

Κρούσεις σε μία και περισσότερες διαστάσεις

Όταν τα υλικά σωματίδια και γενικότερα τα εκτεταμένα σώματα αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους δίχως να υπάρχουν άλλες εξωτερικές δυνάμεις διατηρείται όπως έχουμε μάθει η ολική ορμή του συστήματος. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις όπου οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης κάνουν ιδιαίτερα αισθητή την παρουσία τους για μικρά χρονικά διαστήματα σε σχέση τους χαρακτηριστικούς χρόνους της κίνησης των σωμάτων όταν αυτές οι δυνάμεις δεν εμφανίζονται. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές τιτλοφορούνται κρούσεις και περιλαμβάνουν περιπτώσεις που ούτε επαφή των σωμάτων συμβαίνει (εξάλλου ακόμη και όταν συγκρούονται δύο αυτοκίνητα δεν μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι τα μόρια των δύο αυτοκινήτων έρχονται σε επαφή), ούτε η κρούση διαρκεί κλάσματα του δευτερολέπτου, όπως για παράδειγμα ένα διαστημικό όχημα που υφίσταται εκτροπή από την τροχιά του όταν περάσει κοντά από ένα ουράνιο σώμα μεγάλης μάζας.

Ας ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με μια κρούση υλικών σημείων σε μονοδιάστατο κόσμο. Η διατήρηση της ορμής επιβάλλει

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u'_1 + m_2 u'_2 = P. \quad (1)$$

Δίχως καμμία άλλη γνώση του πώς γίνεται η αλληλεπίδραση των δύο σωματιδίων δεν είναι δυνατόν να προβλέψουμε πώς ακριβώς θα μοιραστούν οι ταχύτητες u'_1, u'_2 αμέσως μετά την κρούση. Ας υποθέσουμε ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κρούση των δύο σωματιδίων έχουν συνολικό έργο μηδέν, όπως για παράδειγμα συμβαίνει σε ένα ελατήριο όταν συμπιέζεται και στη συνέχεια αποσυμπιέζεται. Τότε η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για “ελαστικές” κρούσεις:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 u'^2_2 = E \quad (2)$$

Ενα πολύ καλό μηχανιστικό μοντέλο για τις ελαστικές κρούσεις μπορούμε να έχουμε αν θεωρήσουμε ότι το ένα από τα δύο συγκρούόμενα σωματίδια φέρει ένα αβαρές ελατήριο στην πλευρά με την οποία προσεγγίζει το έτερο σωματίδιο. Κατά τη σύγκρουση το ελατήριο συμπιέζεται, ενόσω τα δύο σωματίδια προσεγγίζουν το ένα το άλλο, η συμπίεση σταματά όταν οι ταχύτητές τους γίνονται ίσες και στη συνέχεια αποσυμπιέζεται μέχρι το αρχικό φυσικό του μήκος.

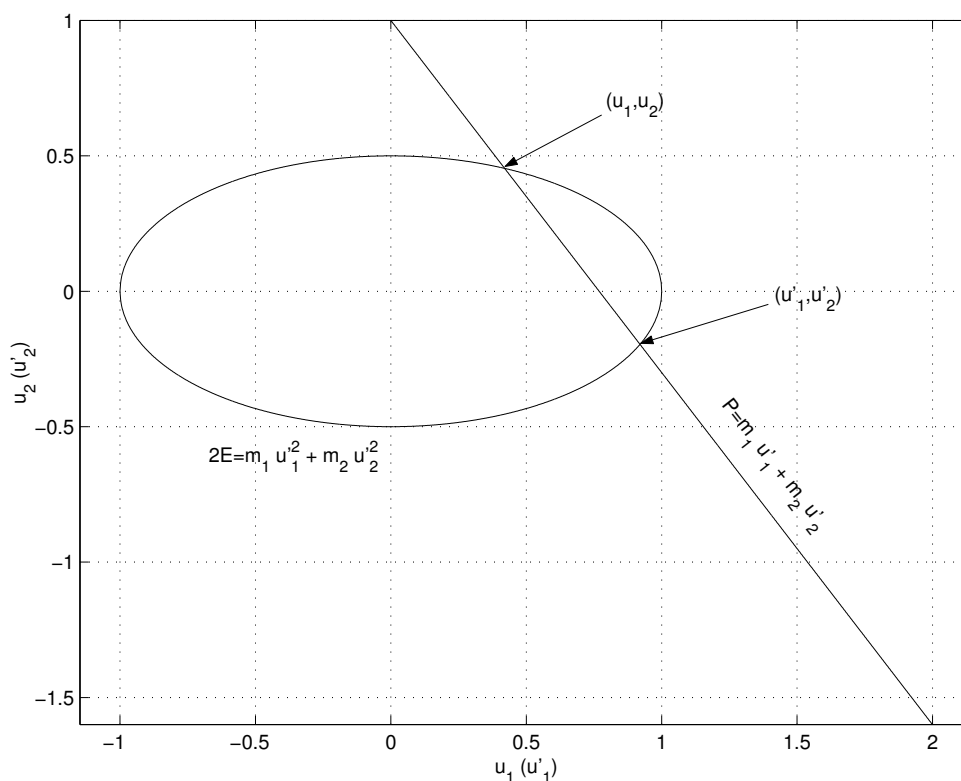
Επιλύοντας το σύστημα των (1,2) καταλήγουμε ότι

