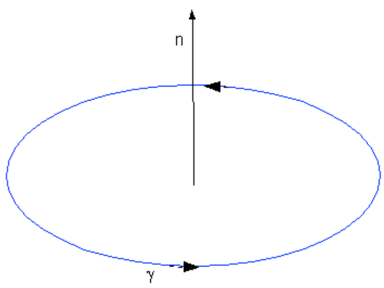
Στροβιλισμός πεδίου δυνάμεων

Θεωρείστε ένα απειροστό απλό χωρίο στο χώρο τόσο μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε ένα επίπεδο. Έστω ότι το χωρίο αυτό περικλείει εμβαδόν μέτρου $|A|$. Το έργο που εκτελείται από το πεδίο δυνάμεων όταν διατρέξουμε τη κλειστή καμπύλη γ που ορίζει το σύνορο του χωρίου με φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού (που λαμβάνεται ως η θετική φορά) είναι $\Gamma = \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (αν διατρέχαμε την καμπύλη με αρνητική φορά τότε το έργο θα ήταν $-\Gamma$). Το έργο γύρω από μία κλειστή καμπύλη λέγεται κυκλοφορία και μετράει πόσο περιστροφή έχει το πεδίο της δύναμης. Σχηματίζουμε τώρα το όριο (θα δούμε σε λίγο ότι υπάρχει αυτό το όριο) $\lim_{|A|\to 0}\dfrac{\Gamma}{|A|}$. Το όριο αυτό θα εξαρτάται από το πεδίο της δύναμης αλλά και από τον προσανατολισμό του χωρίου στο χώρο. Τον προσανατολισμό τον ορίζουμε με το κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ στο χωρίο και τη φορά του καθέτου διανύσματος την επιλέγουμε με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία: όταν το σύνορο διαγράφεται με τη θετική φορά τότε το κάθετο διάνυσμα έχει την διεύθυνση κίνησης ενός δεξιόστροφου κοχλία που περιστρέφεται όπως διαγράφεται το σύνορο.



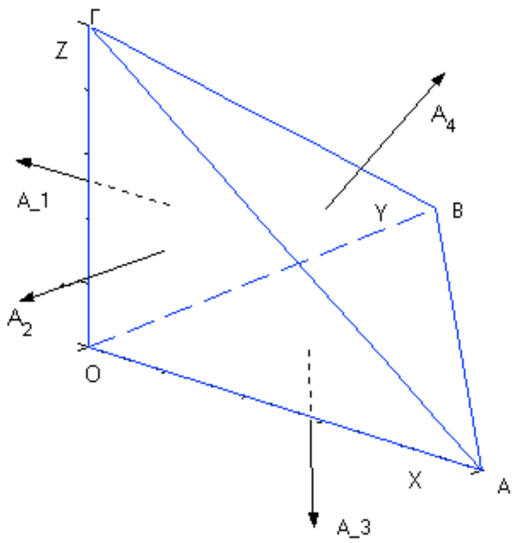
Αν πάρουμε ένα καρτεσιανό σύστημα μπορούμε σε κάθε σημείο του χώρου να ορίσουμε τρείς στροβιλισμούς. Τον Ω_x στροβιλισμό ως το

$$\Omega_x = \lim_{|A|\to 0}\frac{\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}}{|A|}$$

για μία διαφορική επιφάνεια στο $y-z$ επίπεδο με εμβαδόν μέτρου $|A|$ και διεύθυνση τον άξονα x, και παρομοίως τον Ω_y και τον Ω_z στροβιλισμό. Η τριάδα $(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)$ θα αποδείξουμε ότι αποτελεί διάνυσμα , το οποίο και λέγεται το διάνυσμα του στροβιλισμού, $\vec{\Omega}$, του πεδίου.

.

Για να αποδείξουμε ότι ο στροβιλισμός είναι πράγματι διάνυσμα πρέπει να αποδείξουμε ότι μετασχηματίζεται στις στροφές όπως και οι μετατοπίσεις. Ο διανυσματικός χαρακτήρας βασικών φυσικών αντικειμένων, όπως λ.χ. η δύναμη, αποδεικνύεται μόνο πειραματικά και λαμβάνεται ως νόμος της φύσης. Ο διανυσματικός χαρακτήρας παραγώγων φυσικών μεγεθών όπως λ.χ. η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η στροφορμή , η βαθμίδα κ.λ.π. μπορεί να αποδειχθεί όμως από τον ορισμό τους. Δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι η δύναμη είναι διάνυσμα μπορούμε χωρίς πείραμα να ελέγξουμε τον διανυσματικό χαρακτήρα του στροβιλισμού εξετάζοντας το μετασχηματισμό των συντεταγμένων του στις στροφές. Για να δείξουμε το διανυσματικό χαρακτήρα αρκεί να πάρουμε μιά διαφορική επιφάνεια σε μία τυχαία διεύθυνση $\vec{n}$ και να δείξουμε ότι ο στροβιλισμός σε αυτή την επιφάνεια, Ω_n, είναι $\Omega_n = \Omega_x n_x + \Omega_z n_z + \Omega_z n_z$, όπου (n_x, n_y, n_z) οι συνισταμένες του καθέτου διανύσματος σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Προς τούτο κατασκευάζουμε κατά αρχάς ένα ορθό τετράεδρο ΟΑΒΓ με ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=1, και ΟΑ



