

Στροφορμή σωματιδίου -Από τους νόμους του Κέπλερ στο νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα

Εάν ένα σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\vec{r}$ ως προς την αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς και έχει ορμή $\vec{p}$ τότε η στροφορμή του σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς ορίζεται ως $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Το εξωτερικό γινόμενο ορίζει στις τρεις διαστάσεις ένα διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{p}$ και έχει τη διεύθυνση της κίνησης ενός δεξιόστροφου κοχλίου που στρέφεται με φορά από το $\vec{r}$ προς το $\vec{p}$, το δε μέτρο της στροφορμής ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα δύο διανύσματα: $rp \sin \theta$, όπου r το μέτρο του διανύσματος της θέσης, p το μέτρο του διανύσματος της ορμής και θ η γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα. Συνεπώς η στροφορμή είναι ανάλογη του ρυθμού που σαρώνει η επιβατική ακτίνα r εμβαδόν. Διότι σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα, Δt , η επιβατική ακτίνα ενός σωματιδίου θα βρεθεί από τη θέση $\vec{r}$ στη θέση $\vec{r} + \vec{v}\Delta t$ και έτσι η επιβατική ακτίνα του σωματιδίου θα διαγράψει στο χρονικό αυτό διάστημα επιφάνεια ίση σε μέτρο με $\Delta A = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|\Delta t$ και συνεπώς

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m}.$$

Εάν η στροφορμή ενός σωματιδίου είναι σταθερή τότε το σωματίδιο θα εκτελεί επίπεδη κίνηση: θα κινείται στο σταθερό επίπεδο που είναι κάθετο στο σταθερό διάνυσμα $\vec{L}$, διότι ανά πάσα στιγμή το διάνυσμα της θέσης θα είναι κάθετο στο σταθερό διάνυσμα της στροφορμής: $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$. Σε αυτή τη περίπτωση η επιβατική ακτίνα του σωματιδίου σε ίσους χρόνους θα διαγράφει ίσες επιφάνειες. Η τελευταία διατύπωση σας φέρνει στο νου τον δεύτερο νόμο του Κέπλερ σύμφωνα με τον οποίο οι τροχιές των πλανητών είναι επίπεδες και διαγράφουν σε ίσους χρόνους ίσες επιφάνειες. Από την παραπάνω συζήτηση αμέσως αναγνωρίζουμε ότι εφόσον η κίνηση των πλανητών είναι επίπεδη θα πρέπει το διάνυσμα της στροφορμής να έχει σταθερή διεύθυνση και επειδή η επιβατική ακτίνα διαγράφει σε ίσους χρόνους ίσες επιφάνειες θα πρέπει και το μέτρο της στροφορμής να είναι σταθερό, συνεπώς η στροφορμή του πλανήτη ως προς τον ήλιο διατηρείται. Ανακαλύψαμε δηλαδή ότι ο δεύτερος νόμος του Κέπλερ έχει την ισοδύναμη διατύπωση: η στροφορμή των πλανητών ως προς τον Ήλιο είναι σταθερή! Πότε όμως η στροφορμή ενός σωματιδίου ως προς κάποιο σημείο αναφοράς είναι σταθερή; Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

άρα

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}$$

όπου $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$ η ροπή της δύναμης ως προς το ίδιο σημείο αναφοράς που επιλέξαμε για τον ορισμό της στροφορμής. Συνεπώς για να διατηρείται η στροφορμή κατά τη κίνηση πρέπει (εφόσον η δύναμη δεν είναι μηδενική) η δύναμη να είναι κατά την ακτινική διεύθυνση, δηλαδή η δύναμη να είναι κεντρική.

Το ερώτημα το οποίο θα απαντήσουμε τώρα είναι δεδομένων των νόμων του Κέπλερ και των νόμων της μηχανικής του Νεύτωνα μπορούμε να προσδιορίσουμε το νόμο της δύναμης μεταξύ δύο ουρανίων σωμάτων ; Θα υποθέσουμε ότι το ένα από τα δύο ουράνια σώματα, ο Ήλιος, έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από τους πλανήτες έτσι ώστε να αμελήσουμε τη κίνηση του (θα δούμε αργότερα πως μπορούμε να συμπεριλάβουμε και τη κίνηση του Ήλιου).

Είδαμε ήδη ότι ο δεύτερος νόμος του Κέπλερ αποκαλύπτει ότι η δύναμη που ασκείται μεταξύ των πλανητών είναι κεντρική. Θα υποθέσουμε εξ αρχής ότι η δύναμη την οποία θέλουμε να προσδιορίσουμε είναι συντηρητική και συνεπώς το δυναμικό της δύναμης πρέπει να είναι συνάρτηση μόνο του μέτρου της απόστασης του πλανήτη από τον Ήλιο: $V(r)$ (Δείξτε ότι δεν μπορεί να υπάρχει εξάρτηση από τις γωνίες).

