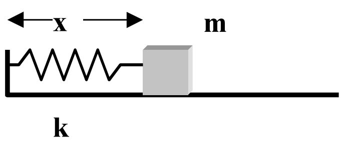
Διάλεξη 4η

Αρμονικός ταλαντωτής, σημείο ισορροπίας,
περιοδική κίνηση, ισόχρονη ταλάντωση.

Ο αρμονικός ταλαντωτής είναι από το πλέον σημαντικά συστήματα στη Φυσική. Δεν θα ήταν υπερβολή αν λέγαμε ότι είναι το σημαντικότερο φυσικό σύστημα

Ένα παράδειγμα αρμονικού ταλαντωτή που ήδη γνωρίζετε είναι μία μάζα συνδεδεμένη σε ένα γραμμικό ελατήριο η οποία κινείατι σε οριζόντιο δάπεδο δίχως να ασκείται καμία δύναμη τριβής μεταξύ του δαπέδου και του σώματος (βλ. σχήμα). Το ελατήριο λέγεται γραμμικό διότι η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα είναι ευθέως ανάλογη της επιμήκυνσης, x, του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Η εξίσωση κίνησης τότε της μάζας είναι $m\ddot{x} = F(x) = -kx$, όπου k η σταθερά του ελατηρίου (ή άλλως σταθερά του Hooke).



Το $x = 0$ είναι σημείο ισορροπίας. Στα σημεία ισορροπίας η δύναμη μηδενίζεται και αν το σώμα βρεθεί σε ένα σημείο ισορροπίας με μηδενική ταχύτητα τότε θα παραμείνει σε αυτό για πάντα. Για αυτό το λόγο τα σημεία ισορροπίας λέγονται και σταθερά σημεία (fixed points). Αν η μάζα μετατοπισθεί λίγο από το σημείο ισορροπίας τότε η δύναμη που ασκείται από το ελατήριο επαναφέρει το σώμα στο σημείο ισορροπίας, στο οποίο επιστρέφει με *μη μηδενική* ταχύτητα, οπότε και συνεχίζει την κίνησή του μέχρις ότου ακινητοποιηθεί εκ νέου και επιστρέψει και πάλι στο αρχικό σημείο.

Το σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση, υπάρχει δηλαδή ένας ελάχιστος χρόνος T ύστερα από τον οποίο η θέση του σώματος παίρνει την ίδια τιμή, δηλαδή,

$$x(t+T) = x(t), \text{ για κάθε χρόνο } t,$$

που με τη σειρά του συνεπάγεται ότι και η ταχύτητα και όλες οι ανώτερες χρονικές παραγωγοι είναι επίσης περιοδικές συναρτήσεις.

Επειδή η κίνηση της μάζας με αρχική θέση $x(0)$ και αρχική ταχύτητα $v(0)$ δίνεται, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς, από την έκφραση:

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t,$$

όπου $\omega = \sqrt{k/m}$ η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης (σε μονάδες rad/s) η κίνηση είναι πράγματι περιοδική με περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ ή $T = \dfrac{1}{\nu}$ όπου $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ η συχνότητα της ταλάντωσης (σε μονάδες κύκλοι/s ή Hz). Ισοδύναμα η θέση της μάζας δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = a\cos(\omega t + \varphi),$$

όπου το πλάτος της ταλάντωσης είναι $a = \sqrt{x(0)^2 + \dfrac{v(0)^2}{\omega^2}}$ και η φάση $\varphi = tan^{-1}\left(\dfrac{v(0)}{\omega x(0)}\right)$.

Παρατηρήστε ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες! ‘Όταν η περίοδος της ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη από το πλάτος τότε η ταλάντωση λέγεται *ισόχρονη*.

