Διάλεξη 2η
9/10/2000

Η ισχύς της νευτώνειας μηχανικής

Θα μπορούσε να ισχυριστεί κάποιος ότι η νευτώνεια μηχανική είναι πλέον ξεπερασμένη, αφού καινούριες θεωρίες (του 20ου αιώνα) φαίνονται να δίνουν πιο σωστή περιγραφή του φυσικού μας κόσμου· επομένως δεν έχει νόημα να ασχολείται κανείς με τη νευτώνεια μηχανική. Ένα τέτοιο επιχείρημα είναι εσφαλμένο για δύο κυρίως λόγους:

Καταρχάς, η καθημερινή πρακτική δεν βρίσκεται σε καμία αντίφαση με τους νόμους της νευτώνειας μηχανικής. Σε κάθε αντικείμενο που βρίσκεται σε κίνηση γύρω μας, οι νευτώνειοι νόμοι «δουλεύουν» απολύτως σωστά. Όχι όμως μόνο τα μηχανήματα καθημερινής χρήσης, αλλά ακόμη και τελευταίας τεχνολογίας επιτεύγματα, όπως τα διαστημόπλοια, υπακούουν πιστά στους νευτώνειους νόμους (μάλιστα οι επιστήμονες που σχεδιάζουν πτήσεις στο διάστημα εκτελούν όλους τους υπολογισμούς της τροχιάς των διαστημοπλοίων βασιζόμενοι στη νευτώνεια μηχανική). Το ίδιο το πλανητικό μας σύστημα, αλλά και οι γαλαξίες που μας περιβάλλουν κινούνται νευτώνεια με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια[1]. Ύστερα από όλα αυτά θα ήταν άδικο να θεωρήσουμε τη νευτώνεια μηχανική ξεπερασμένη.

Από την άλλη, όπως κάθε καινούρια θεωρία, έτσι και η νευτώνεια μηχανική έχει κάποια περιοχή ισχύος πέραν της οποίας αρχίζει να δίνει εσφαλμένα αποτελέσματα. Η αμέσως επόμενη θεωρία που έρχεται να καλύψει τα λάθη της προηγούμενης, επεκτείνοντας έτσι την περιοχή ισχύος, μπορεί να προσφέρει μια εντελώς ριζοσπαστική εικόνα —σε σχέση με την προηγούμενη θεωρία— για το πώς δουλεύει η φύση, δεν παύει όμως στην περιοχή ισχύος της προηγούμενης θεωρίας και οι δύο να δίνουν ταυτόσημες προβλέψεις. Διευρύνοντας, μέσω καινούριων θεωριών, την περιοχή ισχύος των φυσικών νόμων μπορεί η αντίληψη που αποκτούμε για τον κόσμο που μας περιβάλλει να αλλάζει δραστικά, οι διορθώσεις όμως των προβλέψεων για το μεγαλύτερο ποσοστό του φυσικού μας κόσμου είναι ολοένα και μικρότερες. Με αυτή την έννοια λοιπόν, που εξάλλου είναι και η πιο αντικειμενική, οι θεωρίες φαίνεται να συγκλίνουν γρήγορα σαν τους όρους μιας σειράς με πολύ γρήγορη σύγκλιση. [Στο βιβλίο του K. S. Thorne «*Μαύρες Τρύπες και Στρεβλώσεις του Χρόνου*» (*Εκδ. Κάτοπτρο*), μπορεί κανείς να διαβάσει στο τελευταίο υποκεφάλαιο του Κεφαλαίου 1 με τίτλο «*Η φύση του φυσικού νόμου*» μια εκτενέστερη έκθεση για τη διαδοχή των θεωριών και τη σύγκλιση αυτών.] Στα όρια ισχύος λοιπόν της νευτώνειας μηχανικής (δηλαδή για ταχύτητες μικρές συγκριτικά με την ταχύτητα του φωτός, με άλλα λόγια για όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες σήμερα, καθώς και για σώματα μεγάλα συγκριτικά με τις ατομικές διαστάσεις) η νευτώνεια μηχανική είναι απολύτως ορθή θεωρία, εφόσον δίνει απολύτως ορθές προβλέψεις.

