Διάλεξη 3η
19/10/99

- **Εξίσωση αναλλοίωτη σε κάποιο μετασχηματισμό:** Ας υποθέσουμε ότι κάποιος εντομολόγος διατυπώνει, ύστερα από μακροχρόνιες παρατηρήσεις στην Αφρική και την περιοχή του Αμαζονίου, τον ακόλουθο νόμο *διαμόρφωσης πληθυσμού σε μια καινούρια φωλιά*: «Όταν μια ομάδα εντόμων εγκατασταθεί σε κάποιο καινούριο χώρο και φτιάξει φωλιά στη συνέχεια ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των εντόμων μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο
$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2,$$
όπου N ο πληθυσμός των εντόμων κάθε χρονική στιγμή, και a, b θετικές σταθερές.» Αν δεχτούμε ότι ο νόμος αυτός είναι ορθός, θα είχε καμιά σημασία αν η μελέτη του πληθυσμού γίνει σήμερα, αύριο, ή μετά από ένα χρόνο; Φυσικά όχι. Στη γλώσσα της φυσικής θα λέγαμε ότι ο νόμος αυτός είναι αναλλοίωτος σε μεταθέσεις στο χρόνο. Το ίδιο και όσον αφορά μεταθέσεις στο χώρο, αφού ο νόμος κατά τον εντομολόγο ισχύει για κάθε περιοχή του πλανήτη πού έκανε τις παρατηρήσεις του. Σε αντιστροφή όμως του χρόνου, είναι ο παραπάνω νόμος εξίσου ορθός; Αν παρακολουθούσατε το βίντεο της εξέλιξης του πληθυσμού, προκειμένου να επαληθεύσετε το νόμο, και ξαφνικά αποφασίζατε να το «τρέξετε ανάποδα» θα βλέπατε έναν μικρό πληθυσμό να συρρικνώνεται αντί να αυξάνεται, αντίθετο δηλαδή και με τις παρατηρήσεις και με την κοινή λογική που υπαγορεύει την αύξηση του πληθυσμού μέχρι ο πληθυσμός να φτάσει σε κάποιο όριο, όπου η θνησιμότητα θα υπερκεράσει τη γεννητικότητα. Ο παραπάνω λοιπόν νόμος δεν είναι αναλλοίωτος σε αντιστροφή του χρόνου.
- Ας επανέλθουμε όμως στο 2ο νόμο του Νεύτωνα, το νόμο που διατείνεται ότι μπορεί να προβλέψει το οσοδήποτε μακρινό μέλλον των μηχανικών συστημάτων. Είναι η εξίσωση $\vec{F} = m\vec{a}$ αναλλοίωτη σε κάποιο μετασχηματισμό; Ένας προφανής τέτοιος μετασχηματισμός είναι η αντιστροφή του χρόνου $t \to t' = -t$. Λαμβάνοντας υπόψη την αρχική υπόθεση (με την οποία απ' ότι φαίνεται συμφωνούν όλες οι γνωστές θεμελιώδεις δυνάμεις) ότι δηλαδή η δύναμη που ασκείται σε ένα υλικό σημείο είναι συνάρτηση της θέσης μόνο αυτού $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$, ισχύει ότι $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = m\frac{d}{d(-t)}\frac{d\vec{x}}{d(-t)} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt'^2}$. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παραμένει αναλλοίωτος όταν αντικαταστήσει κανείς το t με το $-t$. Αυτό σημαίνει δύο πράγματα: (α) Ότι όλα τα μηχανικά συστήματα που εξελίσσονται σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα και υπόκεινται σε δυνάμεις θεμελιώδους φύσης δεν μπορούν να ορίσουν το βέλος του χρόνου. Αν έβλεπε κανείς την ταινία εξέλιξης ενός τέτοιου συστήματος να τρέχει ανάποδα δεν θα το καταλάβαινε, όλα θα φαίνονταν να διαδραματίζονται με απόλυτα φυσιολογική σειρά. (β) Ότι όπως μπορεί κάποιος λύνοντας την περίφημη εξίσωση του Νεύτωνα –είτε αναλυτικά, είτε αριθμητικά όπως είδαμε στο μάθημα– να προβλέψει το μέλλον ενός μηχανικού συστήματος, οσοδήποτε μακρινό και αν είναι αυτό, *μπορεί* να προβλέψει εξίσου καλά και το παρελθόν του[1]. Για παράδειγμα, μπορεί να διερευνήσει κανείς, πράγμα το οποίο γίνεται από κάποιους ερευνητές, το παρελθόν

[1] Αρκεί να προσέξει κανείς να μην προχωρήσει τόσο «πίσω», ώστε να ξεφύγει από τα όρια ισχύος της θεωρίας που υποθέτει ότι περιγράφει ορθά το σύστημά του.

του Ηλιακού συστήματος, ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις του Νεύτωνα, για τους πλανήτες και τον Ήλιο, προς τα πίσω στο χρόνο.