Η σημασία του αρμονικού ταλαντωτή

Για ποιο λόγο ο αρμονικός ταλαντωτής έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία; Θα μπορούσε κάποιος μάλιστα να υποστηρίξει ότι η παραδοχή της γραμμικής εξάρτησης της δύναμης από την απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας είναι περιορισμένης ισχύος. Το συμπέρασμα αυτό θα ήταν όμως λάθος. Υποθέστε ότι σε ένα σώμα ασκείται κάποια δύναμη $F(x)$ και ότι το x_0 είναι κάποιο σημείο ισορροπίας, δηλαδή $F(x_0)=0$. Πράγματι αν το σώμα βρεθεί σε αυτό το σημείο δίχως ταχύτητα θα παραμείνει σε αυτό. Ας υποθέσουμε όμως ότι η ισορροπία του σώματος έχει με κάποιο τρόπο στιγμιαία διαταραχθεί και το σώμα βρίσκεται τώρα σε κάποια θέση, x, πλησίον του σημείου ισορροπίας. Τότε η δύναμη που ασκείται στο σώμα μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor ως εξής:

$$F(x)=(x-x_0)F'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}F''(x_0)+\cdots$$

(το ότι δεν υπάρχει σταθερός όρος στο ανάπτυγμα οφείλεται στο ότι το x_0 είναι σημείο ισορροπίας· οι τόνοι υποδηλούν παραγώγιση ως προς x). Αν η πρώτη παράγωγος της δύναμης στο σημείο ισορροπίας δεν μηδενίζεται και η διαταραγμένη θέση του σώματος (καθώς και η ταχύτητα) είναι μικρή τότε σε πάρα πολύ καλή προσέγγιση η εξίσωση κίνησης του σώματος δίνεται από την εξίσωση:

$$m\ddot{\xi}=-K\xi$$

όπου $\xi=x-x_0$ είναι η διαταραχή από το σημείο ισορροπίας και $K=-F'(x_0)$, που είναι η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή αν η σταθερά K που χαρακτηρίζεται από το σημείο ισορροπίας είναι θετική. Όταν η σταθερά K είναι αρνητική τότε σχεδόν όλες οι αρχικές συνθήκες (εκτός από μόνο μία ειδική αρχική συνθήκη) οδηγούν σε εκθετική απόκλιση του σώματος από το σημείο ισορροπίας. Σε αυτή την περίπτωση το σημείο ισορροπίας λέγεται ασταθές. Επειδή τότε η διαταραχή δεν μπορεί να συνεχίζει να λαμβάνεται ως μικρή είναι αναγκαίο για τη περαιτέρω εξέλιξη της διαταραχής να ληφθούν υπόψη και οι όροι ανώτερης τάξης στο ανάπτυγμα της δύναμης, οι μη γραμμικοί όροι.

Στη φύση τα πλέον σύνθετα συστήματα, υπό την επίδραση των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτά, βρίσκονται σε μια κατάσταση ισορροπίας η οποία είναι πραγματοποιήσιμη. Υπό την έννοια αυτή, το σημείο αυτό ισορροπίας που αφορά την κατάσταση της ύλης είναι ευσταθές ($K>0$) και μικρές διαταραχές έχουν την ιδιότητα να παραμένουν μικρές (αν αυτό δεν ίσχυε μια οσοδήποτε μικρή διαταραχή θα απομάκρυνε το σύστημα από την κατάσταση ισορροπίας και επομένως αυτή δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί από τη φύση), με αποτέλεσμα με πολύ μεγάλη ακρίβεια οι διαταραχές να υπακούουν στις εξισώσεις του αρμονικού ταλαντωτή. Για αυτόν το λόγο αναμένουμε ο αρμονικός ταλαντωτής να εμπεριέχει την ουσία των πλέον διαφορετικών φυσικών φαινομένων, από την απορρόφηση ακτινοβολίας από μόρια ή κρυσταλλικά πλέγματα μέχρι την απορρόφηση ακτίνων γ από πυρήνες, και από τις ταλαντώσεις του ήλιου και την απόκριση των ωκεανών στην παλιρροϊακή δύναμη της σελήνης μέχρι την κβαντική θεωρία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Με την μέθοδο αυτή των μικρών διαταραχών μπορούμε να διερευνήσουμε το κατά πόσο μια κατάσταση ισορροπίας είναι πραγματοποιήσιμη ή ακόμα και κατά πόσο μια κατάσταση ισορροπίας θα παραμείνει εάν με κάποιο εξωτερικό τρόπο μεταβάλουμε κάποια παράμετρο του συστήματος. Γενικά περιμένουμε όταν το K γίνει αρνητικό η ισορροπία να διαλυθεί και να οδηγηθούμε σε κάποια άλλη κατάσταση. Η πρόβλεψη του πότε γίνεται αυτό έχει προφανώς ιδιαίτερη σημασία.