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\lambda+1} & \frac{2}{\lambda+1} \\ \frac{2\lambda}{\lambda+1} & \frac{1-\lambda}{\lambda+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

όπου $\lambda = m_1/m_2$. Απ' ότι βλέπουμε ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων είναι γραμμικός. Για την ακρίβεια υπάρχουν δύο ζεύγη ταχυτήτων που είναι συμβατές με τη διατήρηση της ορμής και της ενέργειας. Η μία είναι αυτή που αναφέρεται παραπάνω και η άλλη είναι οι ταχύτητες προ της κρούσης. Είναι εύκολο μάλιστα να διαπιστώσει κανείς ότι το τετράγωνο του πίνακα του μετασχηματισμού ισούται με το μοναδιαίο πίνακα. Αυτό είναι

αναμενόμενο αφού αν γυρίσουμε το χρόνο ανάποδα περιμένουμε να πάμε από τις τελικές στις αρχικές ταχύτητες. Ως αποτέλεσμα η ορίζουσα του πίνακα του μετασχηματισμού έχει τιμή -1 που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός διατηρεί τον όγκο στο χώρο των ταχυτήτων (αυτό είναι το φυσικό νόημα της ορίζουσας ενός μετασχηματισμού).

Ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτός με το ακόλουθο διάγραμμα.



Σχήμα 1: Τα ζεύγη (u_1', u_2') και (u_1, u_2) αποτελούν και τα δύο λύσεις των εξισώσεων και της ορμής και της ενέργειας. Η διπλή αυτή λύση είναι αναμενόμενη εξαιτίας της τετραγωνικής μορφής της έκφρασης για την ενέργεια. Η ευθεία που αντιπροσωπεύει όλα τα ζεύγη των ταχυτήτων οι οποίες οδηγούν σε διατήρηση της ορμής έχει κλίση $-m_1/m_2$. Οι ημιάξονες δε της έλλειψης έχουν λόγο $\sqrt{m_2/m_1}$.

Στην περίπτωση που η κρούση δεν είναι ελαστική και ένα μέρος της αρχικής ενέργειας χάνεται κατά την κρούση η έλλειψη στον χώρο των ταχυτήτων που αντιπροσωπεύει την τελική τιμή της ενέργειας είναι συρρικνωμένη σε σχέση με την αρχική. Παρόλα τούτα η τελική ενέργεια δεν μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρή αφού πρέπει να υπάρχει τομή της ευθείας των ορμών με την τελική έλλειψη. Η ελάχιστη τελική ενέργεια θα αντιπροσωπεύεται από την έλλειψη που εφάπτεται στην ευθεία των ορμών. Έτσι απαιτώντας η ευθεία

να είναι εφαιπτομένη στην έλλειψη καταλήγουμε ότι

$$\left. \frac{du'_2}{du'_1} \right|_{\text{ορμ}} = \left. \frac{du'_2}{du'_1} \right|_{\text{ενε}} \Rightarrow -\frac{m_1}{m_2} = -\frac{m_1 u'_1}{m_2 u'_2} \Rightarrow u'_1 = u'_2. \quad (4)$$

Αν οι ταχύτητες εξισωθούν μετά την κρούση τότε η κρούση ονομάζεται πλαστική και τα δύο σώματα κινούνται ως ένα συσσωμάτωμα. Η πλαστική κρούση αποτελεί την πλέον ανελαστική κρούση και το ποσοστό της ενέργειας που χάνεται κατά την κρούση είναι αν εκτελέσει κανείς τις πράξεις

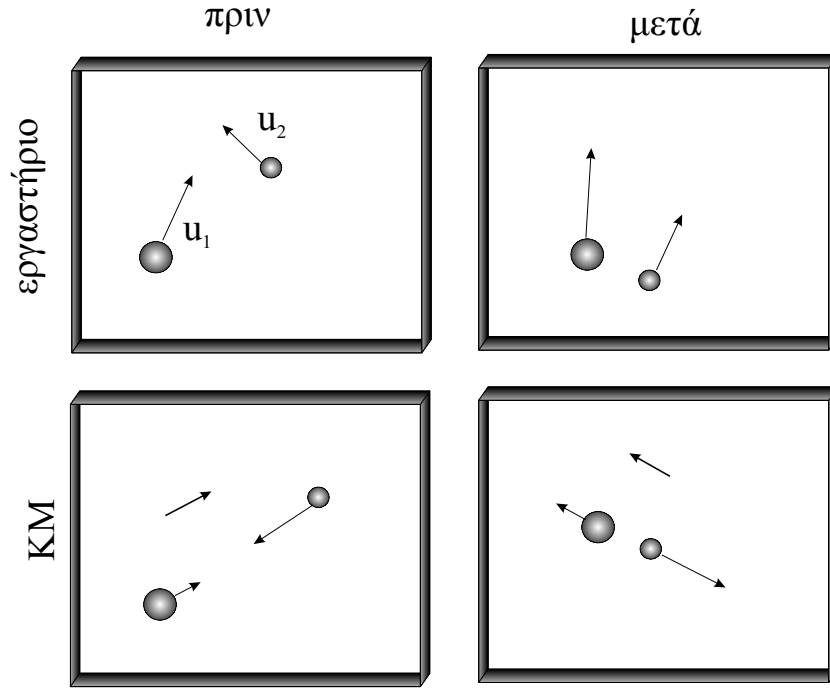
$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\mu(u_1 - u_2)^2}{m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2} \quad (5)$$

όπου μ η ανηγμένη μάζα των δύο σωματιδίων. Η μεταβολή της ενέργειας ΔE που συμβαίνει κατά την πλαστική κρούση είναι και η μέγιστη μεταβολή της κινητικής ενέργειας που συμβαίνει έστω και παροδικά κατά την ελαστική κρούση δύο σωματιδίων (θυμηθείται το μηχανικό ανάλογο της ελαστικής κρούσης με το ελατήριο). Αν, όπως συμβαίνει με τις συγκρούσεις των στοιχειωδών σωματιδίων, θέλουμε να εκμεταλλευτούμε αυτή τη μεταβολή της ενέργειας προκειμένου να φτιάξουμε για παράδειγμα νέα σωματίδια θα πρέπει να φροντίσουμε ώστε ο παραπάνω λόγος να είναι μονάδα (αν θέλουμε τα λεφτά μας να πιάσουν τόπο). Όπως θα δούμε στο σύστημα κέντρου μάζας αυτό συμβαίνει αυτόματα.

Αν εξετάζαμε την κρούση σε ένα άλλο σύστημα που κινείται σε σχέση με το αρχικό σύστημα με ταχύτητα V το αρχικό σημείο στο χώρο των ταχυτήτων θα άρχιζε κινείται σε μια ευθεία με κλίση 1 αφού η ταχύτητα V θα αφαιρούνταν από κοινού και από την u_1 και από την u_2 . Η συνολική ορμή του συστήματος θα άλλαζε κατά $-(m_1 + m_2)V$. Όταν η ταχύτητα αυτή πάρει την κατάλληλη τιμή $V_{\text{ΚΜ}} = P/(m_1 + m_2)$ η ορμή του συστήματος μηδενίζεται. Πρόκειται για την ταχύτητα του κέντρου μάζας και το αντίστοιχο σύστημα αναφοράς. Αφού σε αυτό το σύστημα η ολική ορμή είναι μηδέν, η ευθεία των ορμών περνά από την αρχή των αξόνων και εξαιτίας της συμμετρικότητας της έλλειψης οι ταχύτητες αντιστρέφονται μετά από μια ελαστική κρούση στο σύστημα κέντρου μάζας: $u'_2 = -u_2, u'_1 = -u_1$. Ο λόγος δε $\Delta E/E$ στην περίπτωση της πλαστικής κρούσης στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι ίσος με τη μονάδα.

Άσκηση: Χρησιμοποιήστε ως μηχανιστικό μοντέλο μιας ανελαστικής κρούσης το μοντέλο της ελαστικής κρούσης με το ελατήριο με τη διαφορά ότι (α) το ελατήριο όταν φτάνει στη μέγιστη συσπίρωση παγώνει και δεν αποσυσπείρывается στη συνέχεια και (β) το ελατήριο επανέρχεται σε μηδενική συσπίρωση αλλά η κίνησή του παρουσιάζει και τριβές με αποσβετικό παράγοντα $\gamma < \omega_0$. Να υπολογιστεί το ποσοστό ενέργειας που χάνεται κατά την κρούση στην κάθε περίπτωση.

Γνωρίζοντας τις ιδιαιτερότητες του συστήματος κέντρου μάζας ας μελετήσουμε την κρούση δύο σωματιδίων στις 3 διαστάσεις, παράλληλα και στο εργαστήριο και στο σύστημα κέντρου μάζας (βλ. σχήμα). Η διατήρηση της ορμής παίρνει τη μορφή



Σχήμα 2: Στιγμιότυπα δύο σωματιδίων πριν και μετά την κρούση στο σύστημα του εργαστηρίου και στο σύστημα του κέντρου μάζας.

$$\vec{P} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{u}'_1 + m_2 \vec{u}'_2, \quad (6)$$

ενώ στο σύστημα του κέντρου ορμής θα είναι

$$m_1 \vec{u}_1^{(KM)} + m_2 \vec{u}_2^{(KM)} = m_1 \vec{u}'_1^{(KM)} + m_2 \vec{u}'_2^{(KM)} = \vec{0} \quad (7)$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, στο σύστημα του κέντρου μάζας οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων είναι συγγραμικές και αντίρροπες, είτε πριν είτε μετά την κρούση. Οι δε ορμές είναι απλώς ίσες και αντίθετες $\vec{p}_1^{(KM)} = -\vec{p}_2^{(KM)} = \vec{p}$ και $\vec{p}'_1^{(KM)} = -\vec{p}'_2^{(KM)} = \vec{p}'$. Αν η κρούση είναι επιπλέον και ελαστική θα έχουμε

$$|\vec{p}|^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) = |\vec{p}'|^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \quad (8)$$

δηλαδή $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$. Στο σύστημα κέντρου μάζας, λοιπόν, οι ορμές των δύο σωματιδίων θα είναι κατά μέτρο ίσες μεταξύ τους και ίσες πριν και μετά την κρούση. Αυτή η ξεχωριστή ιδιότητα του συστήματος του κέντρου μάζας μας επιτρέπει να γράψουμε τον γενικό μετασχηματισμό των ταχυτήτων στις 3 διαστάσεις. Η παραπάνω ανάλυση μας δείχνει πως τα μέτρα των δύο ορμών (πριν και μετά) παραμένουν ίδια αλλά δεν μπορεί να μας παράσχει καμία πληροφορία για την αλλαγή κατεύθυνσης του άξονα των ορμών. Η στροφή του άξονα αυτού σχετίζεται με τις λεπτομέρειες της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο σωματιδίων κατά τη διάρκεια της κρούσης. Αυτή την έλλειψη πληροφορίας απλώς θα την “στριμώξουμε” μέσα στο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ που δείχνει προς την κατεύθυνση προς

την οποία θα στραφεί η $\vec{p}'$ σε σχέση με την αρχική κατεύθυνση του $\vec{p}$. Έτσι λοιπόν θα είναι

$$\begin{aligned}\vec{p}_1'^{(KM)} = -\vec{p}_2'^{(KM)} = \vec{p}' = \hat{n}|\vec{p}'| = \hat{n}|\vec{p}| = \hat{n}|\vec{p}_1^{(KM)}| = \hat{n}m_1|\vec{u}_1 - \vec{V}_{(KM)}| = \\ \hat{n}m_1\left|\vec{u}_1 - \frac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}{m_1 + m_2}\right| = \hat{n}\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|. \quad (9)\end{aligned}$$

Γνωρίζοντας την ορμή στο σύστημα κέντρου μάζας μπορούμε να γράψουμε και την ορμή κάθε σωματιδίου στο σύστημα του εργαστηρίου.

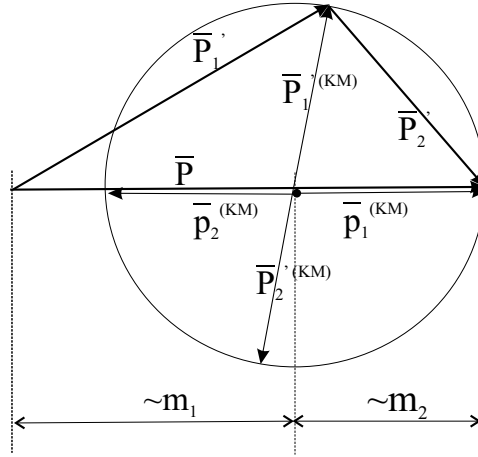
$$\begin{aligned}\vec{p}_1' = \vec{p}_1'^{(KM)} + m_1\vec{V}_{(KM)} = m_1\frac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}{m_1 + m_2} + \hat{n}\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)|\vec{u}_1 - \vec{u}_2| \\ \vec{p}_2' = \vec{p}_2'^{(KM)} + m_2\vec{V}_{(KM)} = m_2\frac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}{m_1 + m_2} - \hat{n}\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|. \quad (10)\end{aligned}$$

Όπως είπαμε και παραπάνω, αν και φαινομενικά έχουμε πλήρεις εκφράσεις για τις ορμές των σωματιδίων μετά την κρούση, το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ κρύβει όλες τις λεπτομέρειες της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων. Ο πλήρης καθορισμός του $\hat{n}$ απαιτεί δύο γωνίες (π.χ. τις δύο σφαιρικές γωνίες θ, ϕ). Αν επιπλέον η αλληλεπίδραση υπακούει στον 3ο νόμο του Νεύτωνα η συνολική ροπή των δυνάμεων αλληλεπίδρασης είναι μηδενική με αποτέλεσμα η στροφορμή του συστήματος να διατηρείται και επομένως το επίπεδο της κίνησης να είναι πλήρως καθορισμένο και ανεξάρτητο των λεπτομερειών της αλληλεπίδρασης. Συνεπώς απομένει μόνο μία γωνία για τον πλήρη καθορισμό της κρούσης.

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε ένα διαγραμματικό εργαλείο για να απεικονίσουμε την σκέδαση ενός σωματιδίου-βλήματος μάζας m_1 που προσπίπτει σε ακίνητο σωματίδιο-στόχο μάζας m_2 . Έστω $\vec{P}$ η συνολική ορμή του συστήματος. Θα είναι

$$\vec{P} = \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (11)$$

Στο σύστημα κέντρου μάζας η ορμή $\vec{p}_1^{(KM)}$ θα είναι $m_2\vec{P}/M$, δηλαδή θα είναι το m_2/M κλάσμα του $\vec{P}$ (δείξτε το). Αντίστοιχα η $\vec{p}_2^{(KM)}$ θα είναι $-\vec{p}_1^{(KM)}$. Μετά την κρούση οι δύο αυτές ορμές θα στραφούν σε σχέση με την αρχική τους κατεύθυνση δίχως να αλλάξουν μέτρο και παραμένοντας πάντα αντίθετες η μία στην άλλη (βλ. σχήμα 3). Έτσι οι νέες ορμές μετά την κρούση στο σύστημα του εργαστηρίου θα είναι οι δύο πλευρές ενός τριγώνου με βάση την $\vec{P}$ και τρίτη κορυφή επί του κύκλου που έχει ως κέντρο το σημείο $\vec{P} - \vec{p}_1^{(KM)}$ και περνά από την αιχμή του βέλους του $\vec{P}$. Ο κύκλος υποδηλώνει όλες τις δυνατές διευθύνσεις που μπορεί να έχουν οι ορμές των δύο σωματιδίων στο σύστημα του κέντρου μάζας. Επιπλέον διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις (α) αν $m_1 = m_2$ ο κύκλος περνά και από τα δύο άκρα του $\vec{P}$, οπότε οι ορμές των δύο σωματιδίων μετά την κρούση είναι πάντα κάθετες η μία στην άλλη (το εγγεγραμμένο σε κύκλο τρίγωνο με μια εκ των πλευρών διάμετρο του κύκλου είναι ορθογώνιο), (β) αν $m_1 > m_2$ η αρχή του $\vec{P}$ θα βρίσκεται εκτός του κύκλου. Στην περίπτωση αυτή και τα δύο σωματίδια θα έχουν φορά κίνησης πάντα προς τα “εμπρός” (προς την ίδια πλευρά που κινούταν αρχικά το βλήμα). Επίσης η μεγαλύτερη



Σχήμα 3:

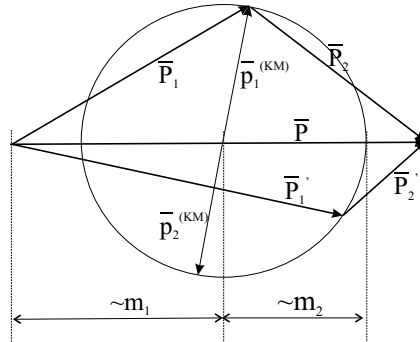
γωνία σκέδασης που θα μπορούσε να παρουσιάζει το 1 σωματίδιο θα υφίσταται όταν η $\vec{p}_1$ είναι εφαπτόμενη του κύκλου δηλαδή θα είναι

$$\sin \theta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1} \quad (12)$$

(γ) αν $m_1 < m_2$ η αρχή του $\vec{P}$ θα βρίσκεται εντός του κύκλου. Στην περίπτωση αυτή το σωματίδιο 1 μπορεί να σκεδαστεί είτε προς τα εμπρός είτε προς τα πίσω. Αν όλες οι διευθύνσεις εκτροπής της ορμής στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι ισοπίθανες η πιθανότητα οπισθοσκέδασης του σωματιδίου 1 είναι

$$\mathcal{P}_{1\leftarrow} = \frac{\pi - \cos^{-1}(m_1/m_2)}{\pi}. \quad (13)$$

Με παρόμοια γεωμετρική κατασκευή μπορούμε να μελετήσουμε τη σκέδαση δύο σωματιδίων που αρχικά κινούνται και τα δύο. Τώρα ο κύκλος των δυνατών τελικών ορμών δεν θα περνά κατ' ανάγκη από κανένα άκρο του $\vec{P}$ (βλ. σχήμα 4).



Σχήμα 4:

Άσκηση: Ο κύκλος των δυνατών ορμών έχει ακτίνα ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της διαθέσιμης ενέργειας κρούσης (βλ. σχέση (8)). Στην περίπτωση ακίνητου στόχου (α) δείξτε ότι όταν απορροφάται κατά την κρούση όλη η διαθέσιμη ενέργεια τα σωματίδια κινούνται με τέτοιες ορμές που αντιστοιχούν σε ίσες ταχύτητες (πλαστική κρούση), (β) αν $m_1 > m_2$ πόσο μικραίνει η γωνία μέγιστης σκέδασης του 1 αν η διαθέσιμη ενέργεια μειωθεί κατά b ; (γ) αν $m_1 < m_2$ πόσο μπορεί να μειωθεί η διαθέσιμη ενέργεια για να είναι δυνατό τα δύο σωματίδια να κινούνται μετά την κρούση υπό γωνία 90° ;

Συμβολισμοί

- $\vec{p}_i$ = ορμή i-στού σωματιδίου στο σύστημα του εργαστηρίου πριν την κρούση
- $\vec{p}_i'$ = ορμή i-στού σωματιδίου στο σύστημα του εργαστηρίου μετά την κρούση
- $\vec{p}_i^{(KM)}$ = ορμή i-στού σωματιδίου στο σύστημα κέντρου μάζας πριν την κρούση
- $\vec{p}_i'^{(KM)}$ = ορμή i-στού σωματιδίου στο σύστημα κέντρου μάζας μετά την κρούση
- $\vec{p}$ = ορμή 1ου σωματιδίου στο σύστημα κέντρου μάζας πριν την κρούση
- $\vec{p}'$ = ορμή 1ου σωματιδίου στο σύστημα κέντρου μάζας μετά την κρούση
- $\vec{P}$ = συνολική ορμή στο σύστημα του εργαστηρίου πριν και μετά την κρούση