Κέντρο μάζας – Κρούσεις

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα ─τον οποίο μέχρι στιγμής δεν έχουμε καθόλου χρησιμοποιήσει εφόσον ενδιαφερόμασταν για την κίνηση ενός σωματιδίου σε κάποιο πεδίο δυνάμεων το οποίο προερχόταν από το περιβάλλον του, και όχι για την κίνηση σωματιδίων εξαιτίας της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης─ μας επιτρέπει, όπως θα δούμε, να αντιμετωπίζουμε ένα σύνολο από σωματίδια ως ένα αντικείμενο, και πιο συγκεκριμένα, όταν πρόκειται για στερεά σώματα, μπορούμε να μελετάμε την κίνηση τους (όχι τις περιστροφές τους) ωσάν να ήταν σωματίδια και όχι σώματα με πεπερασμένες διαστάσεις. Μάλιστα ο ίδιος ο Νεύτωνας αναγκάστηκε να εισάγει το νόμο αυτό προκειμένου να εξετάσει την κίνηση σωμάτων με πεπερασμένες διαστάσεις όπως για παράδειγμα τις κινήσεις των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος.

Ακολουθώντας τη γραμμή των προηγούμενων διαλέξεων, θα ασχοληθούμε με ένα σύνολο σωματιδίων τα οποία κινούνται σε ένα μονοδιάστατο κόσμο και τα οποία αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους με δυνάμεις νευτώνειου[1] τύπου, δίχως να υπάρχει κάποιο εξωτερικό πεδίο δυνάμεων το οποίο να επηρεάζει την κίνησή τους. Καταγράφοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για κάθε ένα από τα N σωματίδια θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= F_{1,2} + F_{1,3} + F_{1,4} + \cdots + F_{1,N} \\
m_2\ddot{x}_2 &= F_{2,1} + F_{2,3} + F_{2,4} + \cdots + F_{2,N} \\
m_3\ddot{x}_3 &= F_{3,1} + F_{3,2} + F_{3,4} + \cdots + F_{3,N} \\
&\cdots \\
m_N\ddot{x}_N &= F_{N,1} + F_{N,2} + F_{N,3} + \cdots + F_{N,N-1},
\end{aligned}$$

όπου m_i, $\ddot{x}_i$, η μάζα και η επιτάχυνση του i-στού σωματιδίου και $F_{j,k}$ η δύναμη που ασκείται στο j-στό σωματίδιο από το k-στό σωματίδιο. Αν προσθέσουμε όλες αυτές τις N εξισώσεις καταλήγουμε στο εντυπωσιακό αποτέλεσμα:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{x}_i = 0\,,$$

αφού όλες οι δυνάμεις εμφανίζονται κατά ζεύγη με αντιμετατεθιμένους δείκτες και επομένως, με αντίστοιχο άθροισμα για κάθε ζεύγος μηδέν (εξαιτίας του 3ου νόμου του Νεύτωνα). Αν ορίσουμε λοιπόν τον ακόλουθο γραμμικό συνδυασμό των θέσεων όλων των σωματιδίων,

$$R \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}\,,$$

και δεδομένου του αμετάβλητου της μάζας των σωματιδίων, συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση αυτής της ποσότητας R, που έχει διαστάσεις μήκους, είναι μηδενική. Με άλλα λόγια το R, κινείται με σταθερή ταχύτητα! Είναι το R, η θέση κάποιου από τα σωματίδια; Όχι κατ΄ ανάγκη, όπως μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε για δύο

[1] Είθισται ο όρος *δυνάμεις νευτώνειου τύπου* να χρησιμοποιείται με δύο εντελώς διαφορετικά νοήματα: Είτε σε δυνάμεις που υπακούουν στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, δηλαδή ζεύγη δυνάμεων της μορφής δράση-αντίδραση, είτε σε δυνάμεις παγκοσμίου έλξεως, τον σχετικό νόμο για τις οποίες διατύπωσε και πάλι ο Νεύτων. Στις διαλέξεις θα χρησιμοποιούμε τον όρο με το πρώτο του νόημα.

σωματίδια. Το R αντιστοιχεί σε μια ιδεατή θέση, κάπου μέσα στην περιοχή[2] που βρίσκονται διασκορπισμένα τα σωματίδια και μάλιστα βρίσκεται πλησιέστερα στις μεγαλύτερες μάζες του συστήματος (δοκιμάστε με ένα σύστημα αποτελούμενο από δύο πολύ ανόμοιες μάζες)· γι' αυτό το λόγο ονομάζεται *κέντρο μάζας* του συστήματος.

