σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, να μεγαλώνει.

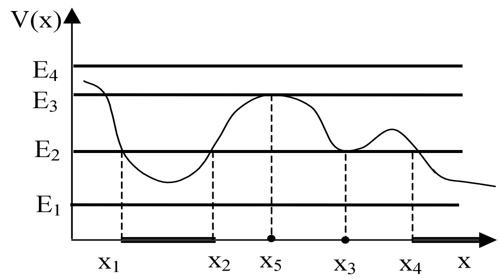
Η παραπάνω διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού μας επιτρέπει, προτού καν την επιλύσουμε για να προσδιορίσουμε την τροχιά του σωματιδίου, να καθορίσουμε, για κάθε τιμή της ενέργειας, βασικά χαρακτηριστικά της κίνησης: αν η κίνηση είναι φραγμένη, πού επιτρέπεται και πού δεν επιτρέπεται να βρίσκεται το σωματίδιο, πόσο γρήγορα κινείται, αν η κίνηση είναι περιοδική κλπ.

---

[1] Η ολοκληρωσιμότητα του προβλήματος δεν εμφανίζεται κατ' ανάγκη σε κίνηση σε περισσότερες από μία διαστάσεις, και δεν σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα προσδιορισμού της τροχιάς μπορεί να γραφεί σε κλειστή μορφή· μπορεί κάλλιστα να υπολογιστεί αριθμητικά.

Ας σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα δυναμικής ενέργειας τυχαίου σχήματος και ας υποθέσουμε ότι η κινητική ενέργεια σε κάποια στιγμή της κίνησης του σώματος είναι τέτοια ώστε η ολική ενέργεια να είναι E. Θα μπορούσε η ολική ενέργεια να είναι E_1; Φυσικά όχι· η κινητική ενέργεια είναι η διαφορά ολικής και δυναμικής ενέργειας και δεν μπορεί ποτέ να είναι αρνητική. Αν η ολική ενέργεια ήταν E_2; Το ότι η κινητική ενέργεια είναι θετική, $E_{\kappa\iota\nu} = E - V(x) \geq 0$, απαγορεύει την κίνηση σε περιοχές όπου $V(x) > E$. Για παράδειγμα το σωματίδιο δεν θα μπορέσει ποτέ να βρεθεί στην περιοχή αριστερά της θέσης x_1 του διαγράμματος, όπως δεν θα καταφέρετε ποτέ να περάσετε πίσω από έναν τοίχο, όσο γρήγορα και εάν τρέξετε καταπάνω του[2]. Αμέσως λοιπόν μπορεί κανείς να καθορίσει τις επιτρεπτές περιοχές κίνησης του σωματιδίου:

$$x_1 \leq x \leq x_2, x = x_3, x \geq x_4.$$



Το σωματίδιο θα κινείται σε μία μόνο από αυτές τις περιοχές, αδυνατώντας να διασχίσει τις ενδιάμεσες απαγορευμένες περιοχές. (α) Εάν η επιτρεπόμενη περιοχή είναι φραγμένη, το σωματίδιο θα ταλαντώνεται μεταξύ των ακραίων θέσεων, ή όπως ονομάζονται *σημεία αναστροφής* (turning points), στα οποίες θα μηδενίζεται η ταχύτητα αφού $E_{\kappa\iota\nu}(x_1) = E_{\kappa\iota\nu}(x_2) = 0$. Μεταξύ των θέσεων αυτών η ταχύτητα θα είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση της ενέργειας από το «πηγάδι» της δυναμικής ενέργειας. (β) Εάν η επιτρεπόμενη περιοχή είναι απλώς ένα σημείο το σωματίδιο θα παραμείνει στο σημείο αυτό (π.χ. το x_3) επ' άπειρο. (γ) Εάν η επιτρεπόμενη περιοχή είναι μη φραγμένη, τότε εφόσον η αρχική ταχύτητα κατευθύνεται προς την κατεύθυνση έλλειψης φράγματος το σωματίδιο θα συνεχίσει αυτή την κίνηση, ενώ αν η αρχική ταχύτητα κατευθύνεται προς κάποιο φράγμα, το σωματίδιο θα φτάσει στο σημείο αυτό, θα σταματήσει, θα αντιστρέψει τη φορά κίνησης και θα απομακρυνθεί στο άπειρο. Αν η ολική ενέργεια είναι E_3 τότε υπάρχουν τρεις δυνατές περιοχές κίνησης για το σωματίδιο: είτε αυτό θα κινείται στη φραγμένη περιοχή αριστερά του σημείου x_5, είτε στην ανοιχτή περιοχή δεξιά του σημείου x_5, είτε θα παραμένει ακίνητο στο σημείο x_5. Αν τέλος η ενέργεια είναι E_4, το σωματίδιο θα κινείται δίχως κανένα περιορισμό, είτε συνεχώς προς τα δεξιά, είτε συνεχώς προς τα αριστερά.

