1.1 Η έννοια της διαφορικής διατομής σκέδασης

Έστω ότι μία παράλληλη δέσμη σωματιδίων βομβαρδίζει κάποιο στόχο. Τα σωματίδια αυτά στο πείραμα του Rutherford είναι σωματίδια α (πυρήνες Ηλίου με φορτίο +2e) και ο στόχος πυρήνες χρυσού (φορτίου +Ze, Z=79 ο αριθμός των πρωτονίων στον πυρήνα του χρυσού). Η παράλληλη δέσμη χαρακτηρίζεται από τη ροή I_0 που είναι ο αριθμός σωματιδίων που προσπίπτει ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφανείας κάθετα στο στόχο (μονάδες $[T^{-1}][L^{-2}]$). Τα σωματίδια αυτά θα σκεδασθούν (θα αλλάξουν πορεία) αφού αλληλεπιδράσουν με το στόχο. Αν τοποθετήσουμε μακρυά από το στόχο κάποιον ανιχνευτή επιφάνειας, dA, στην πολική γωνία Θ και στην αζιμουθιακή γωνία ϕ, τότε μπορούμε να μετρήσουμε τον αριθμό των σκεδασμένων σωματιδίων, dN, που προσπίπτει σε αυτόν τον ανιχνευτή ανά μονάδα χρόνου (μονάδες $[T^{-1}]$). Ο αριθμός $dN(\Theta,\phi)$ που γενικά εξαρτάται από τη θέση του ανιχνευτή θα είναι ανάλογος της ροής I_0 και μπορεί να γραφεί ως:

$$dN(\Theta,\phi) = d\sigma(\Theta,\phi) I_0 \ .$$

Η $d\sigma$ που πολλαπλασιάζει την προσπίπτουσα ένταση ροής, I_0, και έχει μονάδες επιφανείας (όπως προκύπτει από διαστατική ανάλυση της παραπάνω εξίσωσης), λέγεται διαφορική ενεργός διατομή του στόχου που οδηγεί σε σκέδαση στη επιφάνεια dA στη θέση που βρίσκεται ο ανιχνευτής. Η ενεργός διατομή $d\sigma(\Theta,\phi)$ είναι η επιφάνεια της παράλληλης δέσμης (ή το τμήμα της επιφάνειας του στόχου) που καταλήγει, αφού αλληλεπιδράσει με το στόχο, στην επιφάνεια του ανιχνευτή που βρίσκεται στη θέση (Θ,ϕ). Ο συνολικός αριθμός σωματιδίων ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας που προσπίπτει στον ανιχνευτή και που μπορεί πειραματικά να μετρηθεί είναι

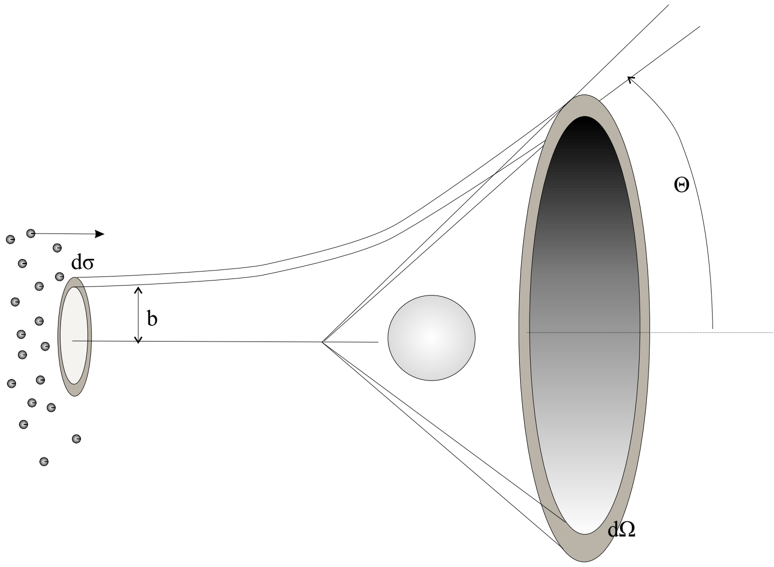
$$\frac{dN}{dA} = \frac{I_0}{r^2}\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