Εκθετικές λύσεις ως συνέπεια της γραμμικότητας και της αναλλοιότητας των εξισώσεων σε χρονική μετάθεση

Η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή είναι γραμμική. Με τον *όρο γραμμική εξίσωση* εννοούμε ότι αν εάν η $x_1(t)$ και η $x_2(t)$ είναι λύσεις της δυναμικής εξίσωσης που ικανοποιούν ορισμένες αρχικές συνθήκες τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

είναι λύση της δυναμικής εξίσωσης με τον ανάλογο συνδυασμό αρχικών συνθηκών. Με άλλα λόγια η υπέρθεση δύο τροχιών είναι δυνατή τροχιά του συστήματος.

Έχουμε δει ότι η κίνηση ενός σωματιδίου προσδιορίζεται από την αρχική του θέση και ταχύτητα. Δεδομένης της αρχικής θέσης και της αρχικής ταχύτητας προκύπτει μια μοναδική εξέλιξη της κίνησης του σώματος, μια μοναδική τροχιά (η υπόθεση ότι η τροχιά είναι μοναδική και ορίζεται για όλους τους χρόνους απαιτεί όπως ήδη ξέρετε από την Ανάλυση, ορισμένες συνθήκες συνεχείας και χρονικής εξάρτησης της δύναμης. Αυτές οι συνθήκες θεωρείται ότι ικανοποιούνται από τα φυσικά συστήματα που μελετούμε). Επειδή κάθε αρχική συνθήκη μπορεί να κατασκευασθεί από την αρχική θέση και ταχύτητα, κάθε τροχιά του σώματος με αρχική θέση $x(0)$ και αρχική ταχύτητα $v(0)$ μπορεί να γραφεί λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης ως $x(0)x_1(t) + v(0)x_2(t)$, όπου $x_1(t)$ η τροχιά του σώματος με αρχική θέση 1 και ταχύτητα 0 και $x_2(t)$ η τροχιά με αρχική θέση 0 και ταχύτητα 1. Δηλαδή, όπως ήδη γνωρίζετε, η γραμμικότητα των εξισώσεων επιτρέπει τον προσδιορισμό όλων των λύσεων από γραμμικό συνδυασμό κάποιας βάσης λύσεων. Οι λύσεις δηλαδή σχηματίζουν ένα διανυσματικό χώρο που έχει διάσταση ίση με τον αριθμό των αρχικών συνθηκών που απαιτούνται για τον προσδιορισμό της τροχιάς.

Οι γραμμικές εξισώσεις που περιγράφουν τις διαταραχές κοντά σε ένα σημείο ισορροπίας είναι όπως είδαμε μια πολύ καλή προσέγγιση. Γνωρίζουμε παραδείγματος χάριν, ότι οι εξισώσεις που διέπουν τη διάδοση των ηχητικών και των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε υλικά μέσα είναι κατά προσέγγιση γραμμικές και συνεπώς η υπέρθεση τέτοιων κυμάτων είναι λύση των κυματικών εξισώσεων. Στην κλασσική μηχανική, όμως, τα περισσότερα προβλήματα που θα λύσουμε δεν είναι γραμμικά π.χ. η κίνηση ενός πλανήτη γύρω από τον ήλιο, η ανάκλαση μιας μπάλας στο δάπεδο (δείξτε σε αυτή τη περίπτωση ότι η υπέρθεση δύο κινήσεων δεν αποτελεί κίνηση). Η γραμμικότητα επανέρχεται στην κβαντική μηχανική, στην οποία εξ' όσων γνωρίζουμε, η γραμμικότητα δεν είναι προσέγγιση, αλλά καθεαυτός νόμος της φύσης. Σε όσα πειράματα έχουν γίνει μέχρι σήμερα με κβαντικά κύματα ύλης δεν έχει διαπιστωθεί ίχνος μη γραμμικότητας!