Έχοντας μάθει να διαβλέπουμε την κίνηση ενός σωματιδίου, κοιτάζοντας το διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας και γνωρίζοντας την ολική ενέργεια αυτού, ας υπολογίσουμε το χρόνο ταλάντωσης ενός σωματιδίου που είναι περιορισμένο σε κάποιο πηγάδι δυναμικής ενέργειας.

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{m}{2\left(E - V(x)\right)}} = \frac{T}{2},$$

όπου T η περίοδος ταλάντωσης και x_1, x_2 (με $x_1 < x_2$) τα όρια κίνησης του σωματιδίου, τα σημεία δηλαδή όπου $V(x_1) = V(x_2) = E$. Η ολοκλήρωση δίνει προφανώς τη μισή περίοδο αφού περιγράφει την κίνηση της μισής διαδρομής. Η

[2] Η εικόνα αυτή διαφοροποιείται στην κβαντική μηχανική. Παρά το γεγονός ότι η ενέργεια εξακολουθεί να έχει νόημα ως διατηρήσιμη ποσότητα, ένα σωματίδιο έχει *πιθανότητες* να βρεθεί σε κλασικά απαγορευμένες περιοχές. Ακόμη και εσείς θα μπορούσατε να περάσετε πίσω από έναν τοίχο, θα έπρεπε όμως να δοκιμάζετε αδιάκοπα για χρόνο πολύ μεγαλύτερο από …την ηλικία του Σύμπαντος!

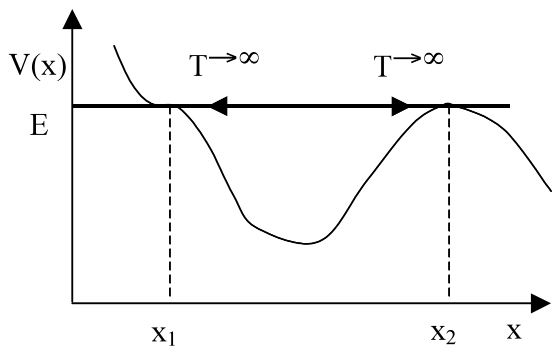
υπόλοιπη διαδρομή, από το x_2 στο x_1, πραγματοποιείται με αντίστροφη ταχύτητα και εύκολα φαίνεται ότι απαιτεί τον ίδιο χρόνο με το πρώτο μισό της διαδρομής. Η περιοδικότητα του φαινομένου κρύβει την αρχή λειτουργίας οποιουδήποτε μηχανικού ρολογιού. Αρκεί να σας δώσει κάποιος ένα πεδίο δυνάμεων στο οποίο εμπεριέχεται ένα σημείο ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας. Τοποθετήστε ένα σωματίδιο στην περιοχή του ελαχίστου και δώστε σε αυτό τέτοια κινητική ενέργεια ώστε η ολική του ενέργεια να το αναγκάζει να μένει δέσμιο στο αντίστοιχο πηγάδι. Κάθε διαδρομή του σωματιδίου προς τη μια κατεύθυνση θα μπορούσε να είναι το «τικ» του ρολογιού –το «τακ» θα αποτελείται από την εκτέλεση της διαδρομής με την αντίθετη φορά. Αν ρυθμίσετε μάλιστα έτσι τα πράγματα ώστε η περίοδος να είναι πολύ μικρή το ρολόι σας θα είναι πολύ ακριβές! (Δοκιμάστε να υπολογίσετε με τη βοήθεια του παραπάνω ολοκληρώματος την περίοδο ενός αρμονικού ταλαντωτή.)

Αυτό που θα πρέπει να αποδείξουμε είναι ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν απειρίζεται (προσέξτε ότι στα όρια ολοκλήρωσης ο παρονομαστής της ολοκληρωτέας ποσότητας μηδενίζεται!) Ας υποθέσουμε ότι πολύ κοντά στο σημείο τομής της ευθείας που καθορίζει το ενεργειακό επίπεδο, και του διαγράμματος της δυναμικής ενέργειας, η δυναμική ενέργεια περιγράφεται από τη σχέση (οι δύο γραμμές τέμνονται υπό γωνία)

$$V(x) \xrightarrow[x \cong x_1]{} E - a(x - x_1),$$

όπου $a > 0$ αν το x_1 είναι κάτω φράγμα της επιτρεπόμενης περιοχής και αντίστροφα αν είναι άνω φράγμα. Το πιθανό προβληματικό κομμάτι του ολοκληρώματος είναι $\int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{ax}} \cong \sqrt{\frac{a}{x_1}}\varepsilon$, το οποίο είναι πεπερασμένο. Επομένως μπορούμε να αισθανόμαστε σίγουροι για το ότι η ταλάντωση θα διαρκέσει πεπερασμένο χρόνο.