Τέλος, ως πρώτη ιστορικά δυναμική θεωρία που προσπάθησε να ερμηνεύσει σωστά τη φύση, και μάλιστα τα κατάφερε με αξιοθαύμαστη επιτυχία, έχει ενδιαφέρον να τη μελετήσει κανείς και να γνωρίσει τον πλούτο των αποτελεσμάτων της, καθώς και την ώθηση που έδωσε στην επιστημονική κοινότητα να προχωρήσει σε γενικεύσεις της θεωρίας κάνοντάς τη πιο ευέλικτη πρακτικά (Λαγκρανζιανή και Χαμιλτονιανή θεώρηση) αλλά και προετοιμάζοντας ένα πιο ευρύ πλαίσιο για να οικοδομηθούν μεταγενέστερες θεωρίες (θεωρίες πεδίου).

---

[1] Ο πλανήτης Ερμής, από το ηλιακό μας σύστημα, φαίνεται περισσότερο ανυπάκουος στους νόμους του Νεύτωνα, στρέφοντας τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιάς του κατά 43 δευτερόλεπτα τόξου κάθε αιώνα!

Περί θεμελιωδών νόμων και δυνάμεων

Σε αντιδιαστολή με τους νόμους του Kepler, στους νόμους του Νεύτωνα διακρίνει κανείς άμεσα μια πολύ πιο θεμελιώδη μορφή. Ενώ οι νόμοι του Kepler αφορούν μόνο στο ηλιακό μας σύστημα, οι νόμοι του Νεύτωνα διατείνονται να έχουν παγκόσμια ισχύ. Ακόμη, ενώ οι νόμοι του Kepler, εγείρουν αυθόρμητα την ερώτηση «ποιο είναι το αίτιο αυτών των νόμων;», με τους νόμους του Νεύτωνα φαίνεται να καταλήγουμε στο βαθύτερο σημείο του πώς δουλεύει η φύση, δίχως να μας δίνεται η δυνατότητα να προχωρήσουμε σε βαθύτερα «γιατί;» Όταν μάλιστα κατασκευάσουμε αργότερα το 2ο νόμο του Νεύτωνα καθώς και τον 3ο από στοιχειώδεις συμμετρίες που θα επιβάλλουμε να διαθέτει η φύση (σύμφωνα και με παρατηρήσεις μας αλλά και με τη βαθύτερη πεποίθησή μας ότι ο κόσμος γύρω μας είναι πολύ απλός στην ουσία του), θα διαπιστώσουμε καλύτερα τη θεμελιακότητα των νευτώνειων νόμων, αφού η ύπαρξη συγκεκριμένων συμμετριών του σύμπαντος αγγίζει τα όρια της απλότητας.