- Είναι εύκολο να πειστεί κανείς ότι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα είναι αναλλοίωτος και σε χρονικές μεταθέσεις ($t \to t' = t + a$, όπου a κάποιος σταθερός αριθμός), γεγονός το οποίο αντικατοπτρίζει την ομογένεια του χρόνου, το ότι δηλαδή δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη αρχή του χρόνου (μην ξεχνάτε ότι η Μεγάλη Έκρηξη, το Big Bang, αναφέρεται σε θεωρίες οι οποίες ξεπερνούν τα όρια ισχύος της νευτώνειας θεωρίας). Όλες οι χρονικές στιγμές είναι ισοδύναμες. Αυτό αποτυπώνεται στην αντίληψη του Νεύτωνα για το χρόνο: «*Ο χρόνος υπάρχει ανεξάρτητα από το υλικό σύμπαν και είναι άπειρος, άναρχος, γραμμικός και συνεχής.*»
- Το αναλλοίωτο ενός φυσικού νόμου σε κάποιο μετασχηματισμό συχνά αναφέρεται στη φυσική ως *συμμετρία* του φυσικού αυτού νόμου στον συγκεκριμένο μετασχηματισμό. Η ορολογία αυτή αποτελεί επέκταση της γεωμετρικής συμμετρίας και έχει το ακόλουθο νόημα: «*κάτι είναι συμμετρικό αν δρώντας πάνω του με κάποιο τρόπο αυτό παραμένει όπως ήταν αρχικά.*»[2]
- Τέλος η διανυσματική διατύπωση του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα υποκρύπτει μία ακόμη *συμμετρία* της φύσης, το γεγονός ότι όλες οι διευθύνσεις του χώρου είναι ισοδύναμες. Η *ισοτροπία* αυτή του χώρου μας δίνει το δικαίωμα να επιλέγουμε το σύστημα των αξόνων για την περιγραφή οποιουδήποτε μηχανικού συστήματος, στραμένο όπως εμείς το θέλουμε. Η εξίσωση που διέπει λοιπόν την κίνηση ενός μηχανικού συστήματος δεν μπορεί παρά να είναι διανυσματική[3]. Την ιδιότητα αυτή των διανυσμάτων, να παραμένουν αναλλοίωτα στις στροφές, θα μελετήσουμε εκτενέστερα σε κατοπινό κεφάλαιο.
- **Κατασκευή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα από συμμετρίες:** Από παρατηρήσεις είναι γνωστό ότι η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα ενός σωματιδίου καθορίζουν πλήρως την τροχιά του. Για να πεισθείτε οδηγήστε ένα αυτοκίνητο προς το χείλος ενός γκρεμού είτε με σταθερή ταχύτητα 20 km/h, είτε ξεκινώντας με μεγαλύτερη ταχύτητα και φρενάροντας έτσι ώστε να φτάσει το αυτοκίνητο και πάλι με ταχύτητα 20 km/h στο γκρεμό. Και στις δύο περιπτώσεις η τροχιά που θα διαγράψει το αυτοκίνητο πέφτοντας στο γκρεμό θα είναι ακριβώς η ίδια. Αν πάλι βέβαια σας φαίνεται ιδιαίτερα επικίνδυνο να επιχειρήσετε κάτι τέτοιο αρκεστείτε στην επιβεβαίωση των πειραματιστών του 17ου αιώνα. Εφόσον λοιπόν η θέση του κινητού και η πρώτη χρονική παράγωγος της θέσης του, και μόνο αυτές, αρκούν για την περιγραφή της κίνησης ενός κινητού μέσα σε ένα πεδίο δυνάμεων, δεν μπορεί παρά ο δυναμικός νόμος της κίνησης να είναι μια δευτεροβάθμια ως προς το χρόνο εξίσωση που συνδέει το αίτιο της κίνησης (τη δύναμη) με τη θέση. Σημειώστε ότι αυτό που θέλουμε να αναπαραγάγουμε είναι η διαφορική εξίσωση που θα πρέπει να ικανοποιεί η θέση του κινητού ως συνάρτηση του χρόνου, δεδομένης της δύναμης. Η γενικότερη μορφή της διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$F = a(x,\dot{x},t)\ddot{x} + b(x,\dot{x},t)\dot{x} + c(x,\dot{x},t) = a(x,\dot{x},t)\ddot{x} + d(x,\dot{x},t)\,,$$

όπου a,b,c,d κάποιες συναρτήσεις των $x,\dot{x},t$ οι οποίες πρέπει να προσδιοριστούν. (Στην παραπάνω εξίσωση θεωρήσαμε μονοδιάστατη κίνηση κατά

[2] Την γενική αυτή ερμηνεία της συμμετρίας έδωσε ο Γερμανός μαθηματικός Hermann Weyl.

[3] Στην πραγματικότητα, η εξίσωση επιβάλλεται να είναι γενικά τανυστική. Η πιο απλή και τετριμμένη μορφή τανυστή είναι ένα βαθμωτό μέγεθος (περίπτωση η οποία δεν θα διευκόλυνε την περιγραφή ενός δυναμικού νόμου που να οδηγεί σε κίνηση). Το αμέσως επόμενης τάξης τανυστικό μέγεθος είναι το διάνυσμα.

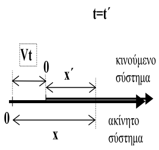
μήκος του άξονα-x, ώστε να μην περιπλέξουμε τα πράγματα με τη χρήση διανυσμάτων. Θα μπορούσε όμως κανείς, εύκολα, να επεκτείνει την απόδειξη θεωρώντας την αντίστοιχη διανυσματική εξίσωση 2ου βαθμού.) Από τον 1ο νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι όταν $F = 0$ το κινητό συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα, επομένως $\ddot{x} = 0$, και συνεπώς $d(x, \dot{x}, t) = 0$. Η *ομογένεια του χώρου* και η *ομογένεια του χρόνου*, δηλαδή η ισοδυναμία μεταξύ των διαφόρων σημείων του χώρου (κανένα σημείο του χώρου δεν διαφέρει από τα άλλα ως προς την κατάληξη ενός συγκεκριμένου πειράματος) και των χρονικών στιγμών (δεν υπάρχει κανένας λόγος να κάνεις σήμερα κάτι που μπορείς να κάνεις αύριο, οι φυσικοί νόμοι θα «δουλέψουν» εξίσου καλά και αύριο), επιβάλουν στη συνάρτηση $a(x, \dot{x}, t)$ να μην εξαρτάται ούτε από τη θέση του κινητού, ούτε από το χρόνο. Επομένως, ο δυναμικός νόμος των μηχανικών συστημάτων δεν μπορεί παρά να είναι