όπου η διαφορική επιφάνεια του ανιχνευτή που βρίσκεται σε απόσταση r από τον στόχο εκφράζεται μέσω της στερεάς γωνίας, $d\Omega$, ως $dA = r^2 d\Omega = r^2 \sin\Theta d\Theta d\phi$. Ο λόγος dN/dA μπορεί να μετρηθεί σε πειράματα και επειδή και η ένταση I_0 και η απόσταση του ανιχνευτή από το στόχο r είναι γνωστή μπορεί να προκύψει πειραματικά και η εξάρτηση της διαφορικής διατομής $d\sigma(\Theta,\phi)/d\Omega$ από τις γωνίες Θ και ϕ.

Η συνολική ενεργός διατομή

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

προκύπτει από την ολοκλήρωση της διαφορικής διατομής ως προς όλες τις στερεές γωνίες $d\Omega = \sin\Theta d\Theta d\phi$ και έτσι υπολογίζεται η ενεργός επιφάνεια (διατομή) του στόχου (κάθετα στην κατεύθυνση της ροής των σωματιδίων) που σκεδάζει τα σωματίδια σε οποιαδήποτε κατεύθυνση. Αν



Σχήμα 1.1: Στο σχήμα τα σωματίδια που βρίσκονται στον σκιαγραφημένο δακτύλιο επιφανείας $d\sigma$ σκεδάζονται από τον σφαιρικά συμμετρικό στόχο στη σφαιρική ζώνη πολικής γωνίας $[\Theta,\ \Theta + d\Theta]$. Ο αριθμός των σωματιδίων ανά μονάδα χρόνου που προσπίπτει σε αυτή τη ζώνη είναι $dN = d\sigma I_0$, όπου I_0 ο αριθμός των σωματιδίων ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας που προσπίπτει στο στόχο. Η σφαιρική ζώνη αυτή αντιστοιχεί σε στερεά γωνία $d\Omega = 2\pi \sin\Theta d\Theta$. Επειδή τα σωματίδια που έχουν παράμετρο κρούσης b σκεδάζονται στη γωνία Θ η ενεργός διατομή, που είναι η επιφάνεια του δακτυλίου του σχήματος, είναι $d\sigma = 2\pi\ b\ db$ και συνεπώς η διαφορική διατομή δίνεται από τον τύπο $d\sigma/d\Omega = b|db/d\Theta|/\sin\Theta$. Η απόλυτος τιμή έχει τοποθετηθεί διότι η διατομή έχει πάντοτε θετικό πρόσημο, ενώ η παράγωγος $db/d\Theta$ μπορεί να έχει αρνητικό πρόσημο, όπως π.χ. συμβαίνει σε σκέδαση όπου η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι απωστική και ισχυρότερη όσο πιό κοντά διέρχονται τα σωματίδια από το στόχο οπότε μικρότερα b οδηγούν σε μεγαλύτερη γωνία σκέδασης Θ.

π.χ. ο στόχος είναι μία σκληρή σφαίρα ακτίνας a που βομβαρδίζεται με σωματίδια με ρυθμό, I_0, τα οποία προσκρούουν ελαστικά σε αυτήν, τότε ο συνολικός αριθμός των σκεδασμένων σωματιδίων N ανά μονάδα χρόνου που θα σκεδάζονται σε οποιαδήποτε κατεύθυνση θα είναι προφανώς

$$N = \pi a^2 I_0,$$

οπότε η συνολική διατομή της σκληρής σφαίρας είναι $\sigma = \pi a^2$, η τιμή που αναμένεται διαισθητικά (αν δεν σας είναι αυτό προφανές θα το αποδείξουμε στη συνέχεια).

Η ανάλυση που κάναμε αφορούσε σκέδαση από ένα στόχο. Αν έχουμε n όμοιους στόχους τότε η ενεργός διατομή και διαφορική διατομή πρέπει να πολλαπλασιασθεί με το n.