Από τις παραπάνω εξισώσεις βλέπουμε ότι $\dot{R} = \text{σταθερό}$· με άλλα λόγια το ιδεατό αυτό σημείο, κάπου ανάμεσα στα σωματίδια, κινείται με σταθερή ταχύτητα, με την ταχύτητα που είχε αρχικά και που μπορεί κανείς εύκολα να υπολογίσει αν γνωρίζει τις αρχικές ταχύτητες όλων των σωματιδίων. Μπορεί να μην γνωρίζουμε τη θέση του κάθε σωματιδίου, και ίσως η εύρεση αυτών να αποτελεί ένα πολύ δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα, αλλά γνωρίζουμε κάτι πολύ σημαντικό και άσχετο με τις λεπτομέρειες των δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των σωματιδίων: τη θέση του κέντρου μάζας ανά πάσα χρονική στιγμή.

Το γεγονός ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερή θυμίζει τη διατήρηση της ταχύτητας ενός ελευθέρου σωματιδίου. Στην πραγματικότητα η θεώρηση του κέντρου μάζας επιτυγχάνει ακριβώς αυτό: εξισώνει ένα σύστημα από σωματίδια, οσοδήποτε πολλά και αν είναι αυτά, με ένα σωματίδιο, με μάζα όσο η ολική μάζα των σωματιδίων, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο μάζας αυτών. Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα μας επιτρέπει να αγνοούμε τι συμβαίνει «εσωτερικά» στο σύστημα και να προσδιορίζουμε πανεύκολα τη «θέση» του συστήματος, ωσάν να το βλέπαμε από πολύ μακριά και να το αντιμετωπίζαμε ως σημείο. Μάλιστα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, η θεώρηση του κέντρου μάζας εξακολουθεί να είναι χρήσιμη και σε περιπτώσεις όπου το σύστημα δεν είναι απομονωμένο, αλλά ασκούνται επιπλέον των εσωτερικών δυνάμεων και εξωτερικές δυνάμεις στα σωματίδια, από το περιβάλλον του συστήματος.

Ας ξαναγράψουμε τώρα τη διατήρηση της ταχύτητας του κέντρου μάζας, ελαφρά όμως παραλλαγμένη:

$$M\dot{R} = \sigma\tau\alpha\theta = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i \ .$$

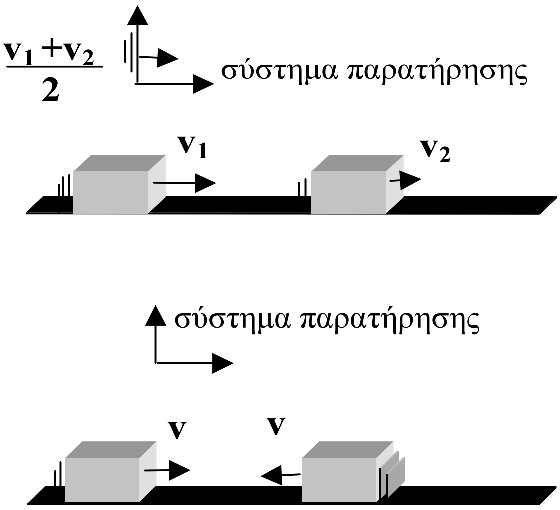
Η μορφή αυτή έχει το ακόλουθο πλεονέκτημα. Καθ' όλη τη χρονική διάρκεια που μελετάμε το σύστημα των σωματιδίων μπορεί η μάζα τμημάτων του συστήματος να μεταβάλλεται, όχι όμως και η συνολική του μάζα. Για παράδειγμα, μπορεί να αποκοπεί κάποιο θραύσμα από ένα σώμα, χωρίς να μεταβληθεί η συνολική μάζα του συστήματος στην οποία θα πρέπει να συνυπολογίσουμε και τη μάζα του θραύσματος. Το γεγονός ότι η περίεργη αυτή ποσότητα είναι σταθερή είναι εντυπωσιακό και θεμελιακό (θυμηθείτε τη διατήρηση της ενέργειας). Ο περιορισμός που θέσαμε, ότι δηλαδή το σύστημα πρέπει να είναι απομονωμένο, καθόλου δεν μειώνει τη σημασία της διατήρησης αυτής. Σχεδόν πάντα, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύστημα απομονωμένο από το περιβάλλον του, όταν η επίδραση του περιβάλλοντος είναι μηδαμινή (π.χ. το ηλιακό μας σύστημα), ή ο χρόνος που απαιτείται ώστε το περιβάλλον να κάνει αισθητή την παρουσία του στο σύστημα είναι πολύ μεγάλος σε σχέση με τον χαρακτηριστικό χρόνο που συμβαίνουν οι αλλαγές εντός του συστήματος (ένα θερμικά μονωμένο δοχείο με αέριο). Η διατηρούμενη αυτή ποσότητα ονομάζεται *ορμή* του συστήματος. Όπως και η διατήρηση της ενέργειας, έτσι και η διατήρηση της ορμής είναι συνέπεια κάποιας βαθύτερης συμμετρίας του σύμπαντος, και συγκεκριμένα της ομογένειας του χώρου, δηλαδή της συμμετρίας σε χωρική μετάθεση.