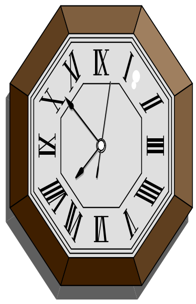
$$F = a(\dot{x})\ddot{x}.$$

Στο σημείο αυτό θα έπρεπε να εγκαταλείψουμε την προσπάθεια να καταλήξουμε στο 2ο νόμο του Νεύτωνα, αν δεν υπήρχε καμία άλλη συμμετρία την οποία να μπορέσουμε να εκμεταλλευτούμε για να φτάσουμε στην πιο απλή διατύπωση του φυσικού νόμου εξέλιξης των μηχανικών συστημάτων. Υπάρχει όμως άλλη μια συμμετρία, την οποία γνωρίζουμε καλά, αλλά δεν έχουμε μάθει να την αναγνωρίζουμε ως τέτοια. Πρόκειται για το γεγονός ότι σε ένα πλοίο, εφόσον η θάλασσα είναι ήρεμη και το πλοίο δεν στρίβει, εκτελούμε όλες τις κινήσεις φυσιολογικά ωσάν να βρισκόμασταν στη στεριά χωρίς να βλέπουμε κάτι περίεργο να συμβαίνει στο κατάστρωμα του πλοίου. Όπως γράφει ο Γαλιλαίος :

> «…Κλείσου με κάποιο φίλο σε κεντρική εσωτερική καμπίνα ενός μεγάλου πλοίου, και έχε μαζί σου λίγες μύγες, μερικές πεταλούδες, και μερικά πτηνά. Πάρε μαζί σου ένα μικρό ενυδρείο με ένα ψάρι και ανάρτησε μία φιάλη γεμάτη νερό που αδειάζει στάλα - στάλα σε μια πλατιά λεκάνη. Όταν το πλοίο είναι ακίνητο παρατήρησε προσεκτικά πως τα πτηνά πετούν με ίση ταχύτητα προς όλες τις κατευθύνσεις. Το ψάρι επίσης κολυμπάει ανέμελα προς όλες της κατευθύνσεις και οι σταγόνες πέφτουν ρυθμικά στη λεκάνη… Αφού παρατηρήσεις όλα αυτά με προσοχή… διάταξε το πλοίο να σαλπάρει και να ταξιδέψει με κάποια σταθερή ταχύτητα, προσέχοντας η κίνηση του πλοίου να είναι ομαλή και χωρίς διαταραχές. Τότε δεν θα παρατηρήσεις καμία αλλαγή σε όσα παρατήρησες προηγουμένως, ούτε θα είσαι σε θέση να προσδιορίσεις κατά πόσο το πλοίο κινείται ή παραμένει ακίνητο… Οι σταγόνες θα πέφτουν με τον ίδιο τρόπο στη λεκάνη και στο ίδιο σημείο, χωρίς να μετακινούνται προς τη πρύμνη, παρότι όταν οι σταγόνες κινούνται στον αέρα το πλοίο μετακινείται προς τα μπροστά. Το ψάρι στο ενυδρείο κολυμπάει προς τα εμπρός με την ίδια ευκολία που κολυμπάει προς τα πίσω, και κατευθύνεται προς το δόλωμα με την ίδια ευκολία ανεξαρτήτως από το που βρίσκεται αυτό. Τέλος οι πεταλούδες και οι μύγες συνεχίζουν ανέμελα το πέταγμά τους προς όλες τις κατευθύνσεις, και δεν συγκεντρώνονται προς τη πρύμνη ως θα συνέβαινε αν κουραζόντουσαν προκειμένου να διατηρήσουν τη θέση τους στο κινούμενο πλοίο…» *(Galileo Galilei "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems – Ptolemaic & Copernican" μετάφραση στα αγγλικά Drake, University of California Press 1967, p.186-187).*

Με τον τρόπο αυτό διατυπώνει ο Γαλιλαίος αυτό που αναφέρεται σήμερα ως η αρχή της Γαλιλαϊκής σχετικότητας: όλα τα μηχανικά συστήματα συμπεριφέρονται ακριβώς το ίδιο όταν βρίσκονται πάνω σε ένα σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με κάποιο άλλο «καλό» σύστημα αναφοράς (τέτοιο, δηλαδή, ώστε όταν δεν ασκείται δύναμη σε κάποιο υλικό





