Στην περίπτωση της ταλάντωσης με κρίσιμη απόσβεση οι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις *εκφυλίζονται* (καταλήγουν να ταυτίζονται). Στην περιοχή ασθενούς απόσβεσης ($\omega > \gamma$) δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις είναι οι $x_1(t) = e^{-\gamma t}\cos\Omega t$ και $x_2(t) = e^{-\gamma t}\sin\Omega t$, όπου $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$. Ο εκφυλισμός των λύσεων στην κρίσιμη απόσβεση $\omega = \gamma$ διαφαίνεται διότι στο όριο $\Omega \to 0$ οι λύσεις για ασθενή απόσβεση γίνονται $x_1(t) \to e^{-\gamma t}$ ενώ η $x_2(t) \to 0$, και έτσι απομένει μόνο μία μη τετριμμένη λύση. Επειδή όμως το πρόβλημα είναι γραμμικό μπορούμε να διαιρέσουμε την $x_2(t)$ με οποιοδήποτε αριθμό και να συνεχίσουμε να έχουμε λύση. Διαιρώντας με το Ω θα έχουμε ότι η δεύτερη ανεξάρτητη λύση θα είναι $\lim_{\Omega \to 0} \frac{x_2(t)}{\Omega} = te^{-\gamma t}$, οπότε η γενική λύση στη περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης είναι $e^{-\gamma t}(A + Bt)$, όπου οι σταθερές A, B προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Θεωρούμε τώρα ότι ασκείται και μία εξωτερική δύναμη $F(t)$ στον ταλαντωτή. Η εξίσωση τώρα του ταλαντωτή μπορεί να γραφεί ως $\wp x(t) = F(t)$, όπου $\wp$ ο διαφορικός τελεστής[1] $\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2$ (ω_0 η φυσική συχνότητα του ελεύθερου ταλαντωτή). Επειδή η εξίσωση είναι γραμμική (ο $\wp$ είναι ένας γραμμικός τελεστής δηλαδή έχει την ιδιότητα: $\wp[ax_1(t) + bx_2(t)] = a\wp[x_1(t)] + b\wp[x_2(t)]$) η απόκριση του ταλαντωτή μπορεί να γραφεί ως η υπέρθεση $x_o(t) + x_f(t)$ όπου $x_o(t)$ η ομογενής λύση η οποία ικανοποιεί την εξίσωση του ταλαντωτή χωρίς εξωτερική δύναμη δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση $\wp x_o(t) = 0$ και $x_f(t)$ η ειδική λύση η οποία ικανοποιεί την εξίσωση $\wp x_f(t) = F(t)$. Η εξέλιξη του συστήματος τότε, μπορεί να αναλυθεί πλήρως διότι οι οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες μπορεί να ικανοποιηθούν προσθέτοντας στην ειδική λύση την κατάλληλη ομογενή λύση έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.

Την ομογενή λύση την έχουμε κατασκευάσει ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο και γνωρίζουμε ότι εάν υπάρχει απόσβεση, η λύση αυτή τείνει με την πάροδο του χρόνου στο μηδέν, οπότε μετά από αρκετό χρόνο η απόκριση του ταλαντωτή θα δίνεται μόνο από την ειδική λύση. Η ασυμπτωτική αυτή απόκριση λέγεται εξαναγκασμένη απόκριση, ενώ η ομογενής λύση λέγεται και μεταβατική λύση διότι ρυθμίζει τη μετάβαση από τις ιδιαίτερες αρχικές συνθήκες στην εξαναγκασμένη απόκριση η οποία είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες.

Θα επικεντρώσουμε τώρα την προσοχή μας στο να υπολογίσουμε την εξαναγκασμένη απόκριση. Αυτή η λύση εξαρτάται γενικά από τη μορφή της εξωτερικής δύναμης, και θα νόμιζε κανείς ότι θα μπορούσαμε να εξάγουμε συμπεράσματα, μόνο κατά περίπτωση, για την εξαναγκασμένη κίνηση του ταλαντωτή. Μπορούμε όμως να προχωρήσουμε και να κατανοήσουμε την εξαναγκασμένη συμπεριφορά του συστήματος κάνοντας χρήση και πάλι της γραμμικότητας και της χρονικής αναλλοιότητας της δυναμικής εξίσωσης μελετώντας μόνο τη συμπεριφορά του συστήματος σε περιοδική δύναμη της μορφής $\exp(i\omega t)$.

[1] Ο τελεστής είναι απλώς ένα μαθηματικό αντικείμενο το οποίο δρα επάνω σε οτιδήποτε τον ακολουθεί.