κατά τον άξονα x, ΟΒ κατά τον άξονα y και ΟΓ κατά τον άξονα z (βλ. Σχήμα). Υπολογίζουμε το έργο γύρω από τα σύνορα των 4 εδρών του τετραέδρου διανύοντας το σύνορο με τη φορά που σημειώνεται στο σχήμα. Το συνολικό έργο γύρω απο τα σύνορα των 4 εδρών είναι τότε μηδέν, διότι κάθε ακμή διανύεται δις με αντίθετη διεύθυνση κάθε φορά, δηλαδή:

$$\left(\oint_{0A\Gamma} + \oint_{AB\Gamma} + \oint_{O\Gamma B} + \oint_{OBA}\right)\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0\,.$$

Επειδή όταν ληφθεί το τετράεδρο αρκούντως μικρό $\oint_{O\Gamma B}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\Omega_x\,|\,A_1\,|$ κ.ο.κ. θά έχουμε ότι:

$\Omega_4\,|\,A_4\,|= \Omega_x\,|\,A_1\,|+\Omega_y\,|\,A_2\,|+\Omega_z\,|\,A_3\,|$

και επειδή $\dfrac{|\,A_1\,|}{|\,A_4\,|} = n_x$, όπου n_x η συνιστώσα της καθέτου στην ΑΒΓ έδρα κ.ο.κ. αποδεικνύεται ότι ως προς το δεδομένο $\vec{n}$ ότι ισχύει $\Omega_n = \Omega_x n_x + \Omega_z n_z + \Omega_z n_z$. Αλλά ο ίδιος συλλογισμός ισχύει για οποιοδήποτε ορθό τετράεδρο διότι πάντοτε $\dfrac{|\,A_1\,|}{|\,A_4\,|} = n_x$ κ.ο.κ. [1]. Άρα ο στροβιλισμός είναι πράγματι διάνυσμα.

Το Θεώρημα του Stokes

Υπολογίζουμε τώρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από μία καμπύλη, Γ, $\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}$. Θεωρούμε μία επιφάνεια της οποίας το σύνορο είναι η Γ και καλύπτουμε την επιφάνεια με καμπύλες που καλύπτουν την επιφάνεια ως ένα πλέγμα (βλ. Σχήμα). Τότε $\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \sum_i \oint_{\gamma_i}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ όπου τα ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της ισότητας είναι γύρω από τα σύνορα των επιφανειών του πλέγματος. Εάν το πλέγμα εκλεπτυνθεί αρκετά , επειδή $\oint_{\gamma_i}\vec{F}\cdot d\vec{r} \to \vec{\Omega}_i\cdot d\vec{A}$ όπου το διάνυσμα $d\vec{A}$ έχει μέτρο το εμβαδόν της διαφορικής επιφάνειας μέλους του πλέγματος και διεύθυνση την κάθετο στην επιφάνεια με τη σύμβαση του δεξιόστροφου κοχλία[2], έχουμε ότι:

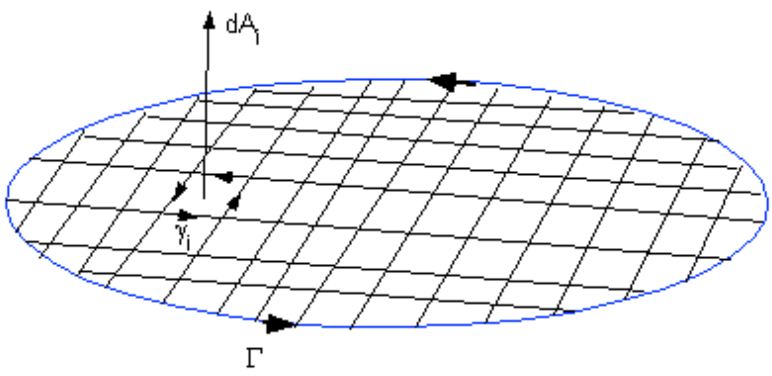
---

[1] Με τον τρόπο αποδείξαμε επίσης ότι και η επιφάνεια μπορεί να εκφρασθεί ως διάνυσμα.