---

[2] Είναι εύκολο να δειχτεί ότι $x_{\min} < R < x_{\max}$.

Στη συνέχεια, θα συνάγουμε τη διατήρηση της ορμής βασισμένοι αποκλειστικά και μόνο στο γεγονός ότι οι φυσικοί νόμοι πρέπει να μένουν ίδιοι όταν τους εξετάζουμε σε διαφορετικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς καθώς και σε απλά επιχειρήματα συμμετρίας.

Ας θεωρήσουμε δύο σωματίδια ίδιας μάζας τα οποία κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο (φανταστείτε δύο πανομοιότυπα βαγόνια κινούμενα πάνω σε αεροτροχιά) με ταχύτητες v_1, v_2 αντίστοιχα, τέτοιες ώστε το σωματίδιο 1 να πλησιάζει το 2. Ας κινηθούμε πάνω στη διεύθυνση κίνησης των σωματιδίων με τη μέση ταχύτητα αυτών δηλαδή με $v = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$. Στο αδρανειακό αυτό σύστημα παρατήρησης τα σωματίδια φαίνονται να κινούνται με ταχύτητες $\dfrac{v_1 - v_2}{2}$, και $-\dfrac{v_1 - v_2}{2}$ αντίστοιχα, δηλαδή με ίσες και αντίθετες ταχύτητες (βλ. σχήμα). Εφόσον η κατάσταση είναι απολύτως συμμετρική (αν αντικαταστήσει δηλαδή κάποιος το δεξιά με το αριστερά δεν πρόκειται να παρατηρήσει καμιά αλλαγή), αμέσως μετά τη σύγκρουση των δύο σωματιδίων δεν μπορεί παρά να διατηρηθεί αυτή η συμμετρία, δηλαδή τα δύο σωματίδια θα απομακρύνονται το ένα από το άλλο με ίδιες ταχύτητες. Αν στο σύστημα αυτό παρατήρησης οι ταχύτητες μετά τη σύγκρουση είναι $-v'$ και v' αντίστοιχα, στο αρχικό σύστημα παρατήρησης οι ταχύτητες θα είναι $\dfrac{v_1 + v_2}{2} - v'$ και $\dfrac{v_1 + v_2}{2} + v'$ αντίστοιχα. Παρατηρεί λοιπόν κανείς ότι σε αυτή την περίπτωση η ολική ορμή του συστήματος $m(v_1 + v_2)$ διατηρείται. Βέβαια με τον παραπάνω συλλογισμό δεν μπορέσαμε να υπολογίσουμε μονοσήμαντα την κίνηση που θα εκτελέσουν τα δύο σωματίδια, αλλά αυτό είναι κάτι το οποίο εξαρτάται από τις λεπτομέρειες της κρούσης. Για παράδειγμα, αν η κρούση είναι πλαστική, δηλαδή αν τα σωματίδια συνενώνονται κατά την κρούση δεν μπορεί παρά να είναι $v' = 0$, οπότε το συσσωμάτωμα θα κινείται με ταχύτητα $\dfrac{v_1 + v_2}{2}$ (η λύση ακριβώς στην οποία θα καταλήγατε χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της ορμής). Αν η κρούση είναι ελαστική, δηλαδή αν απαιτήσουμε να διατηρείται η ολική κινητική ενέργεια, αυτός ο ιδιόμορφος συνδυασμός μάζας και ταχύτητας, τότε εύκολα πάλι καταλήγει κανείς στο γνωστό αποτέλεσμα ανταλλαγής των ταχυτήτων.