Εκτός εάν η υπόθεση που κάναμε δεν ευσταθεί. Δηλαδή, αν η ευθεία της ενέργειας και η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας δεν τέμνονται υπό γωνία στο σημείο x_1 αλλά εφάπτονται. Τότε, $V(x) \xrightarrow[x \cong x_1]{} E - a(x - x_1)^k$, όπου $k \geq 2$. Το ολοκλήρωμα κοντά στο σημείο x_1 απειρίζεται (δείξτε το) οπότε είτε χρειάζεται άπειρο χρόνο για να φύγει το σωματίδιο από το σημείο αυτό (μάλλον θα ήταν λογικότερο να πούμε ότι το σωματίδιο θα μείνει για πάντα εκεί), είτε αν κινείται προς το σημείο αυτό θα χρειαστεί άπειρο χρόνο για να το φτάσει (λόγω συμμετρίας του 2ου νόμου του Νεύτωνα σε αντιστροφή του χρόνου).



Υπάρχουν δύο είδη σημείων σε ένα διάγραμμα δυναμικής ενέργειας που αξίζει να εξετάσουμε ξεχωριστά: ο «πυθμένας» ενός «πηγαδιού δυναμικής ενέργειας» και η «κορυφή» ενός «όρους δυναμικής ενέργειας». Όπως είπαμε παραπάνω και τα δύο σημεία αποτελούν θέσεις ισορροπίας. (Θυμηθείτε ότι όταν η ολική ενέργεια ακουμπάει στα σημεία αυτά η ταχύτητα του σωματιδίου μηδενίζεται εκεί, και στη μεν πρώτη περίπτωση το σωματίδιο μένει παγιδευμένο στο σημείο αυτό, στη δε άλλη χρειάζεται άπειρο χρόνο για να απομακρυνθεί έστω και λίγο από το σημείο αυτό.) Αν όμως η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι λίγο μεγαλύτερη; Προφανώς στην περίπτωση του πυθμένα το σωματίδιο θα ταλαντώνεται γύρω από το σημείο αυτό, ενώ στην περίπτωση της κορυφής θα απομακρυνθεί από το σημείο αυτό είτε προς τη μια κατεύθυνση είτε προς την αντίθετη εφόσον του επιτρέπεται (για παράδειγμα στο διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας του παραπάνω σχήματος το σωματίδιο θα μπορέσει να κινηθεί μόνο προς τα δεξιά). Λέμε λοιπόν ότι τα τοπικά ελάχιστα της δυναμικής ενέργειας, όπου $\frac{d^2V(x)}{dx^2} > 0$, αποτελούν σημεία *ευσταθούς ισορροπίας*, ενώ τα τοπικά μέγιστα, όπου $\frac{d^2V(x)}{dx^2} < 0$, αποτελούν σημεία *ασταθούς ισορροπίας*. Σκεφθείτε με τη βοήθεια ενός παραδείγματος, τι συμβαίνει όταν ένα σημείο είναι σημείο καμπής.

Αν επιχειρήσουμε να μελετήσουμε την ταλάντωση γύρω από ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας θα διαπιστώσουμε για άλλη μια φορά πόσο σημαντική και βασική είναι η μελέτη του αρμονικού ταλαντωτή. Ας υποθέσουμε ότι η ενέργεια ενός σωματιδίου υπερβαίνει την τιμή της δυναμικής ενέργειάς του στον «πυθμένα» του πηγαδιού ελάχιστα: $E \cong V(x_0)$. Όντας ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας το σημείο x_0 και αναπτύσσοντας τη δυναμική ενέργεια γύρω από το σημείο αυτό καταλήγουμε στην ακόλουθη μορφή: $V(x \cong x_0) = V(x_0) + V''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots$, όπου $V''(x_0) \geq 0$. Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $V''(x_0) \neq 0$ (η περίπτωση $V''(x_0) = 0$ αποτελεί μια ειδική περίπτωση η οποία δεν είναι δυνατόν να εμφανίζεται στη φύση αφού ένα φυσικό μέγεθος δεν μπορεί να έχει τιμή ίση με κάποιον συγκεκριμένο ρητό αριθμό), μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδο ταλάντωσης γύρω από το σημείο αυτό:

$$T = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2}V''(x_0)}} = 2\sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}.$$