Πράγματι εάν $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(r) = -V'(r)\vec{\nabla}r = -V'(r)\frac{\vec{r}}{r}$ και η δύναμη είναι πράγματι κεντρική και συνεπώς επειδή η ροπή ως προς το κέντρο της δύναμης μηδενίζεται η στροφορμή ως προς το κέντρο της δύναμης διατηρείται.

Για να προσδιορίσουμε την εξάρτηση της δύναμης από την ακτίνα θα χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο νόμο του Κέπλερ ο οποίος αναφέρει ότι η τροχιά των πλανητών γύρω από τον Ήλιο είναι ελλειπτική με τον Ήλιο στην μία εστία της έλλειψης. Επειδή, η τροχιά είναι επίπεδη αρκούν για τον προσδιορισμό της οι πολικές συντεταγμένες της θέσης του πλανήτη ως προς τον Ήλιο (r, θ) . Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες γράφεται:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F \quad (1)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0. \quad (2)$$

Η πρώτη εξίσωση εξισώνει την ακτινική επιτάχυνση με την ακτινική δύναμη και η δεύτερη εξίσωση μηδενίζει τη γωνιακή επιτάχυνση δεδομένου ότι η δύναμη έχει μόνο ακτινική συνισταμένη. Η γωνιακή εξίσωση (2) ολοκληρώνεται αμέσως

(πολλαπλασιάστε την με r) και δίνει $\frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = 0$ δηλαδή όπως αναμέναμε η

στροφορμή του σωματιδίου είναι σταθερή $mr^2\dot{\theta} = L$. (Και αυτό διότι η ταχύτητα σε πολικές συντεταγμένες έχει συνιστώσες $(\dot{r}, r\dot{\theta}, 0)$, ενώ η θέση $(r, 0, 0)$ οπότε η στροφορμή είναι $mr^2\dot{\theta}$). Συνεπώς

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}. \quad (3)$$

Η παραπάνω σχέση είναι ιδιαίτερος ενδιαφέροντος. Μαθαίνουμε ότι εάν ξέρουμε τη στροφορμή και την απόσταση του πλανήτη από τον Ήλιο τότε γνωρίζουμε και τη

γωνιακή του ταχύτητα. Επίσης επειδή το $\frac{L}{mr^2}$ έχει σταθερό πρόσημο ο πλανήτης

πρέπει να περιστρέφεται πάντοτε γύρω από τον ήλιο με την ίδια φορά. Ο πλανήτης δεν μπορεί να αντιστρέψει την πορεία του, αν το έκανε η στροφορμή δεν θα ήταν διατηρήσιμο μέγεθος!

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1) λαμβάνουμε μία εξίσωση ως προς r :

$$m\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2} \frac{1}{r^3}\right) = F(r).$$

Έστω ότι γνωρίζουμε τη τροχιά $r = r(\theta)$, θα προσδιορίσουμε τη δύναμη που ασκείται στον πλανήτη. Θα μπορούσαμε κατευθείαν με παραγωγίσεις χρησιμοποιώντας και τη σχέση (3) να καταλήξουμε στη δύναμη. Υπάρχει όμως μία αντικατάσταση η οποία καθιστά αυτή τη διαδικασία ιδιαίτερος κομψή. Θεωρούμε ως μεταβλητή την γωνιακή ταχύτητα: $u = r\dot{\theta}$. Τότε λόγω της (3) έχουμε ότι

$$u = \frac{L}{mr},$$

και επειδή από τη (3) $\dot{\theta} = \frac{mu^2}{L}$, θα έχουμε:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = -u'$$

όπου ο τόνος συμβολίζει παραγωγή ως προς τη γωνία θ . Ομοίως βρίσκουμε ότι:

$$\ddot{r} = -\frac{m}{L} u^2 u'',$$

οπότε η χρονικά εξαρτώμενη ακτινική εξίσωση κίνησης μετατρέπεται σε διαφορική εξίσωση της τροχιάς:

$$u'' + u = -\frac{L}{m^2} \frac{f(u)}{u^2}, \quad (4)$$

όπου $f(u) \equiv F(r)$, ο νόμος της δύναμης εκφρασμένος στη μεταβλητή u .