Προκειμένου να ελέγξουμε αν ισχύει γενικά η διατήρηση της ορμής σε οποιοδήποτε απομονωμένο σύστημα σωμάτων, θα θεωρήσουμε στη συνέχεια την κρούση δύο σωματιδίων με λόγο μαζών 1 προς 2. Όμως, και στην περίπτωση αυτή, το δεύτερο σώμα με τη διπλάσια μάζα μπορεί να θεωρηθεί ως δύο ξεχωριστά σωματίδια, τα οποία ύστερα από την αλληλουχία όλων των κρούσεων θα πρέπει να κινηθούν ως συσσωμάτωμα. Είδαμε, όμως, ότι σε κάθε κρούση δύο σωματιδίων ίδιας μάζας η συνολική ορμή τους διατηρείται, ανεξάρτητα από τις λεπτομέρειες της σύγκρουσης. Μπορεί λοιπόν κανείς να δείξει με τον ίδιο αναλυτικό τρόπο όπως και προηγουμένως, μεταβαίνοντας δηλαδή στο σύστημα αυτό που βλέπει τα εκάστοτε δύο συγκρουόμενα σωματίδια να προσεγγίζουν το ένα το άλλο με την ίδια ταχύτητα, ότι η συνολική ορμή και αυτού του συστήματος διατηρείται. Όμοια δείχνεται ότι, κατά την κρούση οποιωνδήποτε δύο σωματιδίων με ρητό λόγο μαζών η συνολική ορμή τους διατηρείται. Προφανώς αυτό θα ισχύει και για σωματίδια με άρρητο λόγο μαζών αφού κάθε άρρητος μπορεί να προσεγγιστεί οσοδήποτε, με κάποιο ρητό αριθμό. Όσο για τον μηχανισμό της κρούσης δεν χρειάστηκε να εξετάσουμε τις λεπτομέρειες αυτού. Θα μπορούσε να είναι μια στιγμιαία και βίαιη κρούση, ή μια αργή ομαλή κρούση μέσω ενός ελατηρίου, ή ακόμη και μια έκρηξη που συμβαίνει κατά τη διάρκεια της επαφής των δύο σωματιδίων· το σημαντικό είναι ότι πάντα πρόκειται για αμοιβαία αλληλεπίδραση δύο σωμάτων.

Αφού δείξαμε για άλλη μια φορά ότι η συνολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται, στηριζόμενοι σε απλά επιχειρήματα συμμετρίας και μόνο, ας εξετάσουμε στη συνέχεια μερικά παραδείγματα αυτής της διατήρησης. Κατ' αρχάς πόση είναι η ορμή ενός συστήματος σωματιδίων μετρούμενη από ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με την σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος;

$$P'_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\dot{x}_i - \dot{R}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i - \dot{R}\sum_{i=1}^{N} m_i = 0\,.$$

Το σύστημα αυτό, αποκαλούμενο *σύστημα κέντρου μάζας*, έχει αυτή την εξαιρετική ιδιότητα: η ολική ορμή του συστήματος είναι μηδέν σε αυτό το σύστημα αναφοράς, και προφανώς θα παραμείνει για πάντα τόσο, εφόσον η ολική ορμή διατηρείται. Πόση είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος σε αυτό το ιδιαίτερο σύστημα αναφοράς;

$$E'_{\text{κιν}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i\left(\dot{x}_i - \dot{R}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i\left(\dot{x}_i\right)^2 - \dot{R}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i + \frac{1}{2}\dot{R}^2\sum_{i=1}^{N} m_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i\left(\dot{x}_i\right)^2 - \frac{1}{2} M\dot{R}^2$$

Δηλαδή, ισούται με την ολική κινητική ενέργεια όπως μετράται στο αρχικό σύστημα αναφοράς μείον την ενέργεια ενός υποθετικού σωματιδίου με μάζα όσο όλα τα σωματίδια του συστήματος το οποίο κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας. Μπορούμε λοιπόν να διαχωρίσουμε την ολική κινητική ενέργεια του συστήματος σε μια κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας και μια εσωτερική κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας:

$$E_{\text{κιν}} = E'_{\text{κιν}} + \frac{1}{2} M\dot{R}^2\,.$$

Κανείς, θα μπορούσε να προσθέσει στις δύο κινητικές ενέργειες (ολική και εσωτερική) και τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, αφού αλλάζοντας σύστημα αναφοράς οι αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων δεν αλλάζουν, και όπως έχουμε συζητήσει σε προηγούμενο κεφάλαιο οι θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις στη φύση δεν μπορεί παρά να εξαρτώνται μόνο από την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων.