Μια αντίστοιχη διάκριση σε θεμελιώδεις και μη, μπορούμε να έχουμε και για τις κάθε λογής δυνάμεις που έχουμε μάθει να αναγνωρίζουμε ως αίτια της κινητικής κατάστασης των διαφόρων σωμάτων του κόσμου. Στην απέραντη λίστα των βαρυτικών δυνάμεων, πυρηνικών δυνάμεων, ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων, δυνάμεων τριβής, δυνάμεων εξαιτίας ελαστικής παραμόρφωσης, αντιστάσεων λόγω κίνησης μέσα σε συνεχή μέσα, φυγοκέντρων δυνάμεων, κλπ. υπάρχουν κάποιες προνομιακές δυνάμεις που ξεχωρίζουν για το ότι περιγράφουν σε όσο το δυνατό πιο θεμελιώδες επίπεδο τις αλληλεπιδράσεις της ύλης; Πράγματι, η βαρυτική, για παράδειγμα, δύναμη η οποία περιγράφει την έλξη μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημειακών μαζών σα συνάρτηση της μάζας αυτών και της απόστασής τους, εκτός του ότι έχει καθολική ισχύ και έχει ελεγχθεί ότι ισχύει με εξαιρετική ακρίβεια από αστέρες μέχρι μικροσκοπικά σφαιρίδια, δεν μπορεί να τεθεί σε πιο στοιχειώδη ανάλυση (εκτός ίσως αν καταφύγει κανείς σε θεωρίες πεδίου και εισάγει σωματίδια που είναι υπεύθυνα για τη μεταφορά της πληροφορίας περί της ύπαρξης βαρυτικού πεδίου). Αντίθετα, η δύναμη της τριβής, την οποία μαθαίνει κανείς να γράφει ως μια σταθερά εξαρτώμενη από τις επιφάνειες επαφής επί την κάθετη δύναμη η οποία πιέζει το ένα τριβόμενο σώμα επάνω στο άλλο, δεν φαίνεται να έχει την ίδια θεμελιακή προέλευση όπως η βαρύτητα. Αν την ερευνήσει κανείς λίγο πιο προσεκτικά, θα δει ότι αυτό που ονομάζουμε τριβή είναι ένα στατιστικό σύνολο, ηλεκτρομαγνητικής φύσης δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των επιφανειακών κυρίως μορίων των υλικών που έρχονται σε επαφή. Η τραχύτητα των επιφανειών δεν είναι αρκετή να περιγράψει ικανοποιητικά την τριβή, αφού αυτό που συμβαίνει δεν είναι ότι οι κορυφές και οι κοιλάδες της μιας επιφάνειας σύρονται επάνω στις κορυφές και τις κοιλάδες της άλλης ανεβοκατεβάζοντας τελικά το ένα σώμα σε σχέση με το άλλο. Κάτι τέτοιο εξάλλου δεν θα οδηγούσε σε ενεργειακές απώλειες λόγω τριβής! Αυτό που πιο σωστά περιγράφει την τριβή είναι το διαρκές σπάσιμο και η επανασύνδεση κομματιών της κάθε επιφάνειας εξαιτίας συγκρούσεων με κομμάτια της άλλης. (Για μια πιο εμπεριστατωμένη ανάλυση της τριβής διαβάστε το σχετικό κεφάλαιο 12-2 του βιβλίου του Feynman «*The Feynman lectures on Physics*» καθώς και το σύγχρονο σχετικό άρθρο που σας προτείνεται στις ενδιαφέρουσες ιστοσελίδες). Επίσης, οι δυνάμεις λόγω ελαστικής παραμόρφωσης, όπως αυτή που μας κρατά πάνω σε μια ζυγαριά με ελατήριο, είναι παρόμοιας φύσης· πρόκειται ουσιαστικά για ηλεκτροστατικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ γειτονικών μορίων όταν κάποιο εξωτερικό αίτιο αναγκάσει ένα στερεό να παραμορφωθεί αλλάζοντας έτσι τη θέση των μορίων σε σχέση με την αρχική θέση ισορροπίας τους. Τέλος, εκτός των θεμελιωδών δυνάμεων-αλληλεπιδράσεων και των δυνάμεων που προκύπτουν ως στατιστικό σύνολο θεμελιωδών δυνάμεων υπάρχουν και ψευδοδυνάμεις· δυνάμεις οι οποίες κάνουν την

