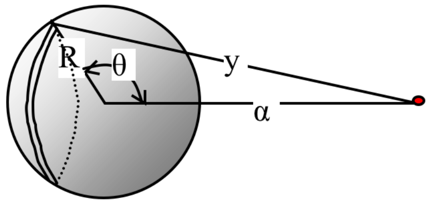
Βαρυτική έλξη μεταξύ των ουρανίων σωμάτων

Μέχρι τώρα, θεωρήσαμε ότι οι πλανήτες είναι σημειακές μάζες που περιφέρονται γύρω από έναν ακλόνητο Ήλιο σε τροχιές σύμφωνα με τους νόμους που πρωτοπεριέγραψε ο Κέπλερ. Φυσικά μια τέτοια θεώρηση απέχει πολύ από την πραγματικότητα. Τα κυρίως σώματα του ηλιακού μας συστήματος είναι κατά πολύ καλή προσέγγιση σφαίρες και όχι σημειακές μάζες. Ισχύει ο νόμος της παγκόσμιας έλξης και για σφαίρες; Ας το ελέγξουμε για την περίπτωση ενός σφαιρικού φλοιού και μιας σημειακής μάζας. Θα θεωρήσουμε ένα σφαιρικό φλοιό με επιφανειακή πυκνότητα σ σε απόσταση a από μια σημειακή μάζα m. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται στη σημειακή μάζα, ολοκληρώνοντας όλες τις στοιχειώδεις δυνάμεις που ασκούνται στη σημειακή μάζα από κάθε απειροστό τμήμα της επιφάνειας. Ένας τέτοιος υπολογισμός είναι σχετικά δύσκολος αφού η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι διανυσματική. Έτσι λοιπόν θα καταφύγουμε σε έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού αρκετά απλούστερο: θα υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια μεταξύ των δύο σωμάτων και μέσω αυτής θα υπολογίσουμε την αμοιβαία έλξη τους με μια απλή παραγώγιση (περισσότερα σχετικά με την έννοια της δυναμικής ενέργειας και του δυναμικού θα δούμε αργότερα). Η δυναμική ενέργεια, όντας βαθμωτή ποσότητα, υπολογίζεται αρκετά ευκολότερα. Θα τμήσουμε τη σφαίρα σε δακτύλιους κάθετους στη διάκεντρο των δύο μαζών. Ο κάθε τέτοιος δακτύλιος μάζας dM συνεισφέρει στη δυναμική ενέργεια των δύο σωμάτων κατά



$$dU = -\frac{Gm\,dM}{y},$$

αφού όλη η μάζα αυτού βρίσκεται σε απόσταση y από τη σημειακή μάζα. Προσθέτοντας τις δυναμικές ενέργειες όλων αυτών των δακτυλίων έχουμε

$$U = -\int\frac{Gm}{y}dM = -Gm\int\frac{\sigma dS}{y} = -Gm\sigma 2\pi\int\frac{R\sin\theta}{y}Rd\theta\,.$$

Αφού όμως $y^2 = a^2 + R^2 + 2aR\cos\theta$, $2aR\sin\theta\, d\theta = 2ydy$, οπότε

$$U = -2\pi\sigma Gm\frac{R}{a}\int dy\,.$$

Αν η μάζα m βρίσκεται εντός της σφαίρας η ολοκλήρωση $\int dy$ δίνει $2a$, ενώ αν βρίσκεται εκτός της της σφαίρας δίνει $2R$. Συνολικά λοιπόν, αν λάβουμε υπόψη ότι $4\pi\sigma R^2 = M$,

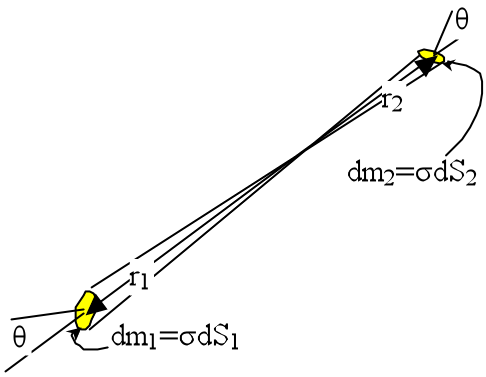
$$U = -GmM\times\begin{cases}1/R, \text{αν } a < R\\ 1/a, \text{αν } a > R\end{cases}.$$

Η δύναμη λοιπόν με την οποία έλκονται οι δύο μάζες ($\vec{F} = -\vec{\nabla}U$), θα είναι

$$F = \begin{cases}0, \quad \text{αν } a < R\\ \dfrac{GmM}{a^2}, \text{αν } a > R\end{cases}.$$

α) Όπως βλέπετε τα δύο σώματα έλκονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο ωσάν να ήταν δύο σημειακές μάζες σε απόσταση α μεταξύ τους. Και φυσικά το ίδιο ισχύει ακόμη και αν ήταν η μια, αντί σφαιρικού φλοιού, συμπαγής σφαίρα, αφού ο κάθε φλοιός στον οποίο θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε αυτή θα ασκούσε στη σημειακή μάζα έλξη όση αν όλη η μάζα του κάθε φλοιού συγκεντρωνόταν στο κέντρο του. Η ιδιότητα αυτή, μια συμπαγής σφαίρα δηλαδή να ασκεί έλξη όση αν όλη η μάζα της να βρισκόταν στο κέντρο της, μολονότι μπορεί να φαίνεται τετριμμένη δεν είναι. Πρόκειται για συνέπεια της σφαιρικής συμμετρίας· για παράδειγμα για έναν συμπαγή κύβο δεν θα ίσχυε η παραπάνω ιδιότητα.

β) Ένα δεύτερο, μη αναμενόμενο ίσως, αποτέλεσμα της ανάλυσής μας είναι το γεγονός της απουσίας δύναμης στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού· συνέπεια και πάλι της σφαιρικής συμμετρίας. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε αρκετά εύκολα να πιστούμε με γεωμετρικά επιχειρήματα πώς έτσι πράγματι είναι. Αν αποκόψουμε από τον σφαιρικό φλοιό τις τομές δύο κατά κορυφή κώνων απειροστού ανοίγματος, με κορυφή ένα τυχαίο σημείο εντός της σφαίρας, με το φλοιό (βλ. Σχήμα), οι δύο αυτές απειροστές επιφάνειες ασκούν σε μια μάζα M που θα τοποθετήσουμε στην κορυφή των κώνων αντίθετες δυνάμεις με μέτρο:



$$F_{1,2} = \frac{GMdm_{1,2}}{r_{1,2}^{\ 2}} = GM\sigma \frac{dS_{1,2}}{r_{1,2}^{\ 2}},$$

αντίστοιχα. Όμως $dS_{1,2} = \dfrac{d\Omega\, r_{1,2}^{\ 2}}{\cos\theta}$, οπότε οι δύο δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες και αλληλοαναιρούνται (οι γωνίες θ είναι ίδιες και για τις δύο στοιχειώδεις μάζες αφού πρόκειται για τις γωνίες μεταξύ μιας χορδής και των ακτίνων που περνούν από τα άκρα αυτής). Στρέφοντας στη συνέχεια τους κώνους ώστε να καλύψουμε ολόκληρη τη σφαιρική επιφάνεια καταλήγουμε σε μηδενική συνολική βαρυτική δύναμη στο εσωτερικό του φλοιού. Αντίστοιχα για μια συμπαγή σφαίρα, βαρυτική δύναμη στο εσωτερικό αυτής θα ασκεί μόνο η σφαίρα στο εσωτερικό του υποτιθέμενου σημείου, ενώ τα υπερκείμενα στρώματα δεν θα συνεισφέρουν καθόλου.

Ακόμη όμως δεν είμαστε σε θέση να ανταλλάξουμε τα ουράνια σώματα-σφαίρες με σημειακές μάζες αφού το μόνο που γνωρίζουμε είναι πώς αλληλεπιδρούν οι σφαιρικές μάζες (με ισοτροπική εννοείται κατανομή μάζας) με σημειακές μάζες. Εδώ ακριβώς βρίσκεται η αξία του 3^{ου} νόμου του Νεύτωνα. Όσον αφορά την κίνηση της σφαίρας 2 εξαιτίας της βαρυτικής της αλληλεπίδρασης με τη σφαίρα 1, μπορούμε να εξαφανίσουμε τη σφαίρα 1 και στη θέση της να τοποθετήσουμε μια σημειακή μάζα στο κέντρο αυτής με μάζα όση ολόκληρη η σφαίρα 1. Τότε στην κάθε στοιχειώδη μάζα της σφαίρας 2 θα ασκείται η έλξη από τη σημειακή πλέον μάζα 1. Όπως έχουμε μάθει κατά την ανάλυση συστημάτων που αποτελούνται από πολλά σωματίδια, το κέντρο μάζας αυτών θα κινείται με επιτάχυνση ίση με τη συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται σε αυτά δια τη συνολική τους μάζα. Έτσι το κέντρο μάζας της 2, δηλαδή το γεωμετρικό κέντρο αυτής, θα κινείται με επιτάχυνση ίση με τη συνολική βαρυτική δύναμη που δέχεται από τη σημειακή μάζα 1, δια τη μάζα της 2. Αλλά η συνολική δύναμη έλξης της 2 από την 1 είναι ίση και αντίθετη με τη συνολική δύναμη έλξης της 1 από τη 2, και αφού η 1 είναι σημειακή και η 2 σφαιρική, είναι ίση κατά μέτρο με Gm_1m_2/a^2. Συνεπώς η επιτάχυνση του κέντρου της 2 είναι:

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

Προσέξτε ότι η επιτάχυνση της 2 δεν εξαρτάται από τη μάζα της 2 (αποτέλεσμα του ότι η μάζα αδράνειας και η βαρυτική μάζα είναι ίσες – πρόκειται για πειραματικά επιβεβαιωμένο αποτέλεσμα). Τα διανύσματα $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ δίδουν τις θέσεις των κέντρων των δύο σφαιρών, ενώ το δεξιό κλάσμα της παραπάνω σχέσης είναι απλώς ένα μοναδιαίο διάνυσμα που «κοιτάζει» από το κέντρο της 2 προς το κέντρο της 1 (ελκτική δύναμη). Αντίστοιχη σχέση μπορούμε να γράψουμε και για την επιτάχυνση της 1. Με άλλα λόγια οι δύο σφαίρες κινούνται σαν να ήταν σημειακές μάζες που έλκονται με τη δύναμη της παγκόσμιας έλξης. Επομένως μπορούμε να ξεχάσουμε τις διαστάσεις των ουρανίων σωμάτων τουλάχιστον στην προσέγγιση που θεωρούμε αυτά σφαίρες. Στην πραγματικότητα η μη ακριβής σφαιρικότητα των πλανητών δημιουργεί κάποια πολυπλοκότητα στις τροχιές αυτών καθώς επίσης και των δορυφόρων τους αλλά και αυτές μπορούν εύκολα να μελετηθούν ως διορθώσεις στις ελλειπτικές τροχιές που είδαμε σε προηγούμενη διάλεξη.

Τέλος, τι διορθώσεις επιβάλλει η πεπερασμένη μάζα του Ήλιου στη θεώρηση των ελλειπτικών τροχιών; Για ευκολία θα θεωρήσουμε αρχικά μόνο τον Ήλιο (μάζα 1) και έναν πλανήτη (μάζα 2). Όπως είδαμε μπορούμε να αγνοήσουμε τις διαστάσεις αυτών ενόσω δεν έρχονται σε επαφή. Θα ισχύει λοιπόν ότι:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|},$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

Λόγω απουσίας άλλων δυνάμεων εκτός της μεταξύ τους έλξης, το κέντρο μάζας αυτών θα κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι οι θέσεις των σωμάτων είναι μετρημένες στο σύστημα του κέντρου μάζας, το πιο λογικό σύστημα για να αναλύσει κανείς την κίνηση των σωμάτων (σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα θα πρέπει να προσθέσουμε μια σταθερή ταχύτητα στην κίνηση των σωμάτων). Όσο για τη σχετική θέση των δύο σωμάτων $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, θα έχουμε

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{1}$$

Πρόκειται ακριβώς για την επιτάχυνση ενός σωματιδίου εξαιτίας ενός βαρυτικού κέντρου μάζας $m_1 + m_2$, η οποία οδηγεί σε ελλειπτική τροχιά γύρω από αυτό όπως έχουμε δει. Η έλλειψη αυτή δεν περιγράφει την τροχιά κανενός από τα δύο σώματα, αφού αφορά τη σχετική θέση των δύο σωμάτων αλλά με αρχή το κέντρο μάζας. Οι θέσεις των δύο σωμάτων είναι συγκεκριμένα κλάσματα της σχετικής θέσης $\vec{r}$ ($\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$, $\vec{r}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$), επομένως τα δύο σώματα κινούνται και αυτά σε δύο συνεστιακές ελλείψεις (με κοινή εστία το κέντρο μάζας) όμοιες της έλλειψης που διαγράφει το $\vec{r}$.

Είμασταν λοιπόν τόσο τυχεροί και παρά τις προσεγγίσεις των σωμάτων του Ηλιακού μας συστήματος με σημεία και του Ήλιου ώς ακλόνητου να φθάσαμε ακριβώς σε σωστά αποτελέσματα; Περίπου· μόνο που η τύχη μας, ή καλύτερα αυτή του Κέπλερ που έκανε τις πρώτες σχετικές αστρονομικές παρατηρήσεις βρίσκεται στο ότι το Ηλιακό μας σύστημα είναι όπως είναι και στο ότι οι παρατηρήσεις του ...δεν ήταν και πολύ ακριβείς. Πιο συγκεκριμένα, οι τροχιές είναι πράγματι ελλείψεις, η σάρωση της επιβατικής ακτίνας των πλανητών γίνεται με σταθερό ρυθμό -γύρω από το κέντρο μάζας βέβαια-, αλλά ο κύβος του μεγάλου ημιάξονα (το μισό δηλαδή της μέγιστης απόστασης του εκάστοτε πλανήτη από τον Ήλιο) δια το τετράγωνο των περιόδων δεν είναι ίδιο για όλους τους πλανήτες παρά είναι ανάλογο της συνολικής μάζας του πλανήτη και του Ήλιου (βλέπε τη σχέση (1) και παράβαλλέ τη με την αντίστοιχη σχέση όταν θεωρήσαμε συγκεκριμένο ελκτικό κέντρο προκειμένου να βρούμε τη σχέση μεταξύ τροχιάς και είδους κεντρικής δύναμης). Έτσι λοιπόν ο λόγος αυτός είναι στην πραγματικότητα

Πλανήτης	**α^3/T^2 (σε 10^{19} $km^3/days^2$)**
Ερμής	2.510
Αφροδίτη	2.509
Γη	2.509
Άρης	2.508
Δίας	2.511
Κρόνος	2.510

Με εξαίρεση την περίπτωση του Ερμή, οι υπόλοιποι λόγοι είναι ανάλογοι του αθροίσματος της μάζας του Ήλιου και του πλανήτη[1]. Ευτυχώς, μάλλον, οι υπολογισμοί του Κέπλερ δεν διέθεταν αυτή την ακρίβεια, και μέσω της διατύπωσης των τριών φερώνυμων νόμων, οδήγησαν αργότερα το Νεύτωνα στη διατύπωση του νόμου της Παγκόισμιας έλξης. Μέχρι σήμερα ο νόμος αυτός έχει ελεγχθεί από τις κοσμικές διαστάσεις (όπου γίνεται ιδιαίτερα έκδηλος) μέχρι και σε αποστάσεις της τάξης του μικρομέτρου. Η διατύπωση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας αν και ανασκεύασε ολοκληρωτικά το θεωρητικό πλαίσιο της βαρύτητας εξακολουθεί να προβλέπει το γνωστό νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου για συνήθεις συμπυκνώσεις της ύλης.

[1] Στην πραγματικότητα η ύπαρξη περισσοτέρων των δύο σωμάτων καθιστά την κατάσταση αρκετά πιο περίπλοκη και ειδικότερα η κίνηση του Δία, του μεγαλύτερου πλανήτη, επηρεάζει σημαντικά την κίνηση των υπόλοιπων πλανητών. Επιπλέον η γειτνίαση του Ερμή στον Ήλιο κάνει την τροχιά αυτού ακόμη πιο περίπλοκη ως άμεση εκδήλωση της μη ακριβούς σφαιρικότητας του Ήλιου.