Επανερχόμαστε στο πρόβλημα που αντιμετώπιζε ο Νεύτωνας: εάν η τροχιά των πλανητών γύρω από τον ήλιο σύμφωνα με τις παρατηρήσεις του Κέπλερ είναι ελλειπτική με τον Ήλιο στη μία εστία της έλλειψης τότε να προσδιορισθεί η δύναμη που ασκείται μεταξύ των πλανητών και του Ήλιου. Χρειάζεται να γράψουμε την εξίσωση της έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες. Η εξίσωση της έλλειψης με τον Ήλιο σε μία από της εστίες σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{με } e < 1. \quad (5)$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει την εξίσωση όλων των κωνικών τομών. Η παράμετρος e λέγεται εκκεντρότητα και για την έλλειψη είναι $e < 1$, για την παραβολή $e = 1$, και για την υπερβολή $e > 1$. Ο κύκλος προκύπτει όταν $e = 0$. Η εξίσωση της έλλειψης

(5) γράφεται ως προς τη μεταβλητή u : $u(\theta) = \frac{L}{pm}(1 + e \cos \theta)$ και αντικαθιστώντας

στην (4) έχουμε ότι $\frac{L}{pm} = -\frac{L}{m^2} \frac{f(u)}{u^2}$ και συνεπώς $f(u) = -\frac{m}{p} u^2$, δηλαδή η δύναμη

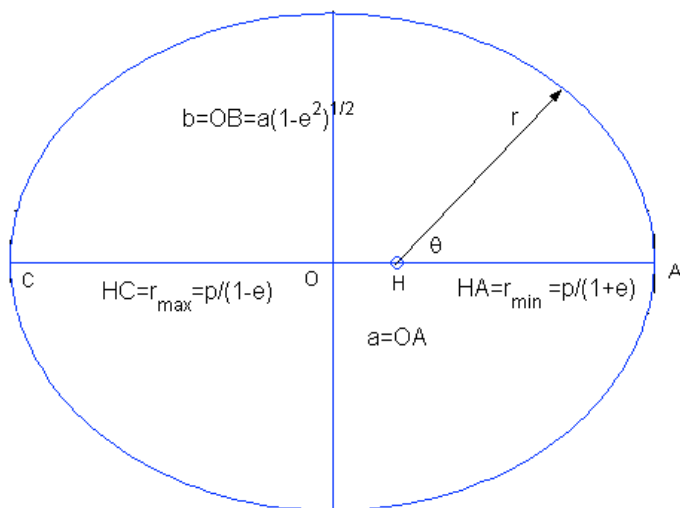
που απαιτείται για να είναι η τροχιά ελλειπτική είναι:

$$F(r) = -\frac{k^2}{r^2} \quad \text{όπου } k^2 = \frac{L^2}{mp} \quad (6)$$

Δηλαδή για να είναι η τροχιά του πλανήτη ελλειπτική με τον Ήλιο στη μία εστία η δύναμη πρέπει να είναι ελκτική και να είναι αντίστροφος του τετραγώνου της απόστασης από τον Ήλιο.

Για να φθάσουμε στη τελική διατύπωση του νόμου της βαρύτητας του Νεύτωνα θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και τον τρίτο νόμο του Κέπλερ σύμφωνα με τον οποίο $T^2 / a^3 = C$, όπου C μία σταθερά, T η περίοδος του πλανήτη γύρω από τον ήλιο και a ο μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς. Ο νόμος αυτός του Κέπλερ διαφέρει

από τους άλλους δύο διότι αφορά την κίνηση όλων των πλανητών του ηλιακού συστήματος και μας δίνει τη πληροφορία ότι η σταθερά C είναι η ίδια για τη Γη, τον Άρη, τον Δία κ.λ.π. Η πληροφορία αυτή θα αξιοποιηθεί για να καταλήξουμε στο νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα.



Υπολογίζουμε πρώτα την περίοδο περιστροφής ενός πλανήτη περί τον ήλιο. Επειδή σε μία περιστροφή η επιβατική ακτίνα του πλανήτη περιγράφει όλη την έλλειψη σαρώνει σε μία περίοδο το εμβαδόν της έλλειψης που δίνεται από $A = \pi ab$, όπου a ο μεγάλος ημιάξονας και $b = a\sqrt{1-e^2}$ ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης. Επειδή όμως από το δεύτερο νόμο του Κέπλερ ο ρυθμός σάρωσης του

εμβαδού είναι σταθερός και δίνεται από $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ θα έχουμε ότι

$$A = \pi ab = \frac{dA}{dt} T = \frac{LT}{2m}, \text{ δηλαδή } T = \frac{2\pi m}{L} a^2 \sqrt{1-e^2}.$$

Πρέπει να εκφράσουμε τον μεγάλο ημιάξονα συναρτήσει των παραμέτρων της έλλειψης (p, e) . Η ελάχιστη

απόσταση του πλανήτη από τον Ήλιο (το περιήλιο) είναι $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$, ενώ η μέγιστη

(το αφήλιο) $r_{\max} = \frac{p}{1-e}$, οπότε (βλ. σχήμα) $a = \frac{p}{1-e^2}$.