εμφάνιση τους όταν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τους νόμους του Νεύτωνα σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς, όπως για παράδειγμα η φυγόκεντρος δύναμη σε περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς. Στην ουσία τέτοιες δυνάμεις δεν υπάρχουν καν· είναι καθαρή «ψευδαίσθηση» των μη αδρανειακών παρατηρητών και εμφανίζονται να παίζουν το ρόλο δυνάμεων όταν γράψει κανείς τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για ένα μη αδρανειακό σύστημα. Το κάθε μη αδρανειακό σύστημα εμπεριέχει εν δυνάμει τέτοιες «δυνάμεις» και παράλληλα μοναδική πηγή αυτών των «δυνάμεων» είναι η μη αδρανειακότητα του συστήματος[2].
Οι θεμελιώδεις δυνάμεις, ωσάν τέτοιες, θα πρέπει να βρίσκονται σε συμφωνία με τις συμμετρίες του Σύμπαντος. Το Σύμπαν όπως φαίνεται από παρατηρήσεις είναι ομογενές (έχει τις ίδιες ιδιότητες και περιγράφεται από τους ίδιους φυσικούς νόμους σε κάθε σημείο του) και ισότροπο (όπως και αν προσανατολίσουμε ένα σύστημα αναφοράς προκειμένου να διεξάγουμε ένα οποιοδήποτε πείραμα η έκβαση του πειράματος θα είναι η ίδια). Επιπλέον, μια ακόμη συμμετρία, κάπως πιο περίτεχνα κρυμμένη στη δομή του Σύμπαντος, διέπει αυτό: πρόκειται για τη γαλιλαϊκή συμμετρία σύμφωνα με την οποία οι φυσικοί νόμοι δεν αλλάζουν αν αλλάξουμε αδρανειακό σύστημα αναφοράς για την περιγραφή αυτών (περισσότερα σχετικά με τις συμμετρίες των φυσικών νόμων θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο). Οι συμμετρίες αυτές θα πρέπει να εμπεριέχονται και στις θεμελιώδεις δυνάμεις, οι νόμοι δηλαδή που περιγράφουν αυτές δεν θα πρέπει να εξαρτώνται ούτε από τη θέση στο Σύμπαν που βρίσκονται τα αλληλεπιδρώντα σώματα, ούτε από τη διεύθυνση που έχει η ευθεία που τα συνδέει, ούτε και από την ταχύτητα που έχει το καθένα από αυτά, ούτε φυσικά και από τη χρονική στιγμή (σε διαφορετική περίπτωση οι φυσικοί θα ήταν σε πολύ δύσκολη θέση αφού οι φυσικοί νόμοι θα ήταν κάθε μέρα διαφορετικοί). Συνεπώς όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις μεταξύ υλικών σωματιδίων θα πρέπει να έχουν γενική μορφή:

$$\left|\vec{F}_{\theta\varepsilon\mu\varepsilon\lambda}\right| = f(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|, |\vec{u}_1 - \vec{u}_2|, \theta_{\Delta\vec{x},\Delta\vec{u}}),$$

όπου $\theta_{\Delta\vec{x},\Delta\vec{u}}$ είναι η γωνία μεταξύ της σχετικής θέσης $\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, και της σχετικής ταχύτητας $\Delta\vec{u} \equiv \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ των δύο αλληλεπιδρώντων σωματίων[3]. Ειδικά, η βαρυτική δύναμη δεν φαίνεται να εξαρτάται από την σχετική κίνηση δύο μαζών, παρά μόνο από την μεταξύ τους απόσταση και αυτό είναι απ' ότι φαίνεται γενικός νόμος για τις θεμελιώδεις δυνάμεις.

$$\left|\vec{F}_{\theta\varepsilon\mu\varepsilon\lambda}\right| = f(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|).$$

Στην περίπτωση των ηλεκτρικών φορτίων, όπου μαθαίνει κανείς πως οι μεταξύ τους δυνάμεις εξαρτώνται και από την ταχύτητα που κινούνται αυτά, γρήγορα καταλαβαίνει ότι μόνο στο πλαίσιο της σχετικιστικής θεώρησης μπορεί να μελετήσει τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις (για παράδειγμα υπολογίστε τις ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ δύο φορτίων που κινούνται παράλληλα το ένα στο άλλο με κοινή ταχύτητα, αρχικά στο σύστημα του εργαστηρίου και στη συνέχεια στο σύστημα που τα φορτία είναι ακίνητα – η διαφορά στη δύναμη αλληλεπίδρασης είναι έκδηλη αλλά είναι τάξης $(u/c)^2$). Στο σχετικιστικό πλαίσιο θεώρησης (το μοναδικό πλαίσιο όπου μπορούν να υπολογιστούν σωστά χωρίς προβλήματα αντίφασης οι

[2] Όλες οι μη αδρανειακές ψευδοδυνάμεις έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό· είναι ανάλογες της μάζας του σώματος. Το ίδιο και οι βαρυτικές! Αυτή είναι μια πρώτη υποψία, που αποδείχθηκε πολύ σοβαρή και τελικά βάσιμη, ότι η βαρύτητα δεν είναι μια αυθεντική δύναμη αλλά ψευδοδύναμη· αποτέλεσμα της κίνησης σε καμπύλους χώρους.

[3] Αν επιπλέον τα αλληλεπιδρώντα σώματα έχουν και εσωτερική δομή, πιθανώς να επηρεάζει και αυτή την μεταξύ τους αλληλεπίδραση.

ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις), η σχετική ταχύτητα δύο συστημάτων αναφοράς δεν είναι τίποτε άλλο από μια στροφή στον τετραδιάστατο χωρόχρονο και αυτό που συνηθίζουμε κλασικά να περιγράφουμε ως ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις δεν είναι τίποτε άλλο από συνιστώσες ενός τανυστή (ένα είδος γενίκευσης των γνωστών διανυσμάτων), οι οποίες αλλάζουν όταν εκτελέσουμε μια γενικευμένη στροφή στο χωρόχρονο. Η αλληλεπίδραση και σε αυτή την περίπτωση εξαρτάται *μόνο* από την σχετική απόσταση των δύο φορτίων όταν αυτά βρίσκονται σε ηρεμία το ένα ως προς το άλλο και με μια κατάλληλη στροφή του τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (που δημιουργεί το ένα εξ αυτών στη θέση του άλλου) μπορούμε να διαβάσουμε την αλληλεπίδραση τους όταν κινούνται το ένα ως προς το άλλο. Έτσι και στην περίπτωση των ηλεκτρικών φορτίων η θεμελιώδης δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών είναι η δύναμη του Coulomb που εξαρτάται μόνο από την απόστασή τους.

Τι μένει λοιπόν;

Γνωρίζοντας πλέον τους νόμους του Νεύτωνα τι άλλο χρειαζόμαστε; Αν κάποιος μας δώσει τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης, που όπως ξέρουμε εμφανίζονται κατά ζεύγη, σε ένα σύστημα σωμάτων αρκεί να ολοκληρώσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν γράφοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα και ιδού η εξέλιξη του συστήματος. Ακόμη και αν δεν γνωρίζουμε πώς να λύσουμε τις εξισώσεις αυτές, μπορούμε να ζητήσουμε τη βοήθεια ενός υπολογιστή. Ας δούμε πώς μπορούμε με τη βοήθεια ενός υπολογιστή να υπολογίσουμε την εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος.

Έστω ένα σωματίδιο ευρισκόμενο στη θέση $\vec{x}_0$ και κινούμενο με ταχύτητα $\vec{u}_0$. Ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα δt αργότερα το σωματίδιο θα βρεθεί στη θέση $\vec{x}_0 + \vec{u}_0\delta t$. Η δε ταχύτητα του σωματιδίου θα μεταβληθεί σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα και θα γίνει $\vec{u}_0 + \left(\frac{\vec{F}_0}{m}\right)\delta t$. Οι προηγούμενες σχέσεις είναι τόσο περισσότερο ακριβείς όσο μικρότερο είναι το χρονικό βήμα δt, αφού μόνο τότε οι παράγωγοι στους ορισμούς της ταχύτητας και της επιτάχυνσης μπορούν να θεωρηθούν ως πραγματικά κλάσματα ποσοτήτων. Δεδομένου του βήματος, όλες οι άλλες ποσότητες είναι γνωστές· η δύναμη $\vec{F}_0$ είναι η αρχική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο και θεωρείται γνωστή αφού είναι γενικά συνάρτηση θέσης, ταχύτητας και χρόνου. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, ξεκινώντας κάθε φορά από τη νέα θέση και ταχύτητα, μπορούμε με διαδοχικά βήματα να βρούμε την τροχιά του σωματιδίου. Η εργασία αυτή είναι ιδανική για έναν υπολογιστή.

ΤΑ ΒΗΜΑΤΑ

ΑΡΧΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ: $\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{F}(\vec{x}, \vec{u}, t)$

ΓΙΑ $i = 1$ ΕΩΣ N

$$\vec{x}_i = \vec{x}_{i-1} + \varepsilon \vec{u}_{i-1}$$

$$\vec{u}_i = \vec{u}_{i-1} + \varepsilon \frac{\vec{F}\left(\vec{x}_{i-1}, \vec{u}_{i-1}, (i-1)\varepsilon\right)}{m}$$

ΕΠΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ i

Αν θέλαμε να είμαστε ακόμη πιο ακριβείς στους υπολογισμούς μας, καλό θα ήταν να λαμβάναμε υπόψη και το γεγονός ότι η κίνηση από το ένα σημείο στο άλλο δεν γίνεται με σταθερή ταχύτητα αλλά, εξαιτίας της επίδρασης της δύναμης, αυτή μεταβάλλεται. Έτσι μια ακόμη καλύτερη προσέγγιση θα ήταν η ακόλουθη:

$$\vec{x}(t+\delta t) = \vec{x}(t) + \vec{u}(t)\delta t + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}(\vec{x}(t),\vec{u}(t),t)}{m}\delta t^2$$

Στην πραγματικότητα η σχέση που γράψαμε δεν είναι τίποτε άλλο από τους 3 πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης $\vec{x}(t)$ και όπως γνωρίζετε όσο περισσότερους όρους κρατήσει κανείς στο ανάπτυγμα αυτό τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια θα αποκομίσει, με ανάλογο όμως κόστος στο χρόνο των υπολογισμών.

Μια έξυπνη εναλλακτική ιδέα, προκειμένου να βελτιώσει κανείς την ακρίβεια των υπολογισμών δίχως όμως να αυξήσει το υπολογιστικό φορτίο, είναι η εξής: Γνωρίζοντας ότι η ταχύτητα αλλάζει εν γένει κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ταχύτητα κατά τη διάρκεια του βήματος είναι μεν σταθερή αλλά δεν είναι αυτή που έχει το σωματίδιο στην αρχή του βήματος, παρά είναι η ταχύτητα που θα έχει το σωματίδιο στο μέσο του βήματος (κάτι σαν τη μέση ταχύτητα κατά τη διάρκεια του βήματος). Και ότι, αντίστοιχα, η ταχύτητα δεν αλλάζει εξαιτίας της δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο στην αρχή του βήματος αλλά εξαιτίας της δύναμης στο μέσο του βήματος (κάτι σαν τη μέση δύναμη). Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να υπολογίζουμε τη θέση στα χρονικά διαστήματα $0, \delta t, 2\delta t, \ldots$ κλπ και την ταχύτητα στα ενδιάμεσα διαστήματα $\delta t/2, 3\delta t/2, \ldots$κλπ.

ΤΑ ΒΗΜΑΤΑ

ΑΡΧΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ: $\vec{x}_0, \vec{u}_0, \vec{F}(\vec{x},\vec{u},t)$

$$\vec{u}(\varepsilon/2) = \vec{u}_1 = \vec{u}_0 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{u}_0,0)}{m}$$

ΓΙΑ $i = 1$ ΕΩΣ N

$$\vec{x}_i = \vec{x}_{i-1} + \varepsilon\vec{u}_i$$

$$\vec{u}_{i+1} = \vec{u}_i + \varepsilon\frac{\vec{F}(\vec{x}_i,\vec{u}_i,i\varepsilon)}{m}$$

ΕΠΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ i

Ένα πρόγραμμα σαν αυτό εμπεριέχει το ίδιο πλήθος υπολογισμών όπως και το προηγούμενο σε πλαίσιο πρόγραμμα, παρ' όλ' αυτά η ακρίβεια του 2ου είναι σαφώς μεγαλύτερη από του προηγούμενου (επαληθεύστε το στην περίπτωση της κίνησης πλανήτη γύρω από ένα ελκτικό κέντρο υπό την επίδραση βαρυτικής έλξης· χρησιμοποιώντας το ίδιο βήμα ποια από τις δύο μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης οδηγεί σε πιο κλειστή τροχιά;) Στο φυλλάδιο «*Αριθμητική Ολοκλήρωση*» μπορείτε να δείτε το αποτέλεσμα αυτού του υπολογισμού και να διαπιστώσετε ότι οδηγεί σε ελειπτική τροχιά. Μπορείτε ακόμη επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό με διαφορετικές αρχικές συνθήκες να επιβεβαιώσετε «πειραματικά» τον 3ο νόμο του Kepler. Όσο για την ακρίβεια των υπολογισμών μπορείτε να επιλέξετε τόσο μικρό βήμα ε ώστε μειώνοντας ακόμη περισσότερο αυτό, να μην παρουσιάζεται εμφανής διαφορά των αποτελεσμάτων.

