Διάλεξη 6η

Χώρος φάσεων

Μέχρι τώρα παριστάναμε την κίνηση ενός σωματιδίου, ή γενικότερα ενός μηχανικού συστήματος, σε ένα χώρο τόσων διαστάσεων όσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας που απαιτούνται για να καθοριστεί πλήρως η θέση αυτού. Για παράδειγμα, ένα σωματίδιο σε ένα μονοδιάστατο κόσμο παρουσιαζόταν ως ένα σημείο πάνω σε μια ευθεία, ενώ την τροχιά μιας μύγας σε ένα δωμάτιο την παριστάνουμε με μια καμπύλη στον τρισδιάστατο χώρο με παράμετρο το χρόνο. Ο χώρος αυτός καλείται *θεσεογραφικός χώρος* (configuration space)[1]. Φυσικά, αν το μηχανικό σύστημα απαρτίζεται από δύο ή περισσότερα σωματίδια, η κίνησή του στο θεσεογραφικό χώρο περιγράφεται από τόσες καμπύλες όσα και τα σωματίδια.

Ένας άλλος χώρος ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγραφεί η κίνηση ενός μηχανικού συστήματος είναι ο *χώρος των φάσεων* (phase space), ένας χώρος αποτελούμενος από τη θέση και την αντίστοιχη ορμή[2] για κάθε βαθμό ελευθερίας του συστήματος, για παράδειγμα το σωματίδιο στο μονοδιάστατο κόσμο περιγράφεται με μια καμπύλη στο χώρο $x - m\dot{x}$, ενώ η μύγα, θεωρούμενη ως σωματίδιο, περιγράφεται με μια καμπύλη στον εξαδιάστατο χώρο $x - m\dot{x} - y - m\dot{y} - z - m\dot{z}$. Μια βασική διαφορά από τον θεσεογραφικό χώρο αποτελεί το γεγονός ότι ένα μηχανικό σύστημα αποτελούμενο από πολλά σωματίδια περιγράφεται στο χώρο των φάσεων από *μία* καμπύλη αφού για τον κάθε βαθμό ελευθερίας του *κάθε* σωματιδίου υπάρχει το αντίστοιχο ζεύγος μεταβλητών θέσης-ορμής.

Ο χώρος της φάσης, όντας μεγαλύτερης διάστασης από τον αντίστοιχο θεσεογραφικό χώρο, εμπεριέχει πολύ περισσότερες πληροφορίες όσον αφορά την κίνηση του μηχανικού συστήματος. Η τροχιά ενός σωματιδίου μπορεί να είναι απολύτως όμοια με την τροχιά κάποιου άλλου, αλλά να εξελίσσεται με εντελώς διαφορετικό τρόπο (για παράδειγμα ένα μπαλόνι που ανεβαίνει στον ουρανό κατακόρυφα, προφανώς κινείται πολύ διαφορετικά από ένα νόμισμα που πετάτε κατακόρυφα προς τα επάνω παρόλο που η τροχιά τους είναι πανομοιότυπη). Στο χώρο των φάσεων κάθε καμπύλη αντιπροσωπεύει μια μοναδική εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος (το μπαλόνι και το νόμισμα του προηγούμενου παραδείγματος θα ακολουθούσαν εντελώς διαφορετικές πορείες στο χώρο των φάσεων). Μάλιστα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι παρατηρώντας μια καμπύλη στο χώρο των φάσεων είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε πλήρως την ιστορία του μηχανικού συστήματος.

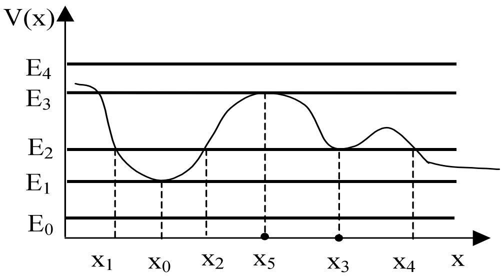
Αφού, όπως έχουμε πει, η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα ενός σωματιδίου είναι αρκετά για να καθοριστεί πλήρως η εξέλιξή του, από κάθε σημείο του χώρου των φάσεων δεν μπορεί παρά να περνά μία και μόνο μία καμπύλη. Οι δυνατές πορείες ενός σωματιδίου, και γενικότερα ενός μηχανικού συστήματος, στο χώρο των φάσεων δεν είναι δυνατόν να τέμνονται.