Τέλος, ας επιτρέψουμε σε ένα σύστημα σωματιδίων να δέχεται και δυνάμεις από το περιβάλλον του (για παράδειγμα, ένα στερεό σώμα μέσα σε κάποιο πεδίο δυνάμεων). Τότε το άθροισμα όλων των εξισώσεων κίνησης (βλ. αρχή του παρόντος κεφαλαίου) θα δώσει:

$$M\ddot{R} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{(\varepsilon\xi\omega\tau)}$$

Το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται σαν να ήταν ένα σωματίδιο μάζας M πάνω στο οποίο ασκούνται όλες μαζί οι εξωτερικές δυνάμεις που δέχονται τα σωματίδια. Για παράδειγμα θεωρήστε μια οβίδα η οποία σε κάποια στιγμή της κίνησής της μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης εκρήγνυται. (Πρόκειται για κίνηση σε δύο διαστάσεις, αλλά όσα έχουμε μάθει για τη μια διάσταση εφαρμόζονται κάλλιστα και στις δύο διαστάσεις.) Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν και τα θραύσματα θα εξακοντιστούν σε όλες τις διευθύνσεις, το κέντρο μάζας αυτών θα εξακολουθήσει ανενόχλητο την παραβολική του τροχιά, με μοναδική διαταραχή της κίνησης αυτού την εμφάνιση των αντιδράσεων του εδάφους κάθε φορά που κάποιο θραύσμα προσκρούει στο έδαφος, η οποία και μεταβάλλει στιγμιαία τη διεύθυνση της κίνησης του.

Συστήματα μεταβλητής μάζας

Η γνώση των ιδιοτήτων του κέντρου μάζας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για έναν πολύ απλό λόγο: Προκειμένου να μάθουμε ποια είναι η κίνηση όλων των μερών του συστήματος, αυτό που χρειάζεται να υπολογίσουμε είναι η κίνηση όλων των υπολοίπων μερών εκτός από ένα, αφού η γνώση της θέσης των υπολοίπων καθώς επίσης και του κέντρου μάζας προσδιορίζει τη θέση του τελευταίου. Ουσιαστικά το πλεονέκτημα αυτό μας διευκολύνει στην εύρεση της κίνησης σωμάτων με μεταβλητή μάζα.

Ας θεωρήσουμε ένα κινητό του οποίου η μάζα μεταβάλλεται. Αν συμπεριλάβουμε τη μάζα του κινητού και τη μάζα που είτε προστίθεται σε αυτό είτε αφαιρείται από αυτό σε ένα σύστημα, τότε μπορούμε να αγνοήσουμε τις δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ του κινητού και της μάζας που εισέρχεται ή εξέρχεται από αυτό αν εστιάσουμε την προσοχή μας στην ορμή όλου του συστήματος. Σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως η ορμή του συστήματος θα αλλάξει μόνο εξαιτίας των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα. Επομένως μπορούμε να γράφουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα και στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη τη σχετική κίνηση κινητού και εισερχόμενης/εξερχόμενης μάζας να υπολογίζουμε την κίνηση του κινητού μόνο.

$$\text{δύναμη ασκούμενη στο σύστημα}(t) = \frac{\text{ορμή συστήματος}(t+dt) - \text{ορμή συστήματος}(t)}{dt}$$