Επανερχόμαστε και πάλι στον αρμονικό ταλαντωτή για να εξετάσουμε μία σημαντική επίπτωση της γραμμικότητας της εξίσωσης που διέπει τη δυναμική του. Επειδή η δυναμική εξίσωση έχει πραγματικούς συντελεστές, όπως συμβαίνει άλλωστε και σε όλες τις φυσικές εξισώσεις, μπορούμε να επεκτείνουμε τις λύσεις αυτού του προβλήματος στο μιγαδικό πεδίο και τότε λόγω της γραμμικότητας του προβλήματος το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής λύσης είναι πάλι λύσεις της δυναμικής εξίσωσης διότι αν $z(t)$ είναι λύση της δυναμικής εξίσωσης και η συζυγής της είναι λύση. Παραδείγματος χάριν, γνωρίζετε ότι η $\exp(i\omega t)$ είναι μιγαδική λύση του αρμονικού ταλαντωτή. Λόγω της γραμμικότητας άλλες λύσεις θα είναι η $\Re(z(t)) = \cos(\omega t)$ (το πραγματικό μέρος της μιγαδικής λύσης) και η $\Im(z(t)) = \sin(\omega t)$ (το φανταστικό μέρος της μιγαδικής λύσης). Η μετάβαση στο μιγαδικό πεδίο έχει πολλές φορές πλεονεκτήματα, όπως θα δούμε παρακάτω. Μπορούμε λοιπόν να λύσουμε ένα πρόβλημα στο μιγαδικό επίπεδο και να ανακτήσουμε στο τέλος τη φυσικά πραγματοποίησιμη λύση λαμβάνοντας το πραγματικό μέρος της λύσης. Θα δείτε ένα τέτοιο παράδειγμα όταν μελετήσουμε την επίδραση εξωτερικής δύναμης στον αρμονικό ταλαντωτή.

Τώρα ερχόμαστε στις συνέπειες του αναλλοίωτου των δυναμικών εξισώσεων σε χρονικές μεταθέσεις. Όπως είπαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο μια δυναμική εξίσωση είναι αναλλοίωτη σε χρονικές μεταθέσεις όταν η μορφή της εξίσωσης δεν μεταβάλλεται αν μεταθέσουμε την αρχή του χρόνου. Πράγματι η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή δεν εξαρτάται από το χρόνο και δεν εμπεριέχει πουθενά καμία πληροφορία για την αρχή του χρόνου, και συνεπώς είναι αναλλοίωτη σε χρονικές μεταθέσεις. Ως συνέπεια του αναλλοίωτου της εξίσωσης στις χρονικές μεταθέσεις θα δείξουμε ότι:

Εάν η $x(t)$ είναι λύση της δυναμικής εξίσωσης $\ddot{x} = F(x,\dot{x})$ τότε και η $x(t+\alpha)$ θα είναι λύση.

Απόδειξη: Η $x(t)$ ικανοποιεί τη δυναμική εξίσωση $\ddot{x} = F(x,\dot{x})$. Με αντικατάσταση του t από το $t+a$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d^2x(t+\alpha)}{d(t+\alpha)^2} = F\left(x(t+\alpha), \frac{dx(t+\alpha)}{d(t+a)}\right).$$

Επειδή όμως $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d(t+a)}{dt}\dfrac{d}{d(t+\alpha)} = \dfrac{d}{d(t+\alpha)}$, θα ισχύει

$$\frac{d^2x(t+\alpha)}{dt^2} = F\left(x(t+\alpha), \frac{dx(t+\alpha)}{dt}\right),$$

που αποδεικνύει (επειδή η εξίσωση είναι αναλλοίωτη σε χρονικές μεταθέσεις) ότι και η $x(t+\alpha)$ είναι λύση της δυναμικής εξίσωσης.