σημείο αυτό να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά). Ο μετασχηματισμός αυτός μεταξύ δύο συστημάτων που κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα καλείται Γαλιλαιϊκός μετασχηματισμός και απαιτούμε να αποτελεί συμμετρία των μηχανικών συστημάτων, δηλαδή ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα πρέπει να είναι αναλλοίωτος στους Γαλιλαιϊκούς μετασχηματισμούς. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι, σε μία τουλάχιστον διάσταση, ο μετασχηματισμός αυτός γράφεται (βλ. Σχήμα)

$$x \to x' = x - Vt$$
$$t \to t' = t,$$

όπου x', t' η θέση και η χρονική στιγμή ενός συμβάντος στο κινούμενο σύστημα και V η ταχύτητα απομάκρυνσης του κινούμενου από το ακίνητο σύστημα[4]. Για να είναι ο θεμελιώδης νόμος κίνησης των μηχανικών συστημάτων ανεξάρτητος του συστήματος αναφοράς, δεν θα πρέπει η συνάρτηση a να εξαρτάται από την ταχύτητα του σωματιδίου, αφού το υπόλοιπο κομμάτι της εξίσωσης δεν αλλάζει με τον μετασχηματισμό ($d^2x'/dt'^2 = d^2x/dt^2$ όπως εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε με δύο απλές παραγωγίσεις). Τι απομένει λοιπόν παρά να είναι η a μια σταθερά σχετιζόμενη με το σωματίδιο. Ιδού λοιπόν ο 2ος νόμος του Νεύτωνα ως απόρροια των συμμετριών της φύσης.

$$F = m\ddot{x}\,.$$

Όσον αφορά, τη σταθερά m, που απλά αποκαλούμε «μάζα», και τη δυνατότητα μέτρησης αυτής, ο 3ος νόμος του Νεύτωνα έρχεται να δώσει απαντήσεις. Ας θεωρήσουμε δύο σωματίδια που αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους μέσω κάποιας δύναμης. Οι δύο δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σωματίδια οφείλουν να είναι ίσες και αντίθετες, συνεπώς ο λόγος των δύο επιταχύνσεων είναι αντιστρόφως ανάλογος των δύο «μαζών» των σωματιδίων:

$$\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_2} = -\frac{m_2}{m_1}.$$

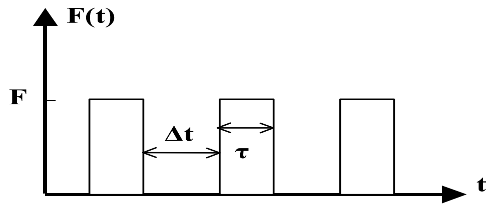
Ορίζοντας ως μοναδιαία μάζα αυτή κάποιου σωματιδίου, οποιαδήποτε άλλη μάζα μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της μέτρησης των επιταχύνσεων κατά την αλληλεπίδραση τους. Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η αναφορά στον 3ο νόμο του Νεύτωνα δεν είναι απαραίτητη αφού ο 2ος νόμος είναι αρκετός για τη μέτρηση της μάζας. Γνωρίζοντας τη δύναμη και την επιτάχυνση που προκαλεί αυτή σε ένα κινητό, υπολογίζουμε τη μάζα με μια απλή διαίρεση. Απλά ο 3ος νόμος μας δίνει τη δυνατότητα να μετρήσουμε ευκολότερα τη μάζα χωρίς να γνωρίζουμε το μέγεθος της δύναμης. Όταν μάλιστα πρόκειται για κάποια θεμελιώδη δύναμη την οποία ερευνούμε και δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων –

[4] Στην πραγματικότητα δεν είναι δίκαιο να ονομάζουμε το ένα σύστημα ακίνητο και το άλλο κινούμενο, από τη στιγμή που όπως είπαμε δεν έχει τίποτε το εξέχον το ένα σε σχέση με το άλλο.

όπως για παράδειγμα η δύναμη της Παγκόσμιας έλξης την εποχή του Νεύτωνα– δεν μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για τη μέτρηση της μάζας των σωμάτων.

- Μέχρι στιγμής η μάζα είναι μια ιδιότητα της ύλης, η οποία μετράει την αδράνεια αυτής σε αλλαγές της κινητικής της κατάστασης. Πώς μπορούμε να πειστούμε ότι αυτή η ιδιότητα σχετίζεται με το ποσό της ύλης, όπως διαπίστωσε για πρώτη φορά ο Νεύτων, και όχι με το χρώμα της ή την σκληρότητά της. Υποθέστε ότι δύο ίδιες δυνάμεις, π.χ. από δύο πανομοιότυπα ελατήρια τεντωμένα κατά το ίδιο μήκος ασκούνται παράλληλα και ανεξάρτητα σε δύο όμοιες μεταλλικές σφαίρες. Προφανώς οι δύο σφαίρες θα επιταχυνθούν το ίδιο. Πλησιάστε τα δύο πειράματα έτσι ώστε οι δύο σφαίρες μόλις να αγγίζουν η μία την άλλη. Αφού η κίνηση των δύο σφαιρών είναι απολύτως ίδια, μπορούμε να κολλήσουμε τις δύο σφαίρες χωρίς τίποτε να αλλάξει στην κίνησή τους. Το πείραμα όπως έχει διαμορφωθεί περιλαμβάνει μία δύναμη διπλάσια της αρχικής και ένα σώμα με διπλάσια ποσότητα ύλης από την κάθε σφαίρα, κινούμενο όμως με την ίδια επιτάχυνση όπως και πριν. Επομένως η μάζα των δύο σφαιρών μαζί είναι διπλάσια από τη μάζα της κάθε σφαίρας. Το νοητικό αυτό πείραμα δείχνει ότι μάζα και ποσότητα ύλης είναι άμεσα συνδεδεμένα.[5]
- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στην προηγούμενη διάλεξη είδαμε μιας εντελώς διαφορετική θεώρηση από την παρούσα. Η διατύπωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα από τον ίδιο τον Νεύτωνα ήταν απλώς μια πρόταση αναφορικά με το πώς «δουλεύουν» τα μηχανικά συστήματα, μια λαμπρή ιδέα με αφορμή κάποια πειραματικά δεδομένα, η οποία, από ότι φάνηκε, έδινε απόλυτα ικανοποιητικές προβλέψεις για οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα. Η κατασκευή του νόμου του Νεύτωνα που παραθέσαμε παραπάνω, αποτελεί μια πολύ βαθύτερη προσέγγιση του προβλήματος, η οποία ξεκινά από την παρατήρηση κάποιων αρχικών στοιχείων που καθορίζουν την κίνηση, καθώς και από θεμελιώδεις συμμετρίες της φύσης.
- Η ικανότητα προβλεψιμότητας που έχει κανείς, έχοντας στα χέρια του τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, έχει ήδη φανεί, όταν δείξαμε πώς με έναν απλό (αλλά ίσως κουραστικό και χρονοβόρο) αριθμητικό υπολογισμό μπορούμε να μάθουμε το μέλλον και το παρελθόν οποιουδήποτε μηχανικού συστήματος, όσο πολύπλοκο και αν είναι αυτό (για παράδειγμα ενός γαλαξία). Στη συνέχεια θα δούμε μερικά απλά και διδακτικά παραδείγματα μηχανικών συστημάτων, η εξέλιξη των οποίων μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς με αναλυτικό τρόπο.
- **χρονοεξαρτώμενες δυνάμεις:** Ας υποθέσουμε ότι σε ένα υλικό σώμα δυνάμενου να κινείται σε μια διάσταση ασκείται μια δύναμη $F(t)$. Τότε ο 2ος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τη μορφή:

$$F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{du}{dt},$$



όπου u η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος. Η έκφραση της επιτάχυνσης μέσω της ταχύτητας αντί της θέσης, διευκολύνει την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης η οποία από 2ης τάξης γίνεται 1ης. Η λύση αυτής δίνει

[5] Θα μπορούσε κανείς να παρατηρήσει ότι όχι μόνο η ποσότητα ύλης αλλά και η εξωτερική επιφάνεια είναι διπλάσια. Επομένως ίσως η μάζα σχετίζεται με την εξωτερική επιφάνεια ενός κινητού! Αρκεί να ανοίξετε μια εσωτερική κοιλότητα στην αρχική σφαίρα και να μετρήσετε την καινούρια μάζα για να πεισθείτε πως ένας τέτοιος ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

$$u - u_0 = \int_{u_0}^{u} du' = \int_{t_0}^{t} \frac{F(t')}{m} dt' . \ (1)$$

Όσον αφορά τη θέση του κινητού αρκεί άλλη μια ολοκλήρωση $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} u dt'$.

Ως παράδειγμα τέτοιας δύναμης θεωρήστε ένα τρένο το οποίο προωθείται με διαδοχικές ώσεις σταθερής δύναμης F οι οποίες διαρκούν κάποιο χρονικό διάστημα τ. Ξεκινώντας από την ακινησία το τρένο αυξάνει την ταχύτητά του κατά $F\tau/m$ ύστερα από κάθε ώση (βλ. εξίσωση (1)). Αντίστοιχα η θέση του τρένου ύστερα από την (i+1)-οστή ώση θα είναι, όπως προκύπτει από τη διπλή ολοκλήρωση $x_{i+1} = x_i' + u_i\tau + \left(F/2m\right)\tau^2$, όπου x_i' η θέση του τρένου ύστερα από την i-οστή ώση και το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μέχρι να ξεκινήσει η (i+1)-οστή ώση. Αν, για ευκολία, θεωρήσουμε ότι η διάρκεια της ώσης μικραίνει απεριόριστα, ενώ η δύναμη μεγαλώνει κατά τρόπο τέτοιο ώστε $F\tau$=σταθερό, $x_{i+1} \cong x_i$. Αυτό σημαίνει ότι κατά την απειροστή διάρκεια της ώσης, το τρένο δεν προλαβαίνει να αλλάξει θέση. Μόνο η ταχύτητά του αυξάνεται. Έτσι μετά από N τέτοιες ώσεις με χρονική απόσταση Δt η μία από την επόμενη, το τρένο θα έχει ταχύτητα $u_N = N\frac{(F\tau)}{m}$ και θα έχει διανύσει $x_N = \frac{N(N-1)}{2}\frac{(F\tau)}{m}\Delta t$ (επιβεβαιώστε το). Με μια απλή αναδιάταξη των όρων

$$x_N = \frac{N\Delta t(N-1)\Delta t}{2}\frac{F\tau}{m\Delta t} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}\left(\frac{F\tau}{m\Delta t}\right)t^2 ,$$

όπου $t = N\Delta t$ ένα χρονικό διάστημα που περικλείει μεγάλο αριθμό ώσεων. Το αποτέλεσμα μοιάζει με αυτό της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, με επιτάχυνση αυτήν που θα προκαλούσε μια δύναμη $F\tau/\Delta t$ αν ασκούνταν συνεχώς!

