1 Μερικές ιδιότητες της συνάρτησης δ

Η συνάρτηση $\delta(t)$ δεν είναι μία κανονική συνάρτηση, είναι μία γενικευμένη συνάρτηση η οποία μπορεί να ορισθεί ως η συνάρτηση αυτή που για κάθε συνεχή συνάρτηση $f(t)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \ .$$

Μπορείτε να αναρωτηθείτε πότε δύο γενικευμένες συναρτήσεις είναι ίσες. Ήδη, γνωρίζετε πότε δύο κανονικές συναρτήσεις είναι ίσες: όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και λαμβάνουν ίδιες τιμές σε αυτό το πεδίο. Αυτός ο ορισμός δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις γενικευμένες συναρτήσεις διότι δεν ορίζεται η τιμή τους για ορισμένες τιμές του πεδίου ορισμού τους. Θα υιοθετήσουμε τον εξής ορισμό ισότητας γενικευμένων συναρτήσεων: δύο γενικευμένες συναρτήσεις α και β είναι ίσες όταν για κάθε συνεχή και παραγωγίσιμη δοκιμαστική συνάρτηση (test function) $f(t)$, ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(t)f(t)dt \ .$$

Βάσει αυτού του ορισμού έχουμε ότι

$$\delta(t) = \delta(-t),$$

δηλαδή η συνάρτηση δ είναι άρτια συνάρτηση, και

$$t\delta(t) = 0 \ .$$

Ας αποδείξουμε τη δεύτερη ισότητα. Πρέπει μα αποδείξουμε ότι για κάθε συνεχή και παραγωγίσιμη δοκιμαστική συνάρτηση (test function) $f(t)$, ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot f(t)dt = 0 \ .$$

Το δεξιό μέλος της ισότητας είναι προφανές, αλλά και το αριστερό μέλος είναι μηδενικό, διότι έχουμε διαδοχικά:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (tf(t))\delta(t)dt = (0 \cdot f(0)) = 0 \ .$$

Άσκηση: Δείξτε με τον ίδιο τρόπο ότι

$$\sin(t-s)\delta(t-s) = 0 \quad , \quad e^{\gamma(t-s)}\delta(t-s) = \delta(t-s) \; .$$

Μία πολύ χρήσιμη συνάρτηση είναι η συνάρτηση άλματος $\Theta(t)$ η οποία ορίζεται ως:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{t >0}\,; \\ 0, & \text{t < 0.} \end{cases}$$

Η συνάρτηση Θ είναι η ασυνεχής συνάρτηση της οποίας η παράγωγος για κάθε $t \neq 0$ είναι μηδενική, ενώ η παράγωγός της στο σημείο $t = 0$ δεν ορίζεται. Θα δείξουμε, όμως, ότι ισχύει η ισότης

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \delta(t) \; .$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε συνεχή και παραγωγίσιμη δοκιμαστική συνάρτηση (test function) $f(t)$, ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta(t)}{dt} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \; .$$

Θα δείξουμε ότι το αριστερό ολοκλήρωμα ισούται με $f(0)$. Επειδή για κάθε $t \neq 0$ είναι:

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = 0 \; ,$$

θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta(t)}{dt} f(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d\Theta(t)}{dt} f(t) dt$$

για κάθε ϵ, οσοδήποτε μικρό και αν αυτό ληφθεί. Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta(t)}{dt} f(t) dt = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d\Theta(t)}{dt} f(t) dt.$$