Στις περισσότερες περιπτώσεις η δύναμη αλληλεπίδρασης έχει σφαιρική συμμετρία. Στην περίπτωση αυτή ίδιος αριθμός σωματιδίων καταφθάνει σε κάθε αζιμουθιακή γωνία ϕ και η γωνία σκέδασης Θ για δυναμικό αλληλεπίδρασης είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης b, που ονομάζεται παράμετρος κρούσης (impact parameter) των προσπιπτόντων σωματιδίων στο στόχο (βλ. Σχ. 1.1) και της ενέργειάς των, E, (δεν εξαρτάται δηλαδή και από τη αζιμουθιακή γωνία πρόσπτωσης στο στόχο). Ας υποθέσουμε αρχικά ότι υπάρχει μονοσήματη σχέση μεταξύ b και Θ δηλαδή σε κάθε γωνία σκέδασης Θ αντιστοιχεί μία μόνο b. Αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση $b(\Theta)$, τότε μπορούμε να εκφράσουμε τη διαφορική διατομή συναρτήσει αυτής της συνάρτησης και η ενεργός διατομή, $d\sigma(\Theta)$, είναι συνάρτηση μόνο της γωνίας σκέδασης Θ. Η ενεργός διατομή είναι όμως εξ ορισμού η διαφορική επιφάνεια της προσπίπτουσας δέσμης που σκεδάζει τα σωματίδια στην περιοχή της σφαίρας με πολικό πλάτος $[\Theta, \Theta + d\Theta]$ και αζιμουθιακό πλάτος $d\phi$ (το ακριβές πλάτος $d\phi$ δεν μας ενδιαφέρει διότι υποθέσαμε σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό αλληλεπίδρασης και επομένως σε κάθε $d\phi$ θα σκεδασθεί ίσος αριθμός σωματιδίων). Επειδή όμως μόνο τα σωματίδια με παράμετρο κρούσης $b(\Theta)$ σκεδάζονται κατά γωνία Θ, όλα τα σωματίδια που διέρχονται από το τμήμα του κυκλικού δακτυλίου με παράμετρο κρούσης στο διάστημα $[b, b + db]$ και αζιμουθιακό πλάτος $d\phi$ θα σκεδασθούν στην περιοχή της σφαίρας με πολικό πλάτος $[\Theta, \Theta + d\Theta]$ και αζιμουθιακό πλάτος $d\phi$. Συνεπώς επειδή η επιφάνεια αυτού του τμήματος του κυκλικού δακτυλίου είναι $bdbd\phi$ η ενεργός διατομή θα είναι

$$d\sigma = bdbd\phi \, .$$

Επειδή $d\Omega = \sin\Theta d\Theta d\phi$ θα έχουμε

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\Theta |d\Theta/db|} \equiv \frac{b|db/d\Theta|}{\sin\Theta}.$$

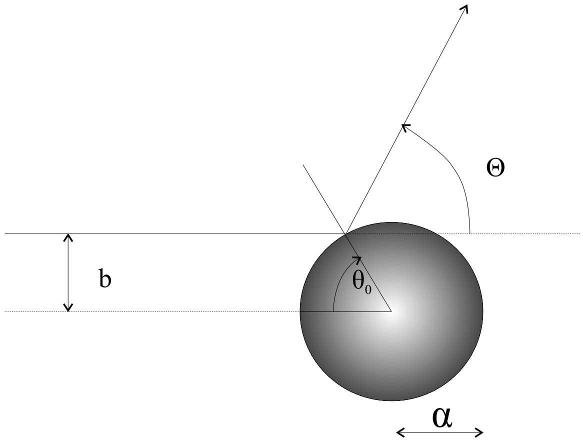
Η απόλυτη τιμή έχει σημειωθεί στην παραπάνω έκφραση διότι η διατομή έχει πάντοτε θετικό πρόσημο, ενώ η παράγωγος $db/d\Theta$ μπορεί να έχει αρνητικό πρόσημο, όπως π.χ. συμβαίνει σε σκέδαση όπου η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι ισχυρότερη όσο πιο κοντά διέρχονται τα σωματίδια στο στόχο, οπότε μικρότερα b οδηγούν σε μεγαλύτερη γωνία σκέδασης Θ.