Συνεπώς $T = \frac{2\pi m}{L} p^{1/2} a^{3/2}$, και επειδή από τη (6) $\frac{p^{1/2}}{L} = \frac{1}{k\sqrt{m}}$ η περίοδος

περιστροφής θα είναι:

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{k} a^{3/2}$$

δηλαδή πράγματι όταν η κίνηση είναι ελλειπτική το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο με το κύβο του μεγάλου ημιάξονα. Αλλά όπως ήδη αναφέραμε ο τρίτος

νόμος του Κέπλερ μας πληροφορεί επιπλέον ότι η ποσότητα $\frac{m}{k^2}$ είναι σταθερά για

όλους του πλανήτες δηλαδή για δύο πλανήτες μάζας m_1, m_2 θα πρέπει να ισχύει συμφώνως με τον τρίτο νόμο του Κέπλερ:

$$\frac{m_1}{k_1^2} = \frac{m_2}{k_2^2},$$

δηλαδή θα πρέπει $k_i^2 = m_i f(M_H)$, όπου m_i η μάζα του πλανήτη και f μία σταθερά την οποία θεωρούμε ότι εξαρτάται από τη μάζα του Ήλιου. Έχουμε δηλαδή ότι η

ελκτική δύναμη που ασκείται από τον Ήλιο σε κάποιο πλανήτη έχει μέτρο:

$$F = \frac{mf(M_H)}{r^2}. \text{ Από το τρίτο νόμο του Νεύτωνα όμως και εφόσον ισχύει ο ίδιος}$$

νόμος αλληλεπίδρασης θα πρέπει αυτή η δύναμη να είναι ίση και αντίθετη στη δύναμη που ασκείται από τον πλανήτη στον Ήλιο, θα πρέπει δηλαδή:

$mf(M_H) = M_H f(m)$ δηλαδή $f(m) = Gm$, όπου G μία σταθερά του ηλιακού μας συστήματος. Ο νόμος της έλξης μεταξύ των πλανητών στο ηλιακό μας σύστημα και του Ήλιου λαμβάνει έτσι τη γνώριμη μορφή:

$$F = G \frac{mM_H}{r^2}.$$

Ο Νεύτων έκανε βεβαίως άλλο ένα βήμα, πέρα από τα πειραματικά δεδομένα, και πρότεινε ότι ο νόμος αυτός διέπει τη βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σωμάτων και πρότεινε ότι η G είναι μία παγκόσμια σταθερά. Παρατηρούμε ότι στο νόμο της βαρυτικής έλξης που καταλήξαμε υπεισέρχονται οι αδρανειακές μάζες. Βεβαίως αυτό δεν μπορεί να ληφθεί ως απόδειξη ότι οι βαρείες μάζες ισούνται με τις αδρανειακές, διότι αυτό προϋποθέτει ότι ανυψώνουμε τους νόμους του Κέπλερ σε θεμελιικούς νόμους της φύσης. Αλλά αυτό δεν είναι αληθές. Θεωρήσαμε τον Ήλιο ακλόνητο στο στερέωμα και αμελήσαμε την αλληλεπίδραση μεταξύ των πλανητών. Αν ο Κέπλερ είχε ακριβότερες παρατηρήσεις θα διαπίστωνε ότι ο λόγος του τετραγώνου της περιόδου ως προς τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα δεν είναι ακριβώς σταθερός. Για τον Ερμή ο λόγος αυτός είναι 2.510 (σε μονάδες $10^{19} \text{ km}^3 / d^2$, d μία Γήινη ημέρα), για την Αφροδίτη 2.509, για τη Γη 2.509, τον Άρη 2.508, τον Δία 2.511, τον Ουρανό 2.510, τον Ποσειδώνα 2.512. Επίσης ακριβείς παρατηρήσεις της κίνησης του Ερμή έχουν δείξει ότι το περιήλιο του πλανήτη αλλάζει θέση, μεταπίπτει, κατά $5597''$ κάθε 100 χρόνια. Το μεγαλύτερο μέρος της μετάπτωσης αυτής, εκτός από $43''$ / αιώνα, μπορεί να εξηγηθεί λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση του πλανήτη με τους υπόλοιπους πλανήτες, αλλά αυτό δεν αρκεί. Με τη γενική θεωρία της σχετικότητας, η οποία προβλέπει μία μικρή διόρθωση στο νόμο της βαρύτητας, μπορεί να εξηγηθούν τα υπολειπόμενα $43''$. Δεν μπορεί παρά να αναρωτηθούμε: αν ο Κέπλερ διέθετε τις σημερινές παρατηρήσεις θα διατύπωνε τους νόμους του οι οποίοι είχαν καταλυτική σημασία στην ανάπτυξη της Φυσικής;