Αυτό ισχύει διότι κάθε συνάρτηση $F(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε αρμονικές, δηλαδή μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα αρμονικών συναρτήσεων: $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, όπου το πλάτος των αρμονικών προσδιορίζεται από την εξωτερική δύναμη από τον τύπο: $\widetilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt$. Αν η λύση στη μονοχρωματική αρμονική εξωτερική δύναμη $\widetilde{F}(\omega) e^{i\omega t}$ είναι η $x_\omega(t)$ τότε η κίνηση του σώματος στο οποίο ασκείται η δύναμη $F(t)$ θα είναι το άθροισμα των μονοχρωματικών αποκρίσεων $x_\omega(t)$ δηλαδή η εξαναγκασμένη απόκριση του ταλαντωτή θα δίνεται από την $x_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_\omega(t) d\omega$. Αυτό προκύπτει από τη γραμμικότητα της εξίσωσης. Διότι εφόσον η $x_\omega(t)$ ικανοποιεί εκ κατασκευής την εξίσωση $\wp x_\omega(t) = \widetilde{F}(\omega) e^{i\omega t}$, η $x_f(t)$ λόγω της γραμμικότητας της $\wp$ θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\wp\left(\int_{-\infty}^{\infty} x_\omega(t) d\omega \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \wp\big(x_\omega(t) d\omega\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = F(t).$$

Οπότε αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του ταλαντωτή σε αρμονική εξωτερική δύναμη :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = \cos(\omega t + \varphi),$$

αν το καταφέρουμε αυτό μπορούμε να βρούμε τη λύση αθροίζοντας τις μονοχρωματικές αποκρίσεις.

Είναι προτιμότερο, όμως, να μεταφερθούμε στο μιγαδικό πεδίο και να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz}{dt} + {\omega_0}^2 z = F_0 \exp(i\omega t),$$

όπου $F_0 = A e^{i\varphi}$. Τη φυσική διέγερση x την προσδιορίζουμε στο τέλος παίρνοντας το πραγματικό μέρος της μιγαδικής λύσης z (αυτό είναι δυνατόν, όπως συζητήσαμε και προηγουμένως, διότι η εξίσωση είναι γραμμική και έχει πραγματικούς συντελεστές).

Το πλεονέκτημα της μεταφοράς στο μιγαδικό πεδίο έγκειται στο γεγονός ότι οι εκθετικές συναρτήσεις είναι μη αναγώγιμες, και συνεπώς η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων μετατρέπεται σε επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων. Εάν λοιπόν θέσουμε $z = R(\omega) A \exp(i\omega t + i\varphi)$, δηλαδή η απόκριση είναι ίδια με την εξωτερική δύναμη τότε θα έχουμε ότι το

$$R(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2}$$

και η φυσικά πραγματοποιήσιμη λύση θα είναι

$$x_\omega(t) = \Re\left(\frac{A \exp(i\omega t + i\varphi)}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2} \right)$$

όπου το $\Re$ συμβολίζει το πραγματικό μέρος και η $x_\omega(t)$ είναι η εξαναγκασμένη ταλάντωση του ταλαντωτή σε διέγερση συχνότητας ω.

Αν γράψουμε την ποσότητα $R(\omega) = \rho e^{i\theta}$ τότε η μονοχρωματική απόκριση είναι η περιοδική συνάρτηση $x_\omega(t) = A\rho\cos(\omega t + \varphi + \theta)$ όπου το ρ προσδιορίζει τον πολλαπλασιαστή μεγέθυνσης της απόκρισης και η γωνία θ τη φάση της απόκρισης σχετικά με τη φάση της δύναμης. Αν π.χ. $\theta = 0$ η δύναμη και η απόκριση εξελίσσονται εν φάσει και όταν η δύναμη είναι μέγιστη και η απόκριση είναι μέγιστη. Αν η $\theta = -\pi$ τότε η απόκριση ακολουθεί τη δύναμη και το μέγιστο της εξωτερικής δύναμης αντιστοιχεί σε ελάχιστο της απόκρισης.