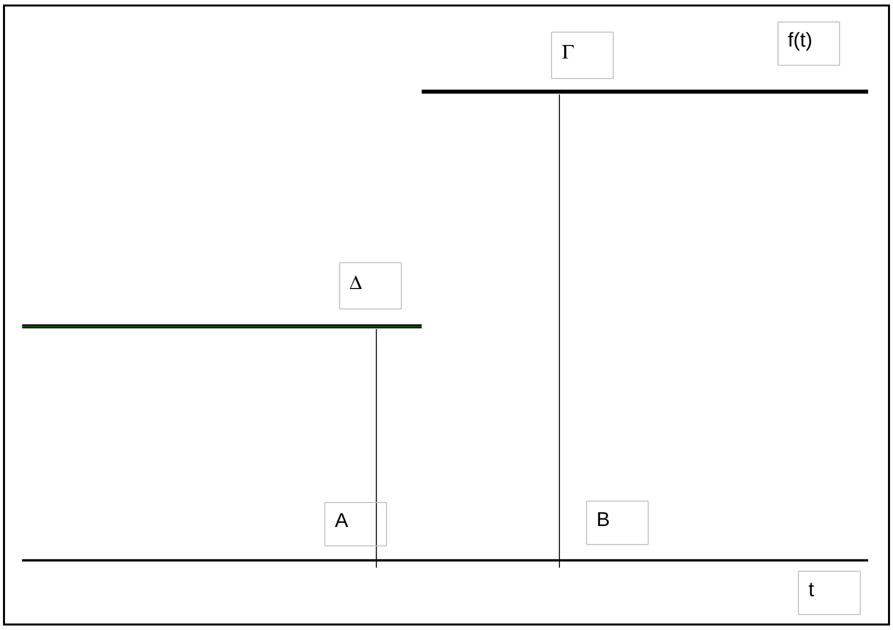
Αλλά,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d\Theta(t)}{dt} f(t) dt &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d\left(f(t)\Theta(t)\right)}{dt} dt - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{df(t)}{dt} \Theta(t) dt \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} f(\epsilon) \\ &= f(0) \end{aligned}$$

επειδή το ολοκλήρωμα

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{df(t)}{dt} \Theta(t) dt = 0$$

μηδενίζεται. Το ολοκλήρωμα μηδενίζεται διότι το "εμβαδόν" κάτω από μία ασυνέχεια είναι μηδενικό. Π.χ. θεωρήστε την ασυνεχή συνάρτηση του σχήματος 1 τότε το εμβαδόν ΑΒΓΔ τείνει στο μηδέν όταν το ΑΒ τείνει στο μηδέν. Πράγματι, αν η συνάρτηση είναι περατωμένη (όπως θεωρούμε ότι ισχύει στη περίπτωσή μας) το ολοκλήρωμα I θα είναι $m\epsilon \leq I \leq M\epsilon$, όπου m το κατώτερο πέρας της ολοκληρωτέας συνάρτησης και M το ανώτερο πέρας της ολοκληρωτέας συνάρτησης, και ϵ το μήκος του διαστήματος ΑΒ, οπότε πράγματι όταν το $\epsilon \to 0$ το ολοκλήρωμα περί τη ασυνέχεια μηδενίζεται. (Αυτή κατ᾿ουσία είναι και η απόδειξη ότι το κατά Riemann ολοκλήρωμα περατωμένων συναρτήσεων σε κλειστά διαστήματα που εμφανίζουν ακόμα και αριθμήσιμο αριθμό ασυνεχειών ορίζεται. Η θεωρία ολοκλήρωσης μπορεί να επεκταθεί πέραν της Ρειμάνειας, μία τέτοια θεωρία ολοκλήρωσης που έχει και χρησιμότητα στη Φυσική είναι αυτή του Lebesgue, οπότε μπορεί να ορίσει κανείς και το ολοκλήρωμα παθολογικών συναρτήσεων με μη αριθμήσιμο αριθμό ασυνεχειών.)[1]



Σχήμα 1: Το εμβαδόν της επιφάνειας ΑΒΓΔ περί μία ασυνέχεια μηδενίζεται όταν το ΑΒ τείνει στο μηδέν.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω ιδιότητες για να δείξουμε ότι αν η θέση ενός σω-

[1]Η μικρή αυτή σημείωση προστέθηκε επειδή αρκετοί φοιτητές δεν αντιλαμβανόντουσαν αμέσως αυτή τη προφανή ιδιότητα. Φαίνεται, ότι θα πρέπει συχνότερα να αναφέρεστε σε κάποιο εισαγωγικό βιβλίο μαθηματικής ανάλυσης. Σε αρχικό (σε απλό αλλά όχι τετριμμένο όμως) επίπεδο θα σας πρότεινα τα βιβλία του Apostol (σε δύο τόμους) που έχουν μεταφραστεί στα Ελληνικά από το Δ. Γκιόκα. Επίσης, θα σας πρότεινα το μικρό και εξαιρετικό βιβλίο του Burkill A first Course in Mathematical Analysis (Cambridge University Press). Στη ελληνική βιβλιογραφία πιστεύω ότι το καλύτερο βιβλίο ανάλυσης είναι του Π. Ζερβού "Ολοκληρωτικός και Απειροστικός Λογισμός", αλλά δεν έχει επανεκδοθεί (είναι μεγάλο κρίμα ότι τέτοια βιβλία δεν είναι διαθέσιμα). Θα φροντίσω να γίνει scan για να μπορούν να το διαβάσουν ή να αναφέρονται σε αυτό όσοι ενδιαφέρονται.

ματιδίου είναι

$$x(t) = t\Theta(t)$$

τότε

$$\ddot{x} = \delta(t)\ .$$

Βρίσκουμε πρώτα τη ταχύτητα του σωματιδίου:

$$\dot{x} = \Theta(t) + t\frac{d\Theta(t)}{dt}$$

Σύμφωνα όμως με τα προηγούμενα είναι

$$\begin{aligned} t\frac{d\Theta(t)}{dt} &= t\delta(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

οπότε η ταχύτητα του σωματιδίου είναι η ασυνεχής συνάρτηση:

$$\dot{x} = \Theta(t)\ .$$

Παραγωγίζοντας άλλη μία φορά έχουμε:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d\Theta(t)}{dt} \\ &= \delta(t)\ . \end{aligned}$$

2 Η συνάρτηση Green ενός αρμονικού ταλαντωτή

Η συνάρτηση Green είναι η απόκριση του ταλαντωτή σε στιγμιαία μοναδιαία ώθηση $\delta(t)$ υπό τη προϋπόθεση ότι ο ταλαντωτής ήταν ακίνητος στο σημείο ισορροπίας πρίν από την ώθηση. Αν αυτή η ώθηση ασκηθεί τη χρονική στιγμή s, η συνάρτηση Green είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t-s) \tag{1}$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(-\infty) = \dot{x}(-\infty) = 0\ .$$

Η λύση βρίσκεται παρατηρώντας ότι για κάθε $t \neq s$ ικανοποιείται η ομογενής εξίσωση:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

οπότε η γενική λύση για $t < s$, την οποία συμβολίζουμε με x^-, είναι

$$x^- = \alpha_1 e^{-\gamma(t-s)}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-s)\right) + \beta_1 e^{-\gamma(t-s)}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-s)\right)$$

ενώ για $t > s$, η λύση είναι:

$$x^+ = \alpha_2 e^{-\gamma(t-s)} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-s)\right) + \beta_2 e^{-\gamma(t-s)} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-s)\right).$$

Γράψαμε τη λύση για τη περίπτωση υποκρίσιμης ταλάντωσης ($\omega_0 > \gamma$), παρόμοια μπορεί να γραφεί η λύση για την υπερκρίσιμη περίπτωση. Οι συντελεστές α_1, β_1, α_2, β_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες και τη συνοριακή συνθήκη στο χρόνο $t = s$, η οποία βρίσκεται παρατηρώντας ότι στο χρόνο $t = s$ η θέση είναι συνεχής συνάρτηση αλλά παρουσιάζει ασυνέχεια η ταχύτητα $\dot{x}$. Η ασυνέχεια στη ταχύτητα προσδιορίζεται ολοκληρώνοντας την (1) σε ένα απειροστό διάστημα περί τον χρόνο s, αφού

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \left(\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x\right) dt = 1$$

δεδομένου ότι

$$\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \delta(t-s) ds = 1$$

για κάθε ϵ. Συνεπώς η ασυνέχεια στη ταχύτητα προκύπτει ότι είναι

$$[\dot{x}] \equiv \dot{x}^+(s) - \dot{x}^-(s) = 1 \, .$$

Στον υπολογισμό του ανωτέρω ολοκληρώματος κάναμε χρήση της συνέχειας της x, οπότε τα ολοκλήρωμα της ταχύτητας και της θέσης τείνει στο μηδέν στο όριο $\epsilon \to 0$.

Με αυτές τις διευκρινήσεις μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε τη λύση. Οι αρχικές συνθήκες αμέσως δίνουν ότι $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, οπότε για $t < s$ έχουμε

$$x(t) = 0, \dot{x}(t) = 0 \quad , \quad t < s \, ,$$

ενώ, απαιτώντας η λύση να είναι συνεχής στο $t = s$ και η ταχύτητα του σωματιδίου να είναι ίση με 1 αμέσως μετα την ώθηση, η λύση για $t > s$ είναι:

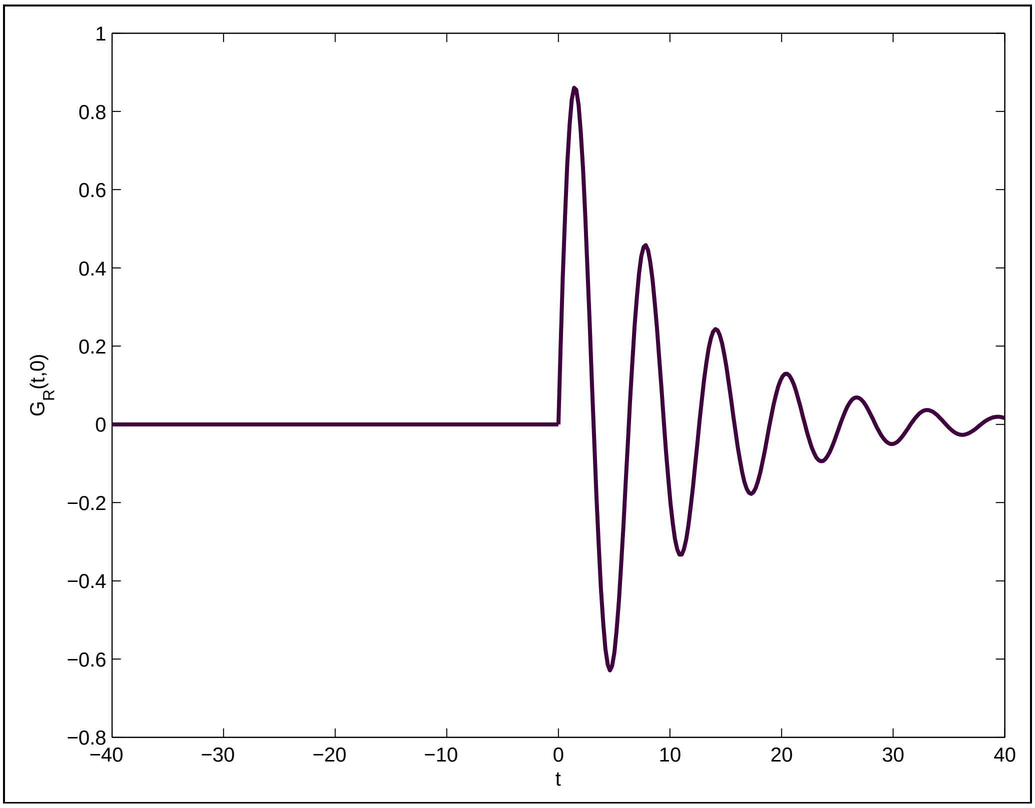
$$x = \frac{e^{-\gamma(t-s)} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-s)\right)}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad , \quad t > s \, .$$

Η συνάρτηση Green είναι συνεπώς η

$$G_R(t,s) = \frac{e^{-\gamma(t-s)} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-s)\right)}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \Theta(t-s)$$

όπου η συνάρτηση άλματος ορίζεται

$$\Theta(t-s) = \begin{cases} 1, & \text{t >s}\,; \\ 0, & \text{t < s.} \end{cases}$$



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση της ύστερης συνάρτησης Green $G_R(t,0)$ ενός αρμονικού ταλαντωτή με $\gamma = 0.1$ και $\omega_0 = 1$. Η λύση αυτή αντιστοιχεί στη κίνηση που θα προκληθεί αν σε ένα σωματίδιο που ηρεμούσε στο σημείο ισορροπίας ασκηθεί μία μοναδιαία ώθηση τη χρονική στιγμή $t = 0$. Παρατηρείστε την ασυνέχεια στη παράγωγο της συνάρτησης (που αντιστοιχεί στη ταχύτητα του σωματιδίου) στο χρόνο $t = 0$ όταν ασκείται η ώθηση.

Η συνάρτηση Green (βλ. Σχήμα 2) που υπολογίσαμε λέγεται ύστερη (retarded) συνάρτηση Green, και συμβολίζεται με G_R, διότι περιγράφει τη κίνηση του φυσικού συστήματος που ικανοποιεί την αρχή της αιτιότητας, δηλαδή αντιστοιχεί στη λύση κατα την οποία το αποτέλεσμα (η κίνηση) ακολουθεί το αίτιο (την ώθηση).

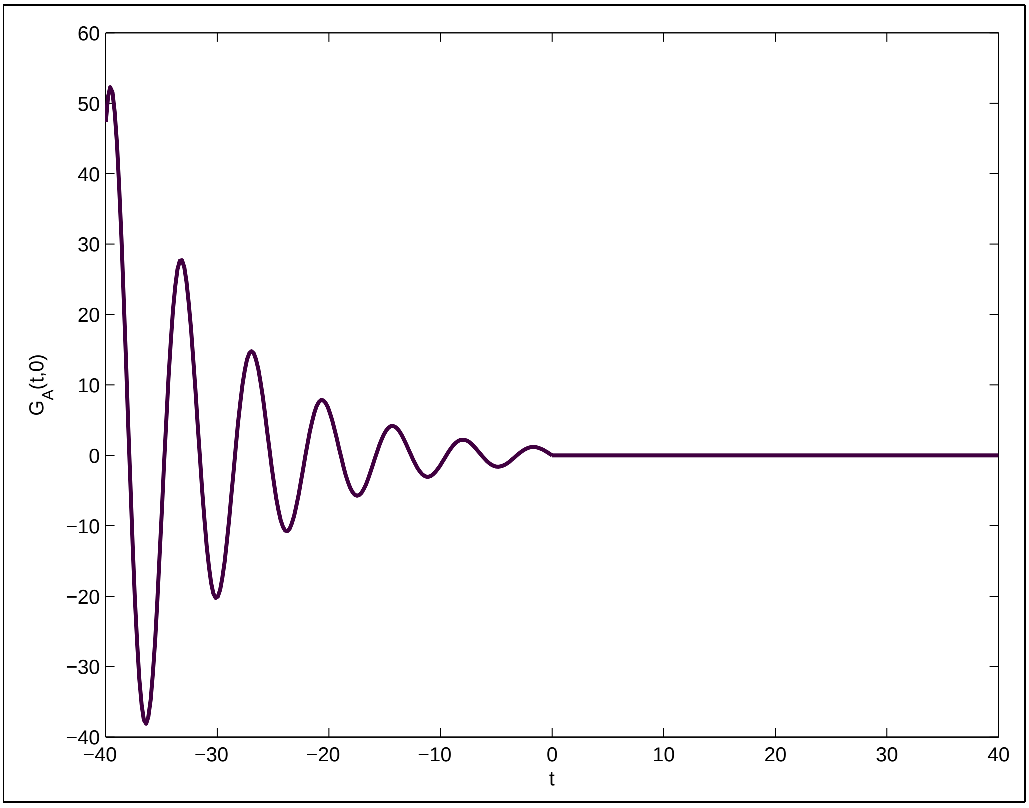
Αντίθετα, η πρόδρομη (advanced) συνάρτηση Green, που συμβολίζεται με G_A, ικανοποιεί την εξίσωση (1) αλλά με τις τελικές συνθήκες

$$x(\infty) = \dot{x}(\infty) = 0 \ .$$

Στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα προηγείται του αιτίου και αυτή η συνάρτηση Green δίδεται (βλ. Σχήμα 3) από την

$$G_A(t,s) = \frac{e^{\gamma(s-t)} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(s-t)\right)}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \Theta(s-t) \ .$$

Η λύση αυτή εύκολα προκύπτει ακολουθώντας τα βήματα που ακολουθήσαμε για τη κατασκευή της ύστερης λύσης, αλλά θα μπορούσαμε να τη γράψουμε αμέσως αντιστρέφωντας τους χρόνους ($t \to -t$, $s \to -s$) και το πρόσημο της τριβής $\gamma \to -\gamma$ στη λύση της ύστερης συνάρτησης Green, διότι η διαφορική εξίσωση και οι συνοριακές συνθήκες της πρόδρομης συνάρτησης Green προκύπτουν αν στη διαφορική εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες που διέπουν την ύστερη συνάρτηση Green κάνετε τον μετασχηματισμό: $t \to -t$, $s \to -s$, $\gamma \to -\gamma$.



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της πρόδρομης συνάρτησης Green $G_A(t, 0)$ ενός αρμονικού ταλαντωτή με $\gamma = 0.1$ και $\omega_0 = 1$. Παρατηρείστε την ασυνέχεια της ταχύτητας στο χρόνο $t = 0$ όταν ασκείται η ώθηση, καθώς και ότι η λύση αυτή αυξάνεται εκθετικά για $t \to -\infty$.

Γενικότερα, παρατηρείστε ότι η συνάρτηση Green εξαρτάται μόνο από το χρονικό διάστημα $t - s$. Αυτό είναι απόρροια της αναλλοιότητας της εξίσωσης στις μεταθέσεις του χρόνου, αν αλλάξουμε την αρχή του χρόνου δεν θα αλλάξει η εξίσωση καθώς και η λύση της, και συνεπώς η λύση μπορεί να εξαρτάται μόνο από το χρονικό διάστημα που πέρασε από την άσκηση του αιτίου (της ώθησης) που προκάλεσε τη κίνηση. Αυτή η ιδιότητα της συνάρτησης Green ισχύει σε κάθε χρονοανεξάρτητο φυσικό σύστημα.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι ο αρμονικός ταλαντωτής διεγείρεται με μία γενική διέγερση $F(t)$.Επειδή η διέγερση αυτή μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μοναδιαίων ωθήσεων μέσω της ταυτότητας:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\delta(t - s)ds \ ,$$

η γενική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\delta(t-s)ds \tag{2}$$

και έχει την εξαναγκασμένη λύση

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_R(t,s)F(s)ds \ , \tag{3}$$

αν αρχικά ο αρμονικός ταλαντωτής, πριν δράσει η δύναμη ηρεμούσε στην κατάσταση ισορροπίας. Στην κατασκευή της εξαναγκασμένης απόκρισης χρησιμοποιηθηκε η ύστερη συνάρτηση Green διότι με τον τρόπο αυτό ικανοποιείται η αιτιότητα. Στην λύση αυτή μπορεί να προστεθεί μία λύση της ομογενούς αν αρχικά πριν δράσει η εξωτερική δύναμη ο αρμονικός ταλαντωτής δεν ήταν σε ηρεμία. Αξίζει να επιβεβαιώσουμε στο σημείο αυτό ότι πράγματι η λύση δίδεται από την (3). Αν συμβολίσουμε με

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2$$

τον γραμμικό τελεστή που διέπει την δυναμική του ταλαντωτή, τότε πρέπει να δείξουμε ότι

$$L\int_{-\infty}^{\infty} G_R(t,s)F(s)ds = F(t) \ .$$

Επειδή, όμως ο τελεστής είναι γραμμικός θα είναι

$$\begin{aligned} L\left(\int_{-\infty}^{\infty} G_R(t,s)F(s)ds\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(LG_R(t,s)\right)F(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-s)F(s)ds \\ &= F(t) \end{aligned}$$

επειδή εξόρισμού

$$LG_R(t,s) = \delta(t-s) \ .$$

Η εξαναγκασμένη λύση παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_R(t,s)F(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\frac{e^{-\gamma(t-s)}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-s)\right)}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\Theta(t-s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} F(s)\frac{e^{-\gamma(t-s)}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-s)\right)}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}ds \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα λήφθηκε υπόψη ότι για χρόνους $s > t$ λόγω αιτιότητας δεν υπάρχει απόκριση (επειδή τότε $\Theta(t-s) = 0$).

Άσκηση: Δείξτε με κατευθείαν υπολογισμό ότι η

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \frac{e^{-\gamma(t-s)} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-s)\right)}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \Theta(t-s) ds$$

ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

Η μορφή αυτή μας δίνει την απόκριση του ταλαντωτή σε οποιαδήποτε διέγερση. Για να τη βρούμε αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα όταν μας δίνεται η εξωτερική διέγερση. Πολλές φορές το ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογισθεί σε κλειστή μορφή. Σε αυτές τις περιπτώσεις υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αριθμητικά. Για τον αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $\Delta t = (b - a)/n$, λαμβάνουμε τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία $t_i = a + i\Delta t$ με $i = 0, \cdots, n$ και προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα με το άθροισμα:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \Delta t \left(\frac{f(t_0)}{2} + f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_{n-1}) + \frac{f(t_n)}{2} \right).$$

Για αρκούντως μεγάλο n η τιμή του ολοκληρώματος δίδεται από το άθροισμα αυτό.

Πρόβλημα: Θεωρήστε τον αρμονικό ταλαντωτή ο οποίος διεγείρεται με μία αρμονική δύναμη στη φυσική συχνότητα, η διέγερση, όμως, ασκείται μόνο κατά το χρονικό διάστημα $[0, 2\pi n]$, όπου n κάποιος φυσικός αριθμός. Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$\ddot{x} + 0.2\dot{x} + x = \cos(t)\Theta(t)\Theta(2\pi n - t).$$

Σκοπός του ερωτήματος είναι να συγκρίνεται τη μέγιστη απόκριση του ταλαντωτή με την απόκριση που θα αναμένατε αν η δύναμη ασκείτο για πάντα, οπότε ο ταλαντωτής θα είχε τη συντονισμένη απόκριση. Προς τούτο ολοκληρώστε αριθμητικά την παραπάνω εξίσωση από $t = 0$ μέχρι $t = 50$, με τον τρόπο που ακολουθήσατε στο προσδιορισμό της κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο. Δώστε τη γραφική παράσταση της λύσης για $n = 4$. Σε πόσο χρόνο η κίνηση φτάνει στο μέγιστο πλάτος της; Γράψτε έπειτα την ολοκληρωτική λύση μέσω της συνάρτησης Green και υπολογίστε την με αριθμητική ολοκλήρωση. Δείξτε ότι οι δύο λύσεις συμπίπτουν.