Με τον τύπο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορική διατομή για κάθε αλληλεπίδραση με δυναμικό $V(r)$. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε δύο χρήσιμα παραδείγματα: την περίπτωση της σκληρής σφαίρας και της σκέδασης Rutherford.

1.1.1 Σκέδαση σε σκληρή σφαίρα

Θεωρήστε μία σκληρή σφαίρα ακτίνας a. Τα σωματίδια κινούνται ελεύθερα στο χώρο $r > a$, δεν μπορούν να εισχωρήσουν εντός της σφαίρας και όταν προσπίπτουν στη σφαίρα ανακλώνται. Η αλληλεπίδραση με τη σκληρή σφαίρα περιγράφεται από το κεντρικό δυναμικό:

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < a\,; \\ 0, & r > a. \end{cases}$$



Σχήμα 1.2: Σωματίδια σκεδάζονται ελαστικά από μία ακληρή σφαίρα. Λόγω της διατήρησης ενέργειας και στροφορμής η γωνία πρόσκρουσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης.

Επειδή σε ένα τέτοιο δυναμικό διατηρείται η στροφορμή, η κίνηση των σωματιδίων είναι επίπεδη. Μπορείτε να δείτε μία επίπεδη διαδρομή ενός σωματιδίου που σκεδάζεται από τη σφαίρα στο Σχ. 1.2. Η διατήρηση της ενέργειας συνεπάγεται ότι αν αρχικά το προσπίπτον σωματίδιο έχει μέτρο ταχύτητας v και μετά την ανάκλαση θα έχει ταχύτητα v. Επιπλέον η στροφορμή του προσπίπτοντος σωματιδίου με παράμετρο κρούσης b είναι $L = mbv$. Συνεπώς επειδή η στροφορμή διατηρείται και μετά την κρούση η στροφορμή θα είναι $L = mbv$, και το σωματίδιο μετά τη σκέδαση θα κινείται επί της ευθείας που σχηματίζει γωνία ανάκλασης ίση με τη γωνία πρόσπτωσης, όπως αναμένεται να συμβεί σε μία ελαστική κρούση με μία σκληρή επιφάνεια. Για γωνία σκέδασης Θ η γωνία θ_0 που σχηματίζει η δέσμη των σωματιδίων που σκεδάζονται σε αυτή τη γωνία με την κάθετο στην επιφάνεια της σφαίρας στο σημείο πρόσκρουσης θα ικανοποιεί τη σχέση $\Theta = \pi - 2\theta_0$. Επειδή δε η παράμετρος κρούσης που οδηγεί σε σκέδαση σε γωνία Θ είναι

$$b = a \sin\theta_0 = a \sin\left(\frac{\pi - \Theta}{2}\right) = a\cos(\Theta/2)$$

η διαφορική διατομή σκέδασης στη περίπτωση της σκληρής σφαίρας θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Theta) &= \frac{b|db/d\Theta|}{\sin\Theta} \\ &= \frac{a^2\cos(\Theta/2)\sin(\Theta/2)}{2\sin\Theta} \\ &= \frac{a^2}{4}\,. \end{aligned}$$

Προκύπτει δηλαδή το καταπληκτικό αποτέλεσμα ότι η διαφορική διατομή έχει την ίδια τιμή για όλες τις γωνίες σκέδασης και συνεπώς οπουδήποτε και αν τοποθετηθεί ένας ανιχνευτής θα δεχθεί τον ίδιο αριθμό σκεδαζομένων σωματιδίων. Αποδείξαμε δηλαδή ότι η σκέδαση σκληρής σφαίρας είναι ισοτροπική. Τονίζουμε ότι το συμπέρασμα αυτό είναι καταπληκτικό και κάθε άλλο από προφανές.

Μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε τη συνολική διατομή για σκέδαση σε σκληρή σφαίρα:

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 4\pi \frac{a^2}{4}$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται ως προς όλες τις στερεές γωνίες. Συνεπώς η συνολική διατομή σκέδασης σκληρής σφαίρας είναι:

$$\sigma = \pi a^2 \ ,$$

που είναι το αναμενόμενο αποτέλεσμα.