Για να γίνει πιο κατανοητή η παραπάνω διαδικασία θα θεωρήσουμε αρχικά ως παράδειγμα ένα βαγόνι τρένου μάζας M το οποίο είναι φορτωμένο με N ανθρώπους μάζας m ο καθένας και οι οποίοι παίρνοντας φόρα πηδούν ένας-ένας από το βαγόνι με μια συγκεκριμένη ταχύτητα ως προς αυτό V. Στο παράδειγμα αυτό, αγνοώντας την τριβή των τροχών του βαγονιού με τις ράγες, η συνολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα βαγόνι + επιβάτες είναι μηδενική (στη διεύθυνση κίνησης του βαγονιού), επομένως η ορμή του συστήματος (στην ίδια διεύθυνση) είναι ίδια πριν και μετά την εκτόξευση κάθε επιβάτη (όχι όμως και η ορμή του συστήματος στην αρχή και το τέλος συνολικά του συμβάντος, αφού η επαφή κάθε επιβάτη με το έδαφος θα επιφέρει μια εξωτερική δύναμη που θα αλλάξει την ορμή του συστήματος). Επομένως

$$(M+nm)u_n = (M+(n-1)m)u_{n-1} + m(u_{n-1} - V)$$

Οι δύο όροι στο δεξιό σκέλος της εξίσωσης περιγράφουν (α) την ορμή του βαγονιού με το πλήρωμα του όταν θα έχουν απομείνει n-1 επιβάτες, και (β) την ορμή του ανθρώπου που θα εγκαταλείψει το βαγόνι με σχετική ταχύτητα ως προς το βαγόνι -V. Λύνοντας βρίσκουμε

$$u_{n-1} = u_n + \frac{m}{M+nm}V\ .$$

Ο αναδρομικός αυτός τύπος μας δίνει την τελική ταχύτητα του βαγονιού όταν θα το έχουν εγκαταλείψει όλοι οι επιβάτες του. Συγκεκριμένα, υποθέτοντας πώς αρχικά το βαγόνι ήταν ακίνητο ($u_N = 0$), βρίσκουμε

$$u_{\text{τελική}} = u_0 = V\sum_{n=N}^{1}\frac{m}{M+nm}.$$

(Ελέγξτε ποια είναι η προτιμότερη λύση προκειμένου να αποκτήσει το βαγόνι τη μέγιστη δυνατή ταχύτητα, να πηδήξουν όλοι μαζί ή ένας-ένας.) Το παραπάνω άθροισμα δεν μπορεί να γραφεί σε πιο απλή μορφή, μπορεί όμως να δείξει κανείς, κατασκευάζοντας το διάγραμμα της $F(x) = \frac{1}{M+x}$, ότι

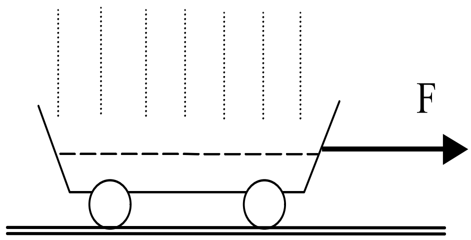
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{m}{M+nm} < \int_0^{Nm}\frac{dx}{M+x} < \sum_{n=0}^{N-1}\frac{m}{M+nm}.$$

Το ολοκλήρωμα ισούται με $\ln\frac{M+Nm}{M}$, ενώ η διαφορά το αριστερού και του δεξιού αθροίσματος είναι $\frac{m}{M} - \frac{m}{M+Nm} = \frac{Nm^2}{M(M+Nm)}$. Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τελική ταχύτητα είναι

$$u_{\text{τελκή}} \approx V\ln\frac{M+Nm}{M},$$

με λάθος μικρότερο του $\frac{Nm^2}{M(M+Nm)}$, δηλαδή πολύ μικρό αν $m << M$. Στο όριο που η εκροή μάζας είναι συνεχής, δηλαδή όταν $m/M \to 0$, το παραπάνω αποτέλεσμα για την τελική ταχύτητα είναι ακριβές. Η μορφή αυτού εξηγεί γιατί οι πύραυλοι έχουν αρχική μάζα πολύ μεγαλύτερη του ωφέλιμου φορτίου τους, για να αποκτήσουν πολύ μεγάλη τελική ταχύτητα[3].

Ας δούμε και ένα δεύτερο παράδειγμα, με συνεχή τώρα μεταβολή μάζας και μάλιστα υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης. Ένα καρότσι μάζας *M* το οποίο σύρεται σε οριζόντιο δρόμο, άνευ τριβής, με σταθερή δύναμη *F*, αλλά το οποίο, εξαιτίας της βροχής που πέφτει κατακόρυφα, γεμίζει σιγά-σιγά με νερό. Γράφοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για ένα απειροστό χρονικό διάστημα, θα έχουμε