Συνάρτηση δέλτα: Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο να εισάγουμε ένα μαθηματικό αντικείμενο το οποίο πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τους φυσικούς (πιο συγκεκριμένα τον Paul Dirac). Πρόκειται για μια οριακή περίπτωση συνάρτησης, παρόμοια με τον παλμό δύναμης που συναντήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, στο όριο που $\tau \to 0$. Πιο συγκεκριμένα φανταστείτε μια συνάρτηση η οποία έχει τη μορφή τετραγωνικού παλμού, δηλαδή

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, |x| > \varepsilon/2 \\ 1/\varepsilon, |x| \le \varepsilon/2 \end{cases}$$

και στη συνέχεια θεωρήστε το όριό της για $\varepsilon \to 0$: $f_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \delta(x)$. Όπως όλες οι συναρτήσεις $f_\varepsilon(x)$, έτσι και η $\delta(x)$ έχει ολοκλήρωμα, σε όλο το χώρο των x ίσο με τη μονάδα.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 .$$

Πολλαπλασιάζοντας την περίεργη αυτή «συνάρτηση»[6] με μια άλλη συνεχή (τουλάχιστον στο σημείο $x = 0$) συνάρτηση τι θα συνέβαινε; Προφανώς, το αποτέλεσμα θα μηδενίζονταν σε όλες τις άλλες περιοχές μακριά από το σημείο

[6] Πιο σωστά η συνάρτηση δέλτα είναι ένα συναρτησοειδές και όχι μια συνάρτηση. Για παράδειγμα ποια η τιμή αυτής της … «συνάρτησης» στο σημείο x=0, το οποίο ανήκει μέσα στο πεδίο ορισμού της;

$x = 0$ και κάτι παράξενο θα συνέβαινε στην περιοχή του μηδενός. Ας εξετάσουμε πρώτα πως θα φερόταν η $f_\varepsilon(x)$ σε μια ανάλογη περίπτωση, και λαμβάνοντας στη συνέχεια το όριο να εξάγουμε τα συμπεράσματά μας για την $\delta(x)$.

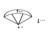
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_e(x) g(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{+\varepsilon/2} g(x) dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} g(0).$$

Η ιδιότητα αυτή $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) g(x) dx = g(0)$ της συνάρτησης δέλτα την καθιστά ιδιαιτέρως χρήσιμη. Τέλος άλλη μια ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα που θα άξιζε να αναφέρουμε, και μπορείτε εύκολα να επιβεβαιώσετε με μια παραγοντική ολοκλήρωση, είναι η ακόλουθη: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) g(x) dx = -g'(0)$, όπου ο τόνος συμβολίζει παράγωγο ως προς x. Η σπουδαιότητα της συνάρτησης δέλτα φάνηκε έμμεσα στο παράδειγμα των παλμικών ώσεων που είδαμε παραπάνω. Όταν το αίτιο της κίνησης, της δημιουργίας ενός πεδίου, κλπ. έχει έντονο τοπικό (χωρικά ή χρονικά) χαρακτήρα, η συνάρτηση δέλτα περιγράφει πολύ ικανοποιητικά τούτο. Επιπλέον οι καταπληκτικές ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα, την κάνουν πολύ ελκυστική στη μελέτη του αποτελέσματος αιτίων πολύπλοκων με όχι και τόσο τοπικό χαρακτήρα. Γνωρίζοντας κανείς το αποτέλεσμα της δράσης ενός «δέλτα-αιτίου» μπορεί να μάθει και το αποτέλεσμα ενός πολύ πιο σύνθετου αιτίου, αφού μπορεί να θεωρήσει το σύνθετο αυτό αίτιο ως συνάθροιση πολλών τέτοιων «δέλτα-αιτίων». Για να εξασκηθείτε με τις ιδιότητες των συναρτήσεων δέλτα δείξτε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) g(x) dx = g(x_0)$.

- **δυνάμεις εξαρτώμενες από την ταχύτητα:** Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση δύναμης της μορφής $F(u)$. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τώρα τη μορφή:

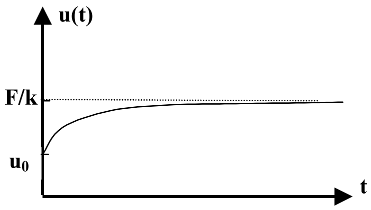
$$F(u) = m\frac{du}{dt} \Rightarrow \int_{u_0}^{u} \frac{du'}{F(u')} = \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{m}.$$

Και σε αυτή την περίπτωση, λύνοντας το αριστερό ολοκλήρωμα παίρνουμε αυτόματα μια σχέση μεταξύ της ταχύτητας του κινητού και του χρόνου. Με άλλα λόγια ξέρουμε κάθε χρονική στιγμή την ταχύτητα του κινητού. Μια δεύτερη ολοκλήρωση της ταχύτητας μας προσφέρει και τη θέση του κινητού.



Ας εξετάσουμε ως παράδειγμα εφαρμογής τέτοιας δύναμης την κάθοδο ενός αλεξιπτωτιστή μέσα στο πεδίο βαρύτητας της Γης. Θα θεωρήσουμε την αντίσταση του αέρα στο αλεξίπτωτο ανάλογη της

ταχύτητας καθόδου. Έτσι, $F - ku = m\frac{du}{dt}$, όπου F, m το βάρος και η μάζα του αλεξιπτωτιστή. Εφαρμόζοντας την παραπάνω ολοκλήρωση θα καταλήξουμε στη σχέση



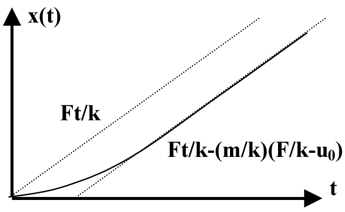
$$u = u_0 e^{-kt/m} + \frac{F}{k}(1 - e^{-kt/m}).$$

Επιλέξτε ένα χρονικό διάστημα αρκετά μεγάλο σε σχέση με τη σταθερά χρόνου $\tau \equiv m/k$ που ορίζει το πρόβλημα και θα καταλήξετε στο ακόλουθο αξιοσημείωτο αποτέλεσμα: $u(t >> \tau) \cong F/k$. Η σχέση αυτή που συνδέει δύναμη και ταχύτητα είναι στην πραγματικότητα ο δυναμικός νόμος της κίνησης της αριστοτέλειας μηχανικής. Μάλιστα ο Αριστοτέλης εξήγαγε αυτή τη σχέση μετρώντας την κίνηση στερεών σωμάτων κατά την κάθοδό τους μέσα σε ένα σωλήνα με υγρό:

«*Και αν η αυτή δύναμη μεταφέρει μέσα σε ορισμένο χρόνο το αυτό αντικείμενο σε αυτήν εδώ την ορισμένη απόσταση, για να το μεταφέρει στο μισό της απόστασης χρειάζεται το μισό του χρόνου…*» Αριστοτέλης, Φυσική Ακρόασις, βιβλίο Η΄, κεφ. 5, 250a., μτφρ. Κ. Δ. Γεωργούλης.

Προκειμένου να υπολογίσουμε το διάστημα που έχει διανύσει ο αλεξιπτωτιστής μέχρι κάποιο χρόνο, ολοκληρώνουμε την ταχύτητα οπότε προκύπτει

$$x(t) = \frac{Ft}{k} - \frac{m}{k}\left(\frac{F}{k} - u_0\right)\left(1 - e^{-kt/m}\right).$$



Ασυμπτωτικά, για μεγάλους χρόνους σε σχέση με τη σταθερά χρόνου τ, η θέση δίνεται από την $x(t) \cong \frac{Ft}{k} - \frac{m}{k}\left(\frac{F}{k} - u_0\right)$, όπου ο πρώτος όρος περιγράφει την ομαλή κίνηση που παρατηρούσε ο Αριστοτέλης, ενώ ο δεύτερος όρος σχετίζεται με την «προϊστορία» της κίνησης, όλα δηλαδή όσα συνέβησαν μέχρι το κινητό να αποκτήσει την οριακή του ταχύτητα. Προφανώς η ανακριβής χρονομέτρηση του Αριστοτέλη δεν του επέτρεψε να δει τον δεύτερο αυτό όρο και ίσως να του δημιουργήσει αμφιβολίες.

- **Δύναμη εξαρτώμενη από τη θέση:** Τέλος ας θεωρήσουμε μια δύναμη της μορφής $F(x)$. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να λύσει κανείς την ομογενή διαφορική εξίσωση 2ης τάξης: $m\ddot{x} - F(x) = 0$ για να υπολογίσει τη θέση του κινητού σε κάθε χρονική στιγμή. Συχνά η λύση αυτή δεν είναι εύκολο να βρεθεί. Μπορούμε όμως να καταλήξουμε σε ένα πολύ χρήσιμο συμπέρασμα στην περίπτωση τούτη. Ας γράψουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα στη μορφή:

$$F(x) = m\frac{du}{dt} = m\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = mu\frac{du}{dx}.$$

Ορίζοντας μια νέα συνάρτηση $V(x) \equiv V_0 - \int_{x_0}^{x} F(x')dx'$, όπου V_0 μια τυχαία σταθερά, και ολοκληρώνοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\int_{x_0}^{x} F(x')dx' = \int_{u_0}^{u} mu'du' = \frac{mu^2}{2} - \frac{mu_0^2}{2} \Rightarrow \frac{mu_0^2}{2} + V_0 = \frac{mu^2}{2} + V(x).$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι εντυπωσιακό και απρόσμενο. Όποια και αν είναι η μορφή της δύναμης, υπάρχει μια ποσότητα η οποία κατά τη διάρκεια της κίνησης διατηρείται σταθερή, είναι, όπως λέμε στη φυσική, *σταθερά της κίνησης* ή αλλιώς *ολοκλήρωμα της κίνησης*. Η ύπαρξη σταθερών σε ένα φυσικό πρόβλημα αφενός μεν διευκολύνει σε μεγάλο βαθμό τους υπολογισμούς (στην περίπτωση μας μπορούμε να γνωρίζουμε την ταχύτητα σαν συνάρτηση της θέσης και με μία ακόμη ολοκλήρωση να υπολογίσουμε και τη θέση σαν συνάρτηση του χρόνου), αφετέρου δε υποκρύπτει κάποια συμμετρία του εν λόγω προβλήματος. Στην ποσότητα αυτή που κατασκευάσαμε και δείξαμε ότι παραμένει σταθερή, αναγνωρίζουμε την ενέργεια του κινητού. Στο ερώτημα τι είναι ενέργεια, δεν μπορούμε να δώσουμε καμία άλλη απάντηση παρά μόνο να δείξουμε σιωπηρά την ποσότητα αυτή που γράψαμε και δείξαμε πως παραμένει σταθερή. Εκτός από την κινητική ενέργεια $mu^2/2$ και τη δυναμική ενέργεια $V(x)$ που εμφανίστηκαν εδώ ως ποσότητες σχετιζόμενες με την κινητική κατάσταση και τη θέση, αντίστοιχα, του κινητού, γνωρίζουμε ότι σε ευρύτερα φυσικά συστήματα υπάρχουν και άλλες αντίστοιχες ποσότητες που ονομάζουμε θερμική ενέργεια, χημική ενέργεια, πυρηνική ενέργεια κλπ., οι οποίες όλες μαζί αθροιζόμενες δίνουν τη διατηρούμενη ποσότητα του συστήματος που ονομάζουμε ολική ενέργεια. Οι ενεργειακές αυτές ποσότητες, όμως, εμπίπτουν κατ' ουσίαν σε μία από τις δύο κατηγορίες ενέργειας που είδαμε παραπάνω. Για παράδειγμα η θερμική ενέργεια δεν είναι τίποτε άλλο από την κινητική ενέργεια των άτακτα κινούμενων μορίων της ύλης, η χημική ενέργεια που απελευθερώνεται σε μια χημική αντίδραση δεν είναι παρά η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια των ηλεκτρονίων των μορίων που αναδιατάσσονται. Τέλος η πυρηνική ενέργεια που απελευθερώνεται κατά τη μεταστοιχείωση είναι στην πραγματικότητα η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια μεταξύ τμημάτων του πυρήνα, η οποία κάνει αισθητή την ύπαρξή της όταν ο πυρήνας για κάποιο λόγο παραμορφώνεται και οι πυρηνικές δυνάμεις δεν αντέχουν να κρατήσουν τον πυρήνα σε μια δέσμια κατάσταση.