Θεωρήστε για παράδειγμα, τη λύση του αρμονικού ταλαντωτή $\cos(\omega t)$ υπολογισμένη α μονάδες χρόνου αργότερα:

$$\cos(\omega t + \omega\alpha) = \cos(\omega\alpha)\cos(\omega t) - \sin(\omega\alpha)\sin(\omega t)$$

Βλέπουμε δηλαδή, όπως αποδείξαμε προηγουμένως, ότι και η $\cos\omega(t+\alpha)$ είναι λύση του αρμονικού ταλαντωτή, και επιπλέον, επειδή η δυναμική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή είναι γραμμική ότι αυτή η λύση είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων του ταλαντωτή $\cos\omega t$ και $\sin\omega t$.

Θα δείξουμε τώρα ότι *όταν έχουμε γραμμικές και χρονικά αναλλοίωτες εξισώσεις τότε υπάρχουν λύσεις των δυναμικών εξισώσεων της μορφής $z(t) = e^{Ht}$, όπου H μία σταθερά η οποία μπορεί να είναι και μιγαδική.* Αυτές οι λύσεις έχουν την ιδιότητα να μην αλλάζουν μορφή κατά τη μετάθεση του χρόνου δηλαδή $z(t+\alpha) = h(\alpha)z(t)$. Αυτές οι λύσεις λέγονται *μη αναγώγιμες* (irreducible).

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι υπάρχουν λύσεις που ικανοποιούν τη σχέση $z(t+\alpha) = h(\alpha)z(t)$, όπου $h(\alpha)$ κάποια σταθερά που εξαρτάται από το α. Θα περιορίσουμε την απόδειξη στη μονοδιάστατη κίνηση ενός σώματος του οποίου η κίνηση προσδιορίζεται από δύο αρχικές συνθήκες και άρα η λύση είναι γραμμικός συνδυασμός δύο συναρτήσεων. Η απόδειξη είναι πανομοιότυπη για συστήματα με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας. Έστω λοιπόν ότι η ζητούμενη λύση γράφεται $z(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$, όπου $x_1(t)$ και $x_2(t)$ δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δυναμικής εξίσωσης. Επειδή και η $x_1(t+\alpha)$ είναι λύση, μπορεί να γραφεί και αυτή ως $x_1(t+\alpha) = b_{11} x_1(t) + b_{12} x_2(t)$ καθώς επίσης και η $x_2(t+\alpha) = b_{21} x_1(t) + b_{22} x_2(t)$. Οι σταθερές b_{ij} είναι συναρτήσεις του α. Θέλουμε να αποδείξουμε τώρα ότι δεδομένων των συναρτήσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ υπάρχει λύση $z(t)$ (που προσδιορίζεται από τις σταθερές a_1 και a_2) και αριθμός $h(\alpha)$ ώστε $z(t+\alpha) = h(\alpha) z(t)$. Επειδή $z(t+\alpha) = a_1 x_1(t+\alpha) + a_2 x_2(t+\alpha)$, έχομε

$$(a_1 b_{11} + a_2 b_{21}) x_1(t) + (a_1 b_{12} + a_2 b_{22}) x_2(t) = h(a)(a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t))$$

και άρα $\left[a_1 b_{11} + a_2 b_{21} - h(a) a_1\right] x_1(t) + \left[a_1 b_{12} + a_2 b_{22} - h(a) a_2\right] x_2(t) = 0$. Επειδή οι $x_1(t)$, $x_2(t)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις πρέπει τα a_1 , a_2 και $h(a)$ να ικανοποιούν τις δύο εξισώσεις

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = h(a) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

δηλαδή το $h(a)$ είναι η ιδιοτιμή του ανάστροφου πίνακα $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ και το $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Ως γνωστόν η ιδιοτιμή $h(a)$ προσδιορίζεται από τη συνθήκη $\det\left[\mathbf{B}^{\mathrm{T}} - h(a)\mathbf{I}\right] = 0$, όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας. Η συνθήκη αυτή δίνει μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς $h(a)$ η οποία έχει πάντα δύο λύσεις (στο σώμα των μιγαδικών αριθμών). Αποδείξαμε λοιπόν ότι όχι μόνο υπάρχουν μη αναγώγιμες λύσεις, αλλά ότι αυτές είναι όσες απαιτούνται για να σχηματίσουν μία πλήρη βάση λύσεων των δυναμικών εξισώσεων. Είδαμε ακόμη πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τις λύσεις αυτές.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι εάν για κάθε t και α μία συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση

$$z(t+\alpha) = h(a) z(t), \qquad (1)$$

τότε η συνάρτηση είναι η εκθετική. Θα δώσουμε μία απόδειξη η οποία είναι ενδιαφέρουσα διότι εισάγει μια μέθοδο σκέψης που θα συναντήσετε αργότερα όταν μελετήσετε τη θεωρία ομάδων. Πρώτον, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε την z πολλαπλασιάζοντάς την με κάποιον αριθμό έτσι ώστε $z(0) = 1$. Θέτοντας λοιπόν στην εξίσωση (1) $t = 0$, τότε θα έχουμε $z(\alpha) = h(a)$ και συνεπώς η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί

$$z(t+\alpha) = z(a) z(t). \qquad (2)$$

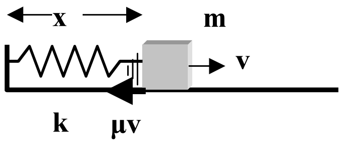
Θεωρούμε τώρα ένα πολύ μικρό χρόνο $\varepsilon << 1$ και αναπτύσσοντας την $z(\varepsilon)$ κατά Taylor, έχουμε $z(\varepsilon) = 1 + H\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, όπου $H = z'(0)$, μία σταθερά. Από την εξίσωση (2) έχουμε $z(N\varepsilon) = \left[z(\varepsilon)\right]^N$. Άρα για κάθε χρόνο t έχουμε γράφοντας $t = N\varepsilon$ ότι :

$$z(t) = \lim_{N\to\infty} \left[z\left(\frac{t}{N}\right)\right]^N = \lim_{N\to\infty}\left[1 + H\frac{t}{N}\right]^N = e^{Ht}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι κάθε σύστημα γραμμικών δυναμικών εξισώσεων που είναι αναλλοίωτες σε χρονικές μεταθέσεις έχει αναγκαστικά λύσεις που είναι εκθετικές συναρτήσεις.

Αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση

Σώμα μάζας m είναι συνδεδεμένο με ελατήριο σταθεράς k, όπως στο σχήμα.



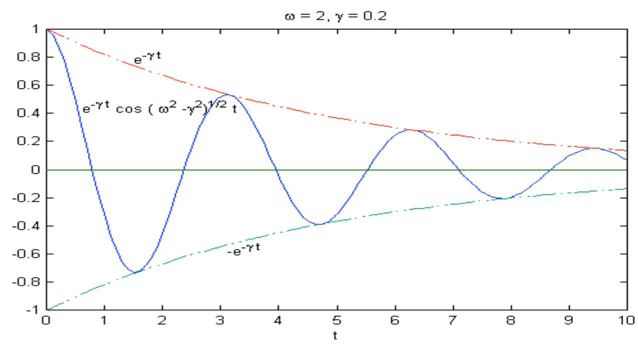
Επιπλέον στο σώμα ασκείται δύναμη τριβής $F(v) = -\mu v$. Η εξίσωση της κίνησης είναι

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (3)$$

όπου $2\gamma = \dfrac{\mu}{m}$ και $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ (όλες οι σταθερές λαμβάνονται θετικές). Η εξίσωση αυτή είναι χρονικά αναλλοίωτη και γραμμική. Θα υπάρχουν λοιπόν μη αναγώγιμες εκθετικές λύσεις της μορφής e^{Ht}. Αντικαθιστούμε την εκθετική λύση στη διαφορική εξίσωση (3) οπότε συμπεραίνουμε ότι η σταθερά H πρέπει να ικανοποιεί την αλγεβρική εξίσωση: $H^2 + 2\gamma H + \omega^2 = 0$, από την οποία έχουμε ότι $H = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$. Οι μη αναγώγιμες λύσεις είναι συνεπώς $\exp\left(-\gamma t \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\,t\right)$ και επειδή η υπέρθεση λύσεων είναι πάλι λύση μπορούμε να πάρουμε ως βάση των λύσεων το πραγματικό και φανταστικό μέρος των μη αναγώγιμων λύσεων και να γράψουμε τη γενική λύση στη μορφή:

$$x(t) = \exp(-\gamma t)\left[A\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\,t\right)\right], \quad (4)$$