(Τα σημεία x_1, x_2 στα όρια του πρώτου ολοκληρώματος είναι τα όρια κίνησης, δηλαδή, οι ρίζες του παρονομαστή.) Είναι αξιοσημείωτο ότι η περίοδος ταλάντωσης εξαρτάται *μόνο* από τη μάζα του σωματιδίου και από το πόσο «οξύς» είναι ο πυθμένας της δυναμικής ενέργειας και *όχι* από την ενέργεια του σωματιδίου (με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολύ κοντά στον πυθμένα), ακριβώς, δηλαδή, ότι συμβαίνει και με τον αρμονικό ταλαντωτή. Εξάλλου, το ανάπτυγμα της δυναμικής ενέργειας που γράψαμε παραπάνω δεν είναι τίποτε άλλο από τη δυναμική ενέργεια ελατηρίου με σκληρότητα $V''(x_0)$ και η περίοδος στην οποία καταλήξαμε είναι η περίοδος ταλάντωσης ενός ελατηρίου αυτής της σκληρότητας, στο άκρο του οποίου είναι τοποθετημένο το σωματίδιο. Όταν, λοιπόν, μελετάμε μηχανικά (και όχι μόνο) συστήματα κοντά σε κατάσταση ευσταθούς[3] ισορροπίας (αυτό άλλωστε κάνουμε πάρα πολύ συχνά στη μελέτη της φύσης), μελετάμε στην ουσία έναν ή περισσότερους αρμονικούς ταλαντωτές με όλα τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των ταλαντωτών που είδαμε στο σχετικό κεφάλαιο.

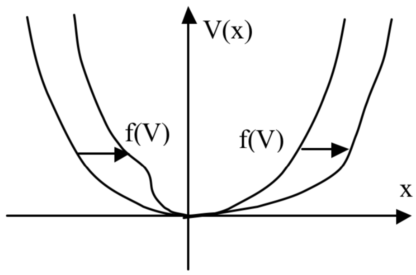
Είναι άραγε ο αρμονικός ταλαντωτής, η μοναδική περίπτωση μορφής δυναμικής ενέργειας που οδηγεί σε ισόχρονες ταλαντώσεις; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό ας παραμορφώσουμε την καμπύλη δυναμικής ενέργειας ενός αρμονικού ταλαντωτή όπως στο διπλανό σχήμα. Δηλαδή, ας μετατοπίσουμε και το

[3] Συστήματα σε κατάσταση ασταθούς ισορροπίας δεν θα μπορούσαμε να παρατηρούσαμε στη φύση γιατί η παραμικρή διαταραχή θα απομάκρυνε τα συστήματα αυτά πολύ γρήγορα από την κατάσταση της ισορροπίας.

αριστερό και το δεξιό σκέλος της παραβολής κατά ένα διάστημα που εξαρτάται από την τιμή της δυναμικής ενέργειας που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό: $x \to \tilde{x} = x + f(V(x))$. Ο χρόνος κίνησης κοντά σε ένα σημείο $\tilde{x}$ θα είναι:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{d\tilde{x}}{\sqrt{E - V(\tilde{x})}} = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\left(1 + \dfrac{df}{dV}V'(x)\right)dx}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

Εφόσον όμως $V'(x) = -V'(-x)$, λόγω συμμετρι-κότητας της καμπύλης $V(x)$, το συνολικό χρονικό διάστημα που ξοδεύει το σωμάτιο κατά την κίνησή του στην παραμορφωμένη καμπύλη δυναμικής ενέργειας, στις δύο περιοχές όπου η δυναμική ενέργεια είναι V είναι $dt_{αριστ} + dt_{δεξ} = \sqrt{2m}\dfrac{dx}{\sqrt{E - V}}$, ανεξάρτητο δηλαδή της παραμόρφωσης $f(V)$ της καμπύλης. Συνεπώς, η ταλάντωση στο παραμορφωμένο πηγάδι δυναμικού θα είναι ισόχρονη, όπως και στον αρμονικό ταλαντωτή! Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε περί ανεξαρτησίας της περιόδου ταλάντωσης από την παραμόρφωση της αρχικής καμπύλης ισχύει για κάθε μορφή συμμετρικού πηγαδιού· απλώς, η ιδιότητα του ισόχρονου, ανεξαρτήτως της ολικής ενέργειας, ανήκει μόνο στο πηγάδι δυναμικής ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή και σε όλα τα πηγάδια που πηγάζουν από αυτό με τον παραπάνω μετασχηματισμό.



Διάγραμμα φάσης