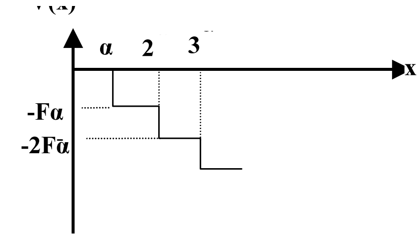
Στο σημείο αυτό θα ήταν σκόπιμο να τονίσουμε ότι η διατηρούμενη αυτή ποσότητα, η ενέργεια, δεν θα ήταν τόσο θεμελιώδους σημασίας, αν οι θεμελιώδεις δυνάμεις στη φύση δεν ήταν σχεδόν[7] όλες, δυνάμεις που εξαρτώνται από τη θέση και μόνο των σωμάτων –μην ξεχνάτε ότι η διατήρηση της ενέργειας προήλθε ως επακόλουθο αυτής της ιδιότητας.

Ύστερα από όλη αυτή τη συζήτηση για την ενέργεια, ας επανέλθουμε στο πρόβλημα υπολογισμού της θέσης ενός κινητού, όταν επιδρά επάνω του μια δύναμη που εξαρτάται από τη θέση. Φανταστείτε ότι το τρένο που είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα επιταχύνεται, ξεκινώντας από την ακινησία, με διαδοχικούς χωρικούς παλμούς δύναμης της μορφής $F(x) = \sum_k Fa\delta(x - ka)$[8], όπου $k = 0,1,2,3,\ldots$ και a μια σταθερά (η απόσταση μεταξύ των διαδοχικών, απειροστού εύρους παλμών). Αν υπολογίσει κανείς την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια θα καταλήξει, εκμεταλλευόμενος τις ιδιότητες της δέλτα συνάρτησης, στη

$$V(x) = -\int_0^x F(x')dx' = -Fa\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x \delta(x' - ka)dx' = -Fa\sum_{k=0}^{[x/a]} 1 = -Fa\left([x/a] + 1\right),$$

[7] Οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις Lorentz είναι δυνάμεις που εξαρτώνται και από την ταχύτητα. Δεν παύουν όμως και αυτές να είναι συντηρητικές δυνάμεις (διατηρούν την ενέργεια) αφού ασκούνται κάθετα στην κίνηση των φορτίων.

[8] Το γιατί η έκφραση Fa έχει διαστάσεις δύναμης F επί θέσης a δικαιολογείται αν σκεφθείτε τι διαστάσεις έχει η συνάρτηση δέλτα.



όπου το $[\beta]$ δηλώνει το ακέραιο μέρος του αριθμού β. Η μορφή της δυναμικής ενέργειας φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Έτσι η ταχύτητα του τρένου αφότου περάσει τον n-στό παλμό (ο πρώτος παλμός είναι αυτός για $k=0$) μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας:

$$\frac{1}{2}mu_k^{2} - Fa\left(\left[\frac{x}{a}\right]+1\right) = 0 \Rightarrow u_n = \pm\sqrt{2Fna/m}\,.$$

Η αυθαιρεσία ως προς το πρόσημο δηλώνει ότι η κίνηση μπορεί να γίνεται είτε προς αυξανόμενο είτε προς ελαττούμενο x. Επιλέγοντας την προς τα θετικά x κίνηση, η μετάβαση του τρένου από τον n-στο παλμό στον επόμενο θα διεξαχθεί με ταχύτητα $\sqrt{2Fna/m}$ επομένως θα διαρκέσει χρόνο $t_n = \sqrt{ma/2Fn}$. Με άλλα λόγια το τρένο θα έχει διανύσει διάστημα na σε χρόνο

$$\sqrt{\frac{ma}{2F}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Το τελευταίο αυτό άθροισμα για μεγάλα n είναι περίπου ίσο με $\int_0^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{n}$, οπότε το διάστημα na απαιτεί χρόνο για να διανυθεί

$$t(x=na) = \sqrt{\frac{2mna}{F}} = \sqrt{\frac{2mx}{F}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$$

Και στο παράδειγμα αυτό καταλήξαμε, για μεγάλους τουλάχιστον χρόνους, στην έκφραση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης υπό την επίδραση σταθερής δύναμης. Παρά την ομοιότητα των τελικών αποτελεσμάτων αυτού του παραδείγματος και του παραδείγματος της χρονοεξαρτώμενης δύναμης, ποια μέθοδο θα προτιμούσατε για τα τρένα της πόλης σας αν η τιμή παραγωγής του κάθε παλμού είτε χρονικού, είτε χωρικού ήταν η ίδια; (Συγκρίνετε την ταχύτητα που πετυχαίνει κάθε μέθοδος ύστερα από πολλούς, πολλούς παλμούς.)