όπου οι σταθερές A, B προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Η μορφή είναι κατάλληλη όταν η απόσβεση είναι ασθενής δηλαδή όταν $\omega > \gamma$. Στο σχήμα δίδεται η λύση στη περίπτωση που η αρχική θέση είναι $x(0) = 1$ και η αρχική ταχύτητα είναι $\dot{x}(0) = -\gamma$. Πρέπει να προσεχθεί ότι η απόσβεση δεν οδηγεί μόνο σε εκθετική μείωση του πλάτους της ταλάντωσης αλλά μειώνει και τη συχνότητα ταλάντωσης. Αν αυξήσουμε τον συντελεστή απόσβεσης γ κρατώντας τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή ω σταθερή, η συχνότητα της ταλάντωσης θα μικραίνει συνεχώς μέχρις ότου $\gamma = \omega$ και η συχνότητα μηδενισθεί.



Όταν $\gamma = \omega$ λέγεται ότι έχομε *κρίσιμη απόσβεση*. Σε αυτήν την περίπτωση η (4) δεν δίνει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις και χρειάζεται να προσδιορίσουμε μία δεύτερη λύση. Όταν $\gamma > \omega$ λέγεται ότι έχουμε *υπεραπόσβεση*. Στη περίπτωση αυτή έχουμε τη γενική λύση:

$$x(t) = A\exp\left(-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\,t\right) + B\exp\left(-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\,t\right) \qquad (3)$$

η οποία περιγράφει πλέον δύο εκθετικά χρονικά φθίνουσες συναρτήσεις χωρίς ταλάντωση. Στην περίπτωση της υπεραπόσβεσης η μία λύση μειώνεται με τον ταχύ ρυθμό $\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$ ενώ η άλλη με τον αργότερο ρυθμό $\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$. Η λύση με τον μικρό εκθέτη, με την πάροδο του χρόνου, θα κυριαρχήσει και το σύστημα θα αποκατατασταθεί στην κατάσταση ισορροπίας μετά από χρόνο $t \approx \dfrac{1}{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}}$.
Όσο ο συντελεστής ανάλωσης μεγαλώνει τόσο μεγαλύτερος γίνεται ο χρόνος αποκατάστασης της ισορροπίας δηλαδή τόσο πιο αργή γίνεται η απόσβεση της αρχικής διαταραχής! Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η γρηγορότερη αποκατάσταση της ισορροπίας επιτυγχάνεται όταν η απόσβεση είναι κρίσιμη. Μπορείτε να σκεφθείτε μία πρακτική εφαρμογή της παρατήρησης αυτής;

Ας εξετάσουμε λίγο εκτενέστερα την περίπτωση $\gamma >> \omega$. Σε αυτή την περίπτωση η κυρίαρχη δύναμη είναι η τριβή και έχουμε κατά προσέγγιση $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}=0$ (η δύναμη επαναφοράς είναι αμελητέα και η επιτάχυνση καθορίζεται από τη δύναμη της τριβής.) Περιμένουμε λοιπόν στη περίπτωση αυτή αν το σώμα έχει κάποια αρχική ταχύτητα, η ταχύτητα να μηδενισθεί ταχύτατα και το σώμα να φθάσει στο σημείο $x(0)+\dfrac{\dot{x}(0)}{2\gamma}$ σε χρόνο της τάξεως του $1/2\gamma$. Αυτό φαίνεται αμέσως διότι η γενική λύση της προσεγγιστικής εξίσωσης είναι $x(t)=x(0)+\dfrac{\dot{x}(0)}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right)$. Εάν λοιπόν η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι μεγάλη τότε σε αυτή τη περίπτωση όχι μόνον δεν θα αποκατασταθεί η ισορροπία αλλά η διαταραχή παρά την απόσβεση θα αυξηθεί. Αυτό το φαινόμενο παροδικής αύξησης του πλάτους της διαταραχής έχει ιδιαίτερη σημασία σε αστροφυσικά και γεωφυσικά συστήματα.