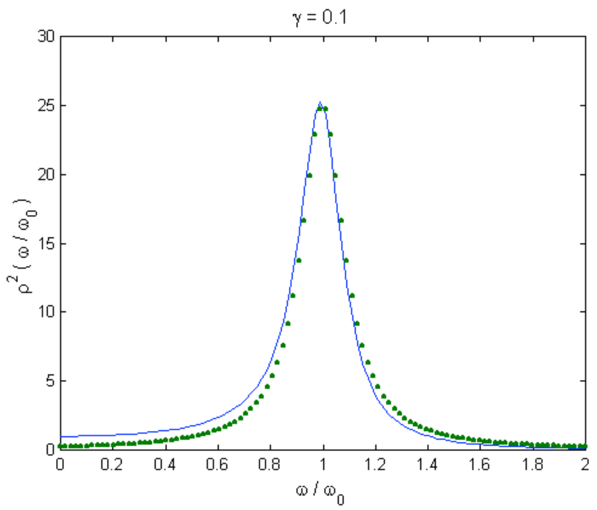
Θεωρούμε τώρα ότι η φυσική συχνότητα ω_0 που χαρακτηρίζει τον ταλαντωτή είναι δεδομένη. Τότε το μέτρο της απόκρισης ως συνάρτηση της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης δίνεται από

$$\rho^2 = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

και η φάση δίνεται από τον τύπο:

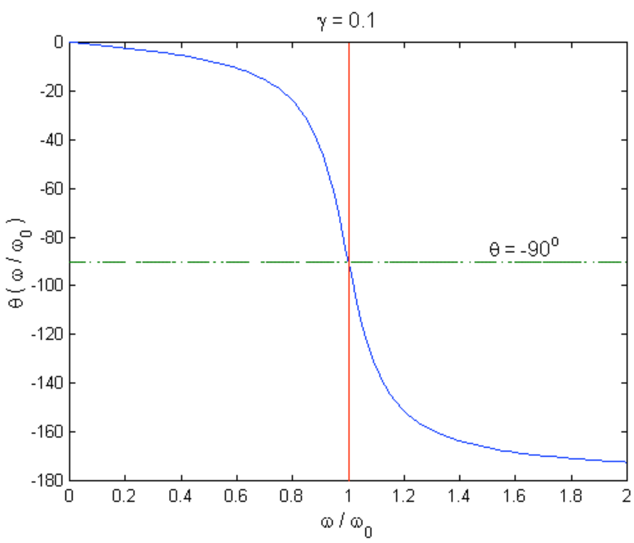
$$\tan\theta = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Την απόκριση σχεδιάζουμε στο παρακάτω σχήμα (συνεχής γραμμή) για την τιμή της απόσβεσης $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0.1$. Η απόκριση μεγιστοποιείται λίγο πριν από το $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ και η μέγιστη απόκριση τείνει στο άπειρο όταν ο συντελεστής απόσβεσης τείνει στο μηδέν.



Όταν δηλαδή η εξωτερική διέγερση έχει συχνότητα κοντά στη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή τότε ο ταλαντωτής απορροφά ενέργεια από την εξωτερική δύναμη και η απόκριση του είναι ιδιαιτέρως μεγάλη. Αυτό το φαινόμενο λέγεται συντονισμός (resonance). Όταν η απόκριση αποκτήσει ιδιαιτέρως μεγάλο πλάτος τότε η γραμμική προσέγγιση μπορεί να είναι ανεπαρκής και ίσως πρέπει να συμπεριληφθούν οι μη γραμμικοί όροι για τη περιγραφή της συμπεριφοράς του συστήματος. Όταν η συχνότητα διέγερσης είναι πολύ μικρή ($\frac{\omega}{\omega_0} << 1$) τότε η απόκριση δίνεται κατά προσέγγιση από το $\rho = \frac{1}{\omega_0^2}$. Σε αυτή την περίπτωση η επιτάχυνση και η δύναμη της τριβής είναι αμελητέα και έχουμε ισορροπία μεταξύ της δύναμης επαναφοράς $\omega_0^2 x$ και της εξωτερικής δύναμης, οπότε ο πολλαπλασιαστής μεγέθυνσης της απόκρισης είναι $\rho = \frac{1}{\omega_0^2}$. Προσέξτε επίσης ότι στην περίπτωση αυτή, όπως θα δούμε και παρακάτω, δεν υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ δύναμης και απόκρισης. Στο άλλο όριο $\frac{\omega}{\omega_0} >> 1$ η δύναμη επαναφοράς είναι αμελητέα και η επιτάχυνση προσδιορίζεται κατευθείαν από την εξωτερική δύναμη οπότε και έχουμε ότι $-\omega^2 x \approx F$ και συνεπώς η απόκριση είναι μικρή και η διαφορά φάσης είναι σχεδόν -180^0, δηλαδή η απόκριση καθυστερεί και όταν η δύναμη έχει μέγιστο η απόκριση έχει ελάχιστο.