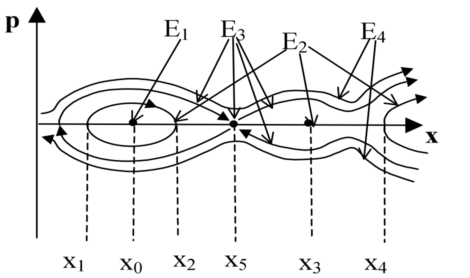
---

[1] Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ο θεσεογραφικός χώρος δεν είναι κατ' ανάγκη ο πραγματικός χώρος μέσα στον οποίο εξελίσσεται η κίνηση ενός μηχανικού συστήματος· μπορεί κάλλιστα να είναι οποιοσδήποτε χώρος, ίδιας διάστασης, αποτελούμενος από κάποιες άλλες μεταβλητές που καθορίζουν τη θέση του, π.χ. ο μονοδιάστατος χώρος της γωνίας περιστροφής ενός εκκρεμούς που κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο.

[2] Προς το παρόν, θα έχουμε στο μυαλό μας την ορμή απλώς ως το γινόμενο της μάζας του σώματος επί το ρυθμό αλλαγής της αντίστοιχης θέσης.

Ας δούμε ένα παράδειγμα διαγράμματος φάσης για ένα σωματίδιο που κινείται σε μια διάσταση (το διάγραμμα φάσης για κίνηση σωματιδίου σε περισσότερες από μία διαστάσεις δεν έχει τίποτε ουσιαστικά διαφορετικό από αυτό του παραδείγματός μας, εκτός από τον αριθμό των διαστάσεων του, που θα καθιστούσε τη σχεδίαση του αδύνατη) υπό την επίδραση του δυναμικού $V(x)$ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Προκειμένου να έχουμε μια πλήρη πληροφόρηση σχετικά με κάθε δυνατή κίνηση του σωματιδίου θα χρησιμοποιήσουμε, όπως και σε προηγούμενο παράδειγμα, την ενέργεια του σωματιδίου ως παράμετρο για την κάθε καμπύλη που θα σχεδιάσουμε στο διάγραμμα φάσης.





(α) Προφανώς ενέργεια ίση με E_0 είναι ανεπίτρεπτη για το σωματίδιο. Επομένως δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε και καμία καμπύλη στο χώρο των φάσεων που να αντιστοιχεί στην ενέργεια αυτή. (β) Ενέργεια ίση με E_1 μπορεί να έχει το σωματίδιο μόνο αν βρίσκεται ακίνητο στη θέση ευσταθούς ισορροπίας x_0. Στην ενέργεια αυτή αντιστοιχεί η εκφυλισμένη σε σημείο καμπύλη στη θέση $x = x_0, p = 0$. (γ) Στο αμέσως επόμενο ενεργειακό επίπεδο E_2 το σωματίδιο μπορεί είτε να κινείται μεταξύ των σημείων x_1, x_2 —οπότε στο διάγραμμα φάσης διαγράφει μια κλειστή καμπύλη γύρω από το σημείο της ευσταθούς ισορροπίας άλλοτε κινούμενο με θετική ταχύτητα (πάνω από τον άξονα των x) και άλλοτε με αρνητική ταχύτητα (κάτω από τον άξονα των x)—, είτε να στέκεται ακίνητο στο σημείο ευσταθούς ισορροπίας x_3 —οπότε στο διάγραμμα φάσης η αντίστοιχη «καμπύλη» είναι το σημείο με συντεταγμένες $(x_3, 0)$ —, είτε να κινείται δεξιά από το σημείο x_4 —οπότε η αντίστοιχη καμπύλη στο διάγραμμα φάσης είναι η ανοιχτή καμπύλη στα δεξιά του διαγράμματος η οποία τέμνει άπαξ τον άξονα x αφού το σωματίδιο θα περάσει από το σημείο x_4 μόνο αν κινείται στην αντίστοιχη επιτρεπόμενη περιοχή προς τα αριστερά, και στη συνέχεια θα απομακρυνθεί στο $+\infty$. (δ) Στην ενέργεια E_3 αντιστοιχούν το πλήθος των καμπυλών που σημειώνονται στο διάγραμμα. Είναι εύκολο να καταλάβει κανείς τη μορφή των καμπυλών αυτών, μεταξύ των οποίων συμπεριλαμβάνεται και το σημείο ευσταθούς ισορροπίας με συντεταγμένες $(x_5, 0)$. Η στένωση των καμπυλών δεξιά του σημείου ασταθούς ισορροπίας οφείλεται στο πέρασμα του σωματιδίου από την περιοχή του μικρού όρους δυναμικού που προκαλεί μείωση της ταχύτητας (και συνάμα της ορμής). (ε) Τέλος στην ενέργεια E_4 αντιστοιχούν οι δύο καμπύλες που περικλείουν όλες τις άλλες. Η ανώτερη αντιστοιχεί σε κίνηση του σωματιδίου προς τα δεξιά, με θετική ταχύτητα και ορμή, ενώ η κατώτερη προς τα αριστερά, με αρνητική ταχύτητα και ορμή. Η στένωση παρατηρείται και εδώ για τους ίδιους ακριβώς λόγους. Η φορά διαγραφής των καμπυλών είναι πάντα δεξιόστροφη αφού θετικές ορμές (επάνω από τον άξονα-x) σημαίνουν κίνηση προς ολοένα και μεγαλύτερα x, και αντίστροφα.

