

Ενεργό δυναμικό

Στην περίπτωση οποιασδήποτε αλληλεπίδρασης δύο σωμάτων γνωρίζουμε ότι η κίνηση αυτών μπορεί να αναλυθεί σε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση του κέντρου μάζας των δύο σωμάτων και μια σχετική κίνηση ως προς το κέντρο μάζας. Έτσι αντί για 3+3 συντεταγμένες με αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις κίνησης, έχουμε να επιλύσουμε μονάχα 3, αυτές που αφορούν τις τρεις συντεταγμένες της σχετικής θέσης των σωμάτων στο σύστημα του κέντρου μάζας. Επιπλέον, αν η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι κεντρική, η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας διατηρείται και επομένως αφενός μεν τα σώματα κινούνται σε ένα σταθερό επίπεδο, αφετέρου έχουμε μια διατηρούμενη ποσότητα, τη στροφορμή $L = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{σταθ}$ (δείξτε ότι η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας παίρνει αυτή τη μορφή, όπου μ η ανηγμένη μάζα των σωμάτων, r η μεταξύ τους απόσταση και θ η γωνία στροφής του r στο σταθερό αυτό επίπεδο). Αν, τέλος, το πεδίο αλληλεπίδρασης είναι συντηρητικό, θα έχουμε

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \left[\frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \right].$$

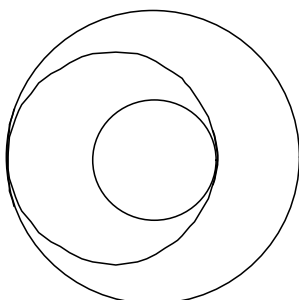
Η ποσότητα εντός της τετράγωνης αγκύλης μπορεί να θεωρηθεί ένα νέο είδος δυναμικού οπότε η ακτινική τουλάχιστον κίνηση μπορεί να καθορισθεί ωςάν να επρόκειτο για ένα μονοδιάστατο πρόβλημα κίνησης. Η δε περιστροφική κίνηση μπορεί να βρεθεί αυτόματα αν γνωρίζουμε το r ($\dot{\theta} = L / \mu r^2$). Το δυναμικό αυτό

$$V_{ev} = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

ονομάζεται *ενεργό δυναμικό* (effective potential) και είναι αυτό που καθορίζει το είδος της τροχιάς των δύο σωμάτων. Εάν το ενεργό δυναμικό έχει τη μορφή πηγαδιού δυναμικού και η ενέργεια είναι τέτοια ώστε το αντίστοιχο σωματίο να βρίσκεται εγκλωβισμένο εντός αυτού, τότε η ακτινική κίνηση είναι ταλαντωτική μεταξύ δύο ακτίνων, οπότε αν συμπεριλάβουμε και την περιστροφή, η κίνηση περιορίζεται σε ένα κυκλικό δακτύλιο. Αν η ακτινική κίνηση δεν είναι φραγμένη προς τα επάνω τότε τα δύο σώματα θα απομακρυνθούν σε άπειρη απόσταση το ένα από το άλλο κινούμενα σπειροειδώς. Αν το επίπεδο της ενέργειας βρίσκεται στο ελάχιστο του ενεργού δυναμικού, η κίνηση είναι κυκλική αφού η ακτίνα r παραμένει σταθερή.

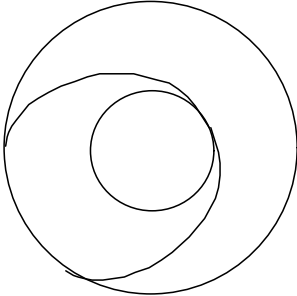
Το τμήμα του ενεργού δυναμικού $L^2 / 2\mu r^2$ ονομάζεται φυγοκεντρικό δυναμικό αφού οφείλεται στην περιστροφή του ζεύγους σωμάτων και απειρίζεται σε μικρή απόσταση. Έτσι, αν το $V(r)$ πηγαίνει πιο ομαλά από $1/r^2$ στο μηδέν, το φυγοκεντρικό δυναμικό δεν επιτρέπει με κανένα τρόπο στα δύο σωματίδια να πέσουν το ένα επάνω στο άλλο. Μόνο αν $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{k^2}{r^{2+\varepsilon}}$, με $\varepsilon > 0$ τα δύο σωματίδια θα πλησιάσουν σπειροειδώς το ένα το άλλο και θα συγκρουστούν.

Για δυναμικές ενέργειες της μορφής $V(r) = -\frac{k^2}{r^\lambda}$, (η αρνητικότητα εξασφαλίζει



την ύπαρξη ελαχίστου στο ενεργό δυναμικό), αν $\lambda > 2$ η κίνηση θα είναι σπειροειδής προσέγγιση, αν $\lambda = 1$, όπως έχουμε δει (παγκόσμια έλξη), η κίνηση θα είναι ελλειπτική. Αν $2 > \lambda > 1$ το πηγάδι δυναμικού θα είναι πιο «οξύ» από το αντίστοιχο της βαρύτητας, οπότε η ακτινική ταλάντωση θα είναι πιο γρήγορη από την αντίστοιχη για το βαρυτικό

πεδίο και η περιστροφή ακόμη πιο γρήγορη (αφού πάει σαν $1/r^2$) και η κίνηση θα είναι μια «έλλειψη» η οποία ολοκληρώνεται μετά από μια πλήρη περιστροφή (βλ. σχήμα). Οι διαδοχικές *αψίδες*, όπως ονομάζονται οι θέσεις που αντιστοιχούν στη μέγιστη και την ελάχιστη ακτίνα, βρίσκονται σε αυτή την περίπτωση, σε γωνία μεγαλύτερη από π . Κατ'αναλογία αν $\lambda > 1$, η ακτινική ταλάντωση είναι πιο αργή, το



ίδιο και η περιστροφή και η γωνία μεταξύ διαδοχικών αψίδων είναι μικρότερη από π (βλ. σχήμα). Μοναδική περίπτωση κλειστής τροχιάς εκτός του βαρυστικού τύπου δύναμης (για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες) είναι αυτή του δυναμικού αρμονικού ταλαντωτή ($V(r) = k^2 r^2$).

Τότε η γωνία μεταξύ των διαδοχικών αψίδων είναι $\pi/4$ και η τροχιά είναι έλλειψη με κέντρο πλέον και όχι εστία το κέντρο της δύναμης.

Μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε την ελλειπτικότητα της κίνησης σε αυτή την περίπτωση αναλύοντας την κίνηση σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Σκεφθείτε σε τι τροχιά θα οδηγούμαστε αν υπήρχε ένα σημείο ασταθούς ισορροπίας στο ενεργό δυναμικό και η ενέργεια ήταν τέτοια ώστε το σωματίδιο να πλησίαζε οσοδήποτε κοντά στο σημείο αυτό. Περίπτωση τέτοιου ενεργού δυναμικού έχουμε κοντά σε μια μαύρη τρύπα, και τέτοιου είδους τροχιές έχουν μελετηθεί τελευταία όσον αφορά τη ιδιαίτερη μορφή των βαρυτικών κυμάτων που είναι δυνατόν να εκπέμπουν τέτοια ζεύγη μαύρης τρύπας-αστέρα νετρονίων.