Αν το παραπάνω παράδειγμα σας φαίνεται απλουστευμένο τι θα λέγατε αν υπολογίζατε την εξέλιξη ή ακόμη και το παρελθόν του Ηλιακού μας συστήματος; Πρόκειται για ένα σύστημα 10 σωμάτων (του Ήλιου και των 9 πλανητών αν αγνοήσουμε σε πρώτη προσέγγιση τους δορυφόρους και τα άλλα μικρά ουράνια σώματα εντός του ηλιακού μας συστήματος). Επομένως μπορεί να γράψει κανείς τη δύναμη που ασκείται στο καθένα από αυτά ως το άθροισμα 9 βαρυτικών δυνάμεων:

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{10} -\frac{G m_i m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)$$

Πόσες πράξεις απαιτούνται; (10 σώματα) x [3 πράξεις για ένα βήμα προώθησης της θέσης + 3 πράξεις για ένα βήμα προώθησης της ταχύτητας + 3 συνιστώσες της δύναμης για κάθε θέση των σωμάτων x (9 όροι δυνάμεων + 1 άθροιση 9 όρων)] x (1000 ας πούμε βήματα ανά έτος) = 360.000 υπολογισμοί ανά έτος. Ένας σύγχρονος υπολογιστής με δυνατότητα εκτέλεσης 10^7 πράξεων ανά δευτερόλεπτο θα μπορούσε να δείξει την εξέλιξη του Ηλιακού συστήματος κατά 30 έτη μέσα σε ένα δευτερόλεπτο, ή αν τον αφήναμε να εργάζεται για ένα χρόνο θα μας έδινε το στίγμα των πλανητών ένα δισεκατομμύριο χρόνια στο μέλλον ή στο παρελθόν! (Όπως θα συζητήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο ο 2ος νόμος του Νεύτωνα παραμένει αναλλοίωτος σε αντιστροφή του χρόνου). Παρόμοιες ολοκληρώσεις έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια (Wisdom, 1990) προκειμένου να ελεγχθεί η ευστάθεια ή μη του Ηλιακού μας συστήματος και στηρίζονται κατά μεγάλο μέρος σε μεθόδους η ακρίβεια των οποίων βασίζεται σε εργαλεία που έχουν προκύψει από τη θεωρητική ανάλυση μηχανικών συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας (μέθοδος διαταραχών του Poincaré).

Κλείνοντας το παρόν κεφάλαιο θα συνοψίζαμε λέγοντας ότι ουσιαστικά γνωρίζοντας τους νόμους του Νεύτωνα μπορούμε να προβλέψουμε με απλούς (όπως δείξαμε) υπολογισμούς την κίνηση κάθε μηχανικού συστήματος (αυτό εξάλλου κάνουν και οι διαστημικές εταιρείες όταν στέλνουν ένα δορυφόρο στο Διάστημα). Η εύρεση αναλυτικών λύσεων σε συγκεκριμένα προβλήματα εφαρμογής των νόμων του Νεύτωνα με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια δεν έχει ουσιαστικά κανένα πλεονέκτημα ως προς την πρόβλεψη της εξέλιξης μηχανικών συστημάτων σε σχέση με την παραπάνω προσεγγιστική – αριθμητική μέθοδο αφού ακόμη και αυτό το σφάλμα της αριθμητικής μεθόδου εξαιτίας των πεπερασμένων βημάτων μπορεί να εξαλειφθεί κάνοντας το βήμα ακόμη μικρότερο. Παρά ταύτα η ανάλυση συγκεκριμένων συστημάτων (αν και εξιδανικευμένα σε σχέση με τα πραγματικά φυσικά συστήματα) που διέπονται από τους νόμους του Νεύτωνα, θα μας οδηγήσει σε καινούρια εργαλεία και νέες φυσικές ποσότητες τα οποία και βαθύτερη κατανόηση στο πώς δουλεύει η φύση θα μας προσφέρουν και μπορούν να αποδειχθούν χρήσιμα στην εξυπνότερη χρήση αριθμητικών υπολογισμών αυξάνοντας έτσι την προβλεπτική ικανότητα των τελευταίων.