Μια γενική παρατήρηση στα διαγράμματα φάσης είναι ότι αφού για κίνηση σωματιδίου σε δυναμικό ισχύει ότι $p = \pm\sqrt{2m\big(E - V(x)\big)}$, οι καμπύλες στα διαγράμματα φάσης είναι συμμετρικές εκατέρωθεν του άξονα x. Αν όμως υπάρχουν και δυνάμεις οι οποίες δεν πηγάζουν από κάποιο δυναμικό, η συμμετρία αυτή εξαφανίζεται. Για παράδειγμα σκεφθείτε τι συμβαίνει στο διάγραμμα φάσης ενός αρμονικού ταλαντωτή καθώς σταδιακά η ενέργεια του ταλαντωτή μειώνεται λόγω ανάλωσης οφειλόμενης στις τριβές.

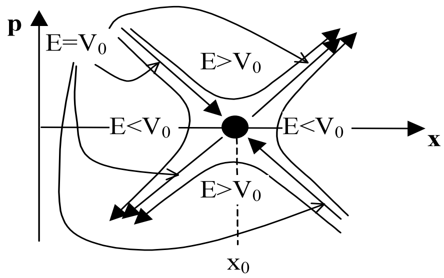
Εκτός από τη γενική ποιοτική περιγραφή των καμπυλών σε ένα διάγραμμα φάσης χρήσιμο είναι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των καμπυλών κοντά στα σημεία ισορροπίας. **Κοντά σε σημεία ευσταθούς ισορροπίας**, δηλαδή για ενέργειες μόλις μεγαλύτερες από τη δυναμική ενέργεια κάποιου τοπικού ελάχιστου είναι εύκολο να διαπιστώσετε με ανάπτυγμα του δυναμικού γύρω από το σημείο αυτό ότι

$$\frac{p^2}{2m(E - V_0)} + \frac{V_0''(x - x_0)^2}{2(E - V_0)} = 1,$$

όπου x_0 το σημείο ευσταθούς ισορροπίας και V_0, V_0'' η τιμή της δυναμικής ενέργειας και της δεύτερης παραγώγου της ως προς x στο σημείο αυτό. Η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση έλλειψης, οπότε και οι αντίστοιχες καμπύλες στο διάγραμμα φάσης είναι ελλείψεις. Αυτός είναι και ο λόγος που ονομάζουμε τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας στα διαγράμματα φάσης *ελλειπτικά* σημεία, αφού πρόκειται για εκφυλισμένες ελλείψεις με μηδενικές διαστάσεις. Ενώ, **κοντά σε σημεία ασταθούς ισορροπίας**, δηλαδή για ενέργειες ελαφρώς μεγαλύτερες ή μικρότερες από τη δυναμική ενέργεια κάποιου τοπικού μεγίστου (προσέξτε ότι στην περίπτωση σημείων ασταθούς ισορροπίας η ενέργεια επιτρέπεται να είναι είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη), η αντίστοιχη καμπύλη του διαγράμματος φάσης ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{p^2}{2m(E - V_0)} - \frac{V_0''(x - x_0)^2}{2(E - V_0)} = 1,$$

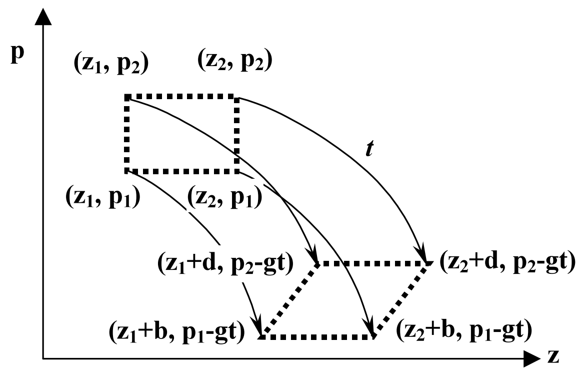
όπου τα σύμβολα έχουν το ίδιο νόημα όπως και στην προηγούμενη έκφραση. Η εξίσωση αυτή περιγράφει υπερβολές με άξονα συμμετρίας παράλληλο του άξονα των ορμών ($x = x_0$) αν $E > V_0$ και τον άξονα των θέσεων ($p = 0$) αν $E < V_0$. Οι καμπύλες, λοιπόν, που σχεδιάζουμε σε ένα διάγραμμα φάσης και περνούν πολύ κοντά από ένα σημείο ασταθούς ισορροπίας έχουν τη μορφή υπερβολών (βλέπε σχήμα), οπότε και το σημείο αυτό ονομάζεται *υπερβολικό*. Αν $E = V_0$ η παραπάνω εξίσωση εκφυλίζεται στην εξίσωση $p = \pm\sqrt{mV_o''}(x - x_0)$ των ασυμπτώτων των υπερβολών. Οι καμπύλες αυτές προσεγγίζουν οσοδήποτε το υπερβολικό σημείο αλλά δεν το αγγίζουν, αφού όπως συζητήσαμε σε προηγούμενη διάλεξη, το κινητό χρειάζεται άπειρο χρόνο για να φτάσει στο (ή να δραπετεύσει από το) σημείο ασταθούς ισορροπίας.