$$F = \frac{(m+dm)(u+du)-(mu+dm\cdot 0)}{dt},$$

όπου το σύστημα που θεωρούμε είναι το καρότσι με το νερό που έχει μαζευτεί στο εσωτερικό του τη χρονική στιγμή *t* καθώς επίσης και η ποσότητα *dm* του νερού που πρόκειται να προστεθεί στο καρότσι το αμέσως επόμενο χρονικό διάστημα *dt*. Όντας κατακόρυφη η πτώση των σταγόνων της βροχής η οριζόντια ορμή που μεταφέρουν αυτές είναι μηδενική (τελευταίος όρος στον αριθμητή). Εκτελώντας τις πράξεις και απορρίπτοντας όρους δεύτερης τάξης ως προς τα διαφορικά καταλήγουμε στη σχέση

$$F = \frac{dm}{dt}u + m\frac{du}{dt}.$$

[3] Ένας πραγματικός πύραυλος κατευθυνόμενος στο διάστημα βρίσκεται μέσα σε πεδίο δυνάμεων, συγκεκριμένα στο βαρυτικό πεδίο, επομένως η σχέση στην οποία καταλήξαμε δεν είναι απολύτως ακριβής για έναν πύραυλο. Παρόλ' αυτά εξακολουθεί να είναι ποιοτικά ορθή.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο ρυθμός αύξησης της μάζας του καροτσιού *dm/dt* θεωρείται δεδομένος και εξαρτάται από το πόσο ραγδαία είναι η βροχόπτωση· γενικά ο όρος *dm/dt* είναι κάποια γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Ας υποθέσουμε για ευκολία ότι *dm/dt*=σταθερά=*λ*, οπότε $m = M + \lambda t$. Τότε εύκολα μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη διαφορική εξίσωση της κίνησης και να καταλήξουμε ότι

$$u = \frac{Ft}{M + \lambda t}.$$

Η οριακή ταχύτητα *F/λ* στην οποία τείνει η ταχύτητα για $t \to \infty$, οφείλεται στο ότι η μάζα του καροτσιού έχει αυξηθεί τόσο πολύ ώστε η δύναμη δεν καταφέρνει να αυξήσει την ταχύτητα του καροτσιού. Αν θέλαμε να προσδώσουμε στο πρόβλημα μια πιο ρεαλιστική χροιά, θα έπρεπε να επιτρέψουμε στο καρότσι αφότου γεμίσει, να αρχίσει να ξεχειλίζει και το πρόσθετο νερό της βροχής να εγκαταλείπει το καρότσι. Βέβαια το νερό που θα χύνεται από το καρότσι θα έχει την ταχύτητα του καροτσιού με αποτέλεσμα η ορμή του συστήματος τη χρονική στιγμή *t+dt* να είναι $(M_{\tau\varepsilon\lambda} + dm - dm)(u + du)$, όπου $M_{\tau\varepsilon\lambda}$ είναι η τελική μάζα που θα έχει αποκτήσει το καρότσι όταν θα είναι πλήρες. Έτσι η διαφορική εξίσωση για $t > t_o = \dfrac{M_{\tau\varepsilon\lambda} - M}{\lambda}$, θα μετατραπεί σε

$$F = \frac{dm}{dt}u + M_{\tau\varepsilon\lambda}\frac{du}{dt},$$

με λύση

$$u(t > t_0) = \frac{F}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda(t-t_0)/M_{\tau\varepsilon\lambda}}\right) + \frac{F}{\lambda}\frac{M_{\tau\varepsilon\lambda} - M}{M_{\tau\varepsilon\lambda}}e^{-\lambda(t-t_0)/M_{\tau\varepsilon\lambda}}.$$

(Στην παραπάνω λύση χρησιμοποιήθηκε η ταχύτητα που είχε αποκτηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή t_0 βάσει της προηγούμενης λύσης.) Το ενδιαφέρον είναι ότι και πάλι η οριακή ταχύτητα που αποκτάται για $t \to \infty$ είναι *F/λ*. Ο λόγος όμως τώρα είναι διαφορετικός: Η δύναμη χρησιμοποιείται απλώς για να προσδώσει ορμή στο νερό που φτάνει στο καρότσι με ταχύτητα μηδέν και στη συνέχεια χύνεται από το καρότσι με την ταχύτητα του καροτσιού. Η σύγκλιση μάλιστα τώρα στην οριακή τιμή της ταχύτητας συμβαίνει πολύ πιο γρήγορα, εκθετικά.