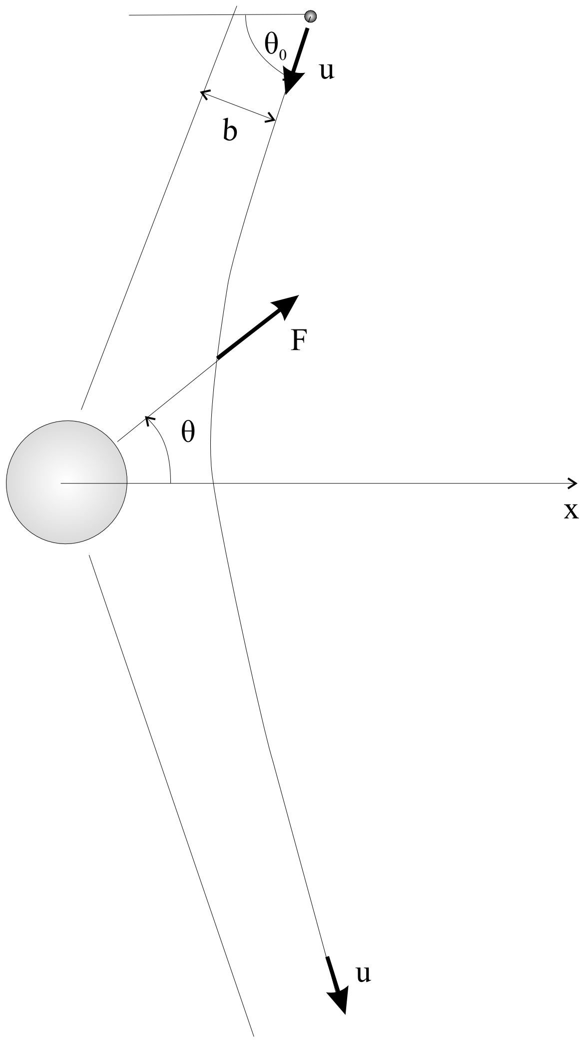
1.1.2 Σκέδαση Rutherford

Σωματίδια α προσπίπτουν σε φύλλο χρυσού. Ας εξετάσουμε τη σκέδαση σωματιδίου α με παράμετρο κρούσης b ως προς τον πυρήνα ενός ατόμου χρυσού. Επειδή το φορτίο του πυρήνα είναι $+Ze$, ενώ το φορτίο του σωματιδίου α είναι $+2e$, η απωστική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι:

$$F = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}.$$

Θα θεωρήσουμε τη συνιστώσα της ορμής του σωματιδίου α κατά τον άξονα συμμετρίας x της υπερβολικής τροχιάς του σωματιδίου, η οποία μεταβαίνει από τη τιμή $-mv\cos\theta_0$ όταν το σωματίδιο βρίσκεται μακρυά από τον στόχο πριν από τη κρούση στη τιμή $+mv\cos\theta_0$ μετά τη σκέδαση και πάλι μακρυά από το στόχο (βλ. σχήμα 1.1). Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα η ολική ώθηση από τη συνιστώσα της απωστικής δύναμης στη θετική κατεύθυνση του άξονα x πρέπει να ισούται με τη μεταβολή της ορμής σε αυτή τη διεύθυνση. Συνεπώς επειδή η γωνία σκέδασης είναι $\Theta = \pi - 2\theta_0$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
2mv\sin(\Theta/2) &= \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\theta}{r^2}dt \\
&= \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{\cos\theta}{r^2(d\theta/dt)}d\theta \\
&= \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{\cos\theta}{L/m}d\theta \\
&= \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 bv}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\cos\theta d\theta \\
&= \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 bv}2\sin\theta_0 \\
&= \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 bv}2\cos(\Theta/2) \ .
\end{aligned}$$



Σχήμα 1.3: Η ώθηση της δύναμης αλλάζει τελικά την x συνιστώσα της ορμής του βλήματος.