Ας εξετάσουμε τώρα μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες των διαγραμμάτων φάσης που καθιστούν τα διαγράμματα αυτά, εκτός από κομψές περιγραφές της εξέλιξης μηχανικών συστημάτων, ιδιαιτέρως χρήσιμα εργαλεία.

Θεώρημα Liouville[3]

Όπως θα δείξουμε στο επόμενο εξάμηνο, ένα χωρίο στο χώρο των φάσεων διατηρεί τον όγκο του κατά την εξέλιξη του μηχανικού συστήματος. Αυτό είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος του Liouville. Τι νόημα όμως μπορεί να έχει ένα χωρίο στο χώρο των φάσεων; Όπως είπαμε κάθε μηχανικό σύστημα διαγράφει μια καμπύλη στο χώρο των φάσεων, ορίζοντας κάθε χρονική στιγμή ένα μόνο σημείο. Μια περιοχή στο χώρο των φάσεων μπορεί να εκληφθεί είτε ως μια συλλογή από μηχανικά συστήματα με παρόμοιες αρχικές συνθήκες, τις οποίες εκφράζουν τα διαφορετικά σημεία της περιοχής, είτε ως μια πειραματική αβεβαιότητα στον καθορισμό των αρχικών συνθηκών ενός μόνο συστήματος. Το θεώρημα Liouville μας διαβεβαιώνει ότι παρόλο που τα διάφορα σημεία της περιοχής αβεβαιότητας θα ακολουθήσουν διαφορετικές καμπύλες στο χώρο των φάσεων, οδηγώντας ίσως σε πλήρη παραμόρφωση (πιθανώς μετά από αρκετό χρόνο) της περιοχής αβεβαιότητας, η καινούρια περιοχή θα έχει τον ίδιο ακριβώς όγκο με την αρχική. Παράδειγμα ενός μηχανικού συστήματος όπου συμβαίνουν δραματικές τέτοιες παραμορφώσεις είναι η ατμόσφαιρα και ο καιρός. Αν αρχικά διαθέταμε πολύ καλές μετρήσεις όλων των ατμοσφαιρικών παραμέτρων σε ολόκληρο τον πλανήτη, ύστερα από μερικές ημέρες η περιοχή του χώρου των φάσεων της ατμόσφαιρας που καθορίζεται από την πειραματική ακρίβεια των μετρήσεων μας θα διαχυθεί σε τέτοιο βαθμό ώστε να καταλήξει σε μια περιοχή πολύ μικρού μεν όγκου –όπως και η αρχική– αλλά με τρομακτικές διαστάσεις, δηλαδή τεράστια αβεβαιότητα στις παραμέτρους της. Αυτό είναι το βασικό γεγονός που καθιστά την μακροχρόνια πρόβλεψη του καιρού εξαιρετικά ανακριβή.



Ας δούμε ένα παράδειγμα διατήρησης του όγκου στο χώρο των φάσεων ενός απλού μηχανικού συστήματος. Θα θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που πέφτει κατακόρυφα μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης. Η θέση του και η ορμή του θα μετασχηματίζονται με την πάροδο του χρόνου σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$z_0 \xrightarrow[t]{} z_0 + \frac{p_0}{m}t - \frac{1}{2}gt^2 .$$
$$p_0 \xrightarrow[t]{} p_0 - gt$$

Επομένως, ένα αρχικά ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο χώρο των φάσεων θα αλλάζει θέση και θα παραμορφώνεται όπως στο σχήμα (όπου τα d, b είναι συντομογραφίες των $d = \frac{p_2}{m}t - \frac{1}{2}gt^2$, $b = \frac{p_1}{m}t - \frac{1}{2}gt^2$). Είναι εύκολο να δείτε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου (το οποίο από ορθογώνιο γίνεται ολοένα και πιο πλάγιο) παραμένει πάντα $(z_2 - z_1)(p_2 - p_1)$ επιβεβαιώνοντας το θεώρημα Liouville.

[3] Liouville Joseph (1809-1882) Γάλλος μαθηματικός· ανακάλυψε τους υπερβατικούς αριθμούς.