[2] Το ότι μία διαφορική επιφάνεια είναι διάνυσμα φαίνεται εδώ και από την εξής ιδιότητα: εάν $\vec{a}$ είναι διάνυσμα και οι τρείς συνιστώσες ενός φυσικού μεγέθους $(b_{1.}, b_2, b_3)$ είναι τέτοιοι ώστε το $a_i b_i$ να είναι μονόμετρο μέγεθος τότε οι τρείς αριθμοί σχηματίζουν διάνυσμα, $\vec{b}$. Συνεπώς επειδή το $\vec{\Omega}$ είναι διάνυσμα και εξ ορισμού $\vec{\Omega}_i\cdot d\vec{A}$ είναι μονόμετρο μέγεθος τότε και το $d\vec{A}$ είναι διάνυσμα. Κατευθείαν μπορούμε να δούμε το διανυσματικό χαρακτήρα τού εμβαδού με το να

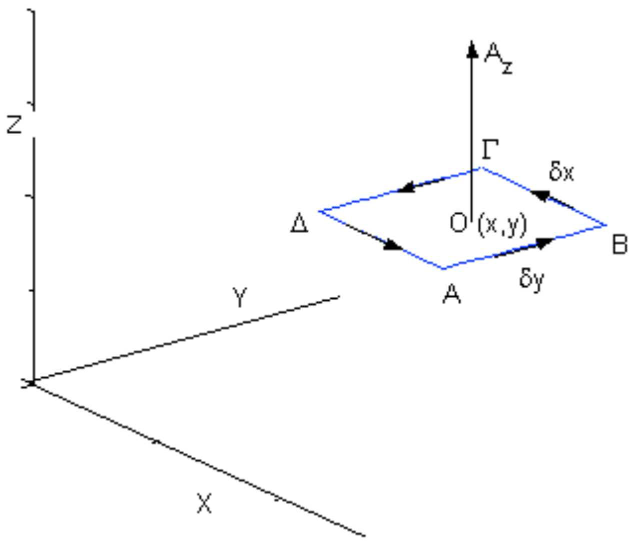
$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A} \vec{\Omega} \cdot d\vec{A}$$

όπου A είναι κάποια επιφάνεια της οποίας το σύνορο είναι το Γ.



Αυτό είναι το θεώρημα του Stokes. Ο Stokes είχε την ίδια έδρα Μαθηματικών που είχε ο Νεύτων στο Πανεπιστήμιο του Cambridge. Το περιεχόμενο του θεωρήματος ήταν θέμα διαγωνισμού υποτροφίας που έδωσε ο Stokes το 1854. Ο Maxwell απάντησε το θέμα του διαγωνίσματος και δεν είναι περίεργο ότι το θεώρημα αυτό έχει κεντρικό ρόλο στην θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού που ανέπτυξε αργότερα. Το περιεχόμενο του θεωρήματος αυτού και μία πρώτη απόδειξη περιέχεται σε επιστολή που στάλθηκε από τον Thomson (αργότερα Lord Kelvin) το 1850 στον Stokes. Το θεώρημα αυτό είναι πολύ σημαντικό, αποτελεί γενίκευση του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού, και λέγεται ότι κάθε γενιά μαθηματικών δίνει από τότε και από μία νέα απόδειξη του θεωρήματος σε πιο γενικευμένους χώρους. Ο Stokes είναι γνωστός για τη συμβολή του στη ανάπτυξη της υδροδυναμικής όπου ο στροβιλισμός του πεδίου ταχυτήτων είναι κεντρική έννοια. Είναι τόσο κεντρική ώστε σήμερα η κυριότερη ποσότητα που σημειώνεται στους μετεωρολογικούς χάρτες να είναι ο στροβιλισμός.

Υπολογισμός των συνισταμένων του στροβιλισμού



Ας υπολογίσουμε την Ω_z συνισταμένη του στροβιλισμού του πεδίου της δύναμης $\vec{F}$. Σχηματίζουμε προς τούτο ένα παραλληλόγραμμο (βλ. Σχήμα) στο επίπεδο $x-y$ με κέντρο Ο στο σημείο (x, y) (δεν αναφέρουμε την τρίτη συντεταγμένη διότι είναι σταθερή) και πλευρές παράλληλες στους άξονες και μήκους δx και δy. Αν διανύσουμε το σύνορο με τη φορά ΑΒΓΔ το εμβαδόν $|A_z| = \delta x \delta y$ είναι κατά τη διεύθυνση του τρίτου άξονα και συνεπώς

ορίσουμε το εμβαδόν διαφορικού χωρίου που έχει πλευρές $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$ το εξωτερικό γινόμενο $d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2$.

$$\Omega_z = \lim_{|A_z|\to 0} \frac{\oint_{AB\Gamma\Delta} \vec{F}\cdot d\vec{r}}{|A_z|}.$$

Υπολογίζουμε πρώτα το έργο W_{AB} που καταναλώνεται στη διαδρομή ΑΒ. Αυτό θα είναι κατά προσέγγιση :

$$W_{AB} = F_y\left(x - \frac{\delta x}{2}, y\right)\delta y$$

ενώ το έργο στη απέναντι διαδρομή ΓΔ θα είναι:

$$W_{\Gamma\Delta} = -F_y\left(x + \frac{\delta x}{2}, y\right)\delta y$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor βρίσκουμε ότι το συνολικό έργο στις δύο διαδρομές που είναι παράλληλες στον άξονα y είναι:

$$W_{AB} + W_{\Gamma\Delta} = -\frac{\partial F_y}{\partial x}\delta x\delta y + \text{όροι ανωτέρας τάξεως.}$$

Η μερική παράγωγος υπολογίζεται στο κέντρο Ο του χωρίου και δεν έχουμε συμπεριλάβει όρους ανωτέρας τάξεως διότι αυτοί θα μηδενισθούν όταν διαιρέσουμε δια του μέτρου του εμβαδού του χωρίου $|A_z| = \delta x\delta y$ για να προσδιορίσουμε τον στροβιλισμό στο όριο που το εμβαδόν αυτό τείνει στο μηδέν.

Ομοίως έχουμε ότι

$$W_{B\Gamma} = F_x\left(x, y + \frac{\delta y}{2}\right)\delta x \text{ και } W_{\Delta A} = F_x\left(x, y - \frac{\delta y}{2}\right)\delta x,$$

οπότε το συνολικό έργο στις δύο διαδρομές που είναι παράλληλες στον άξονα x είναι:

$$W_{B\Gamma} + W_{\Delta A} = \frac{\partial F_x}{\partial y}\delta x\delta y + \text{ όροι ανωτέρας τάξως.}$$

Συνεπώς το όριο $\delta x\delta y \to 0$ της ποσότητας $\frac{\oint_{AB\Gamma\Delta} \vec{F}\cdot d\vec{r}}{\delta x\delta y}$ υπάρχει (κάτι που είχαμε θεωρήσει ως δεδομένο προηγουμένως) και έχουμε ότι

$$\Omega_z = \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

Με κυκλική μετάθεση προσδιορίζουμε ότι το διάνυσμα του στροβιλισμού έχει τις εξής συνιστώσες σε κάποιο καρτεσιανό σύστημα αξόνων:

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)$$

Παρατηρούμε ότι εάν η δύναμη είναι βαθμίδα κάποιας συνάρτησης δηλαδή $\vec{F} = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right)$ τότε ο στροβιλισμός μηδενίζεται. ***Συνεπώς κάθε συντηρητική δύναμη έχει μηδενικό στροβιλισμό.***

Στο παραπάνω συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε και από το θεώρημα του Stokes. Εάν η δύναμη είναι συντηρητική τότε το έργο γύρω από οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη στο χώρο είναι μηδενικό. Αλλά αυτό συνεπάγεται ότι θα πρέπει να είναι μηδενικό και το $\int_A \bar{\Omega} \cdot d\bar{A}$ για οποιαδήποτε επιφάνεια που έχει ως σύνορο τη καμπύλη, άρα θα πρέπει ο στροβιλισμός να μηδενίζεται.

Τι μπορούμε να πούμε όμως για το αντίστροφο; Εάν ο στροβιλισμός ενός πεδίου παντού μηδενίζεται πάλι από το θεώρημα του Stokes θα πρέπει το έργο γύρω από μία οποιαδήποτε καμπύλη να μηδενίζεται, συνεπώς το πεδίο είναι συντηρητικό.
Εδώ όμως χρειάζεται λίγο προσοχή. Κατά την απόδειξη του θεωρήματος του Stokes κάναμε ουσιαστικά την υπόθεση ότι ο χώρος που εξετάζουμε είναι συνεκτικός, δηλαδή κάθε κλειστή καμπύλη μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο παραμένοντας πάντα στο χώρο που εξετάζουμε , (που χρησιμοποιήσαμε αυτή τη παραδοχή;) επίσης θεωρήσαμε ότι το πεδίο δυνάμεως είναι συνεχώς παραγωγίσιμο (που χρησιμοποιήσαμε αυτή τη παραδοχή;). Αν λοιπόν ικανοποιούνται αυτές οι προϋποθέσεις τότε μηδενισμός του στροβιλισμού συνεπάγεται τη συντηρητικότητα του πεδίου.
Συνεπώς αποδείξαμε ***ότι ικανή και αναγκαία (υπό προϋποθέσεις) συνθήκη να είναι ένα πεδίο συντηρητικό είναι ο στροβιλισμός του να είναι μηδενικός***.