Η φάση της απόκρισης παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι πάντα η απόκριση υστερεί της δύναμης (η γωνία θ είναι αρνητική) και όπως αναλύσαμε για φυσικές συχνότητες μικρότερες της φυσικής η απόκριση έχει σχεδόν της ίδια φάση με την εξωτερική διέγερση, ενώ για μεγαλύτερες έχει σχεδόν αντίθετη φάση. Όταν ο συντελεστής απόσβεσης είναι πολύ μικρός η μεταβολή της φάσης είναι ραγδαία στην περιοχή του συντονισμού όπου εκεί η φάση είναι ακριβώς -90^0, που όπως θα δούμε συνεπάγεται μεγάλη απορρόφηση ενεργείας.



Όταν το $\gamma/\omega_0 << 1$ μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συμπεριφορά του συστήματος περί το $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$, απλοποιώντας κάπως την έκφραση για το ρ. Επειδή στην περιοχή του συντονισμού $\omega \approx \omega_0$ μπορούμε να προσεγγίσουμε τη διαφορά

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0)$$

και θα έχουμε κατά προσέγγιση ότι:

$$\rho^2 \approx \frac{1}{4\omega_0^2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}$$

την οποία και σχεδιάζουμε (με τελείες) μαζί με την ακριβή έκφραση του πλάτους της απόκρισης. Παρατηρήστε ότι ακόμα και για $\gamma = 0.1\omega_0$ η έκφραση αυτή είναι ικανοποιητικά ακριβής ακόμα και για συχνότητες μακράν της συχνότητας συντονισμού. Από την προσεγγιστική αυτή έκφραση, εύκολα υπολογίζεται το εύρος της καμπύλης συντονισμού στο ύψος που αντιστοιχεί στο μισό της μέγιστης απόκρισης. Αποδεικνύεται ότι αυτό ισούται με τον συντελεστή απόσβεσης γ. (Το συνολικό πλάτος της «καμπάνας» συντονισμού είναι 2γ.)

Επειδή στον ταλαντωτή ασκείται εξωτερική δύναμη, ενέργεια μεταφέρεται από το εξωτερικό αίτιο στον ταλαντωτή όπου και συσσωρεύεται. Εφόσον η δύναμη είναι της μορφής $\cos(\omega t)$ και η απόκριση περιοδική, η ενέργεια του ταλαντωτή είναι μία περιοδική[2] συνάρτηση η οποία έχει, όμως, μη μηδενική μέση τιμή. Για να υπολογίσουμε την εξέλιξη της ενέργειας του ταλαντωτή γράφουμε την

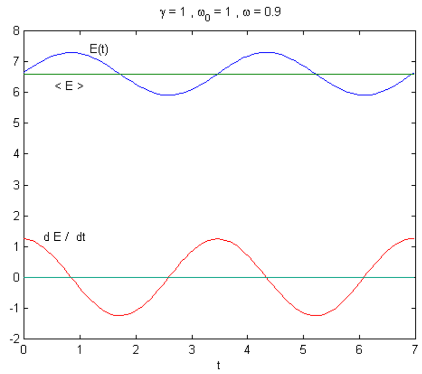
[2] Όταν δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη και ο ταλαντωτής ακολουθεί φθίνουσα ταλάντωση, η ενέργεια του ταλαντωτή δεν κυμαίνεται αλλά φθίνει εκθετικά με το χρόνο. Υπό την παρουσία εξωτερικής διέγερσης, όμως, η ενέργεια παρουσιάζει περιοδικές διακυμάνσεις εφόσον άλλοτε μεταφέρεται ενέργεια από το διεγέρτη στον ταλαντωτή και άλλοτε από τον ταλαντωτή στο διεγέρτη.

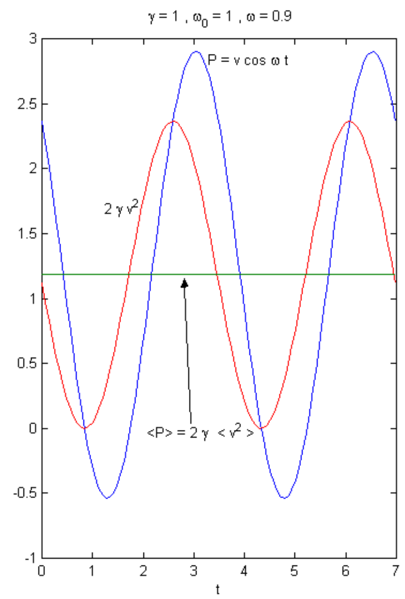
εξαναγκασμένη απόκριση στη μορφή $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, όπου βρίσκει κανείς ότι:

$$A = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \text{ και } B = \frac{2\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}.$$

Το A ονομάζεται ελαστικό πλάτος και το B πλάτος απορρόφησης. Η ενέργεια του ταλαντωτή είναι $E(t) = \frac{\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2}{2}$. Συμβολίζουμε τη μέση τιμή μιας συνάρτησης του χρόνου $f(t)$ σε μία περίοδο με $\bar{f}$, δηλαδή $\bar{f} = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0} f(t)dt$. Υπολογίζουμε πρώτα τη μέση τιμή του x^2:

$$\overline{x^2} = A^2\overline{\cos^2\omega t} + B^2\overline{\sin^2\omega t} + 2AB\overline{\cos\omega t\sin\omega t} = \frac{A^2 + B^2}{2} = \frac{1}{2}\rho^2.$$





Εδώ χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ιδιότητα ότι $\overline{\cos^2\omega t} = \overline{\sin^2\omega t} = \frac{1}{2}$ και ότι $\overline{\cos\omega t\sin\omega t} = 0$ (δοκιμάστε να το αποδείξετε). Ομοίως βρίσκουμε ότι $\overline{\dot{x}^2} = \omega^2\overline{x^2}$ και συνεπώς η μέση ενέργεια του ταλαντωτή είναι $\bar{E} = \frac{1}{4}\left(\omega^2 + \omega_0^2\right)\rho^2$.

Ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας από τη δύναμη στον ταλαντωτή δίνεται από το ρυθμό παραγωγής έργου $P = \dot{x}\cos\omega t$, διότι εάν πολλαπλασιάσουμε την δυναμική εξίσωση με την ταχύτητα έχουμε

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}\cos\omega t - 2\gamma\dot{x}^2.$$

Ο πρώτος όρος στην εξίσωση μεταβολής της ενέργειας είναι ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας από την εξωτερική δύναμη στο ταλαντωτή, ενώ ο δεύτερος όρος είναι η ενέργεια η οποία αναλώνεται από τη τριβή (η οποία είναι πάντα θετική). Εάν πάρουμε τη μέση τιμή της εξίσωσης ενέργειας σε μία περίοδο τότε θα πρέπει να ισχύει $\bar{P} = 2\gamma\overline{\dot{x}^2}$, δηλαδή στη μέση κατάσταση ισορροπίας η ενέργεια που μεταφέρεται από το εξωτερικό αίτιο τελικά αναλώνεται (τι θα συνέβαινε σε διαφορετική περίπτωση;). Αυτό το συμπέρασμα είναι μία ειδική περίπτωση του θεωρήματος διαταραχών–ανάλωσης (fluctuation-dissipation theorem).

Η μέση τιμή σε μία περίοδο του ρυθμού παραγωγής έργου είναι

$$\overline{P} = -\omega A\overline{\cos\omega t\sin\omega t} + \omega B\overline{\cos^2\omega t} = \frac{1}{2}\omega B$$

δηλαδή το B προσδιορίζει το ρυθμό απορρόφησης της ενέργειας. Ο άλλος όρος εναλλάσσει ενέργεια μεταξύ του ταλαντωτή και της πηγής, και για αυτό ονομάζεται ελαστικός. Η μέση τιμή μεταφοράς ενέργειας από την πηγή έχει μέγιστο όταν έχουμε συντονισμό.

Θεωρήστε τώρα ότι δίνεται μία μοναδιαία ώθηση στον ταλαντωτή τη στιγμή $t = t_0$, τότε η δύναμη που ασκείται μπορεί να γραφεί $F(t) = \delta(t - t_0)$. Η εξαναγκασμένη τότε κίνηση του ταλαντωτή δίνεται για $t > t_0$

$$G(t - t_0) = e^{-\gamma(t-t_0)}\frac{\sin\omega(t - t_0)}{\omega},$$

όπου $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}$. Επειδή για κάθε συνάρτηση $F(t)$ ισχύει ότι $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t - s)F(s)ds$ θα έχουμε στην περίπτωση γενικής δύναμης $F(t)$ απόκριση του ταλαντωτή:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(t-t_0)}\frac{\sin\omega(t - t_0)}{\omega}\Theta(t - t_0)F(t_0)dt_0$$

όπου η συνάρτηση $\Theta(t)$ ορίζεται ως $\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$.

Η συνάρτηση $G(t - t_0)$ που προσδιορίζει το αποτέλεσμα στιγμιαίας ώθησης στον ταλαντωτή τη χρονική στιγμή t_0 λέγεται συνάρτηση Green, και ο προσδιορισμός της μας οδηγεί στον υπολογισμό της απόκρισης σε οποιαδήποτε εξωτερική διέγερση. Εδώ βρίσκεται και η ευρύτερη χρησιμότητα των συναρτήσεων Green στην επίλυση δύσκολων γραμμικών προβλημάτων (π.χ. στον ηλεκτρομαγνητισμό ή την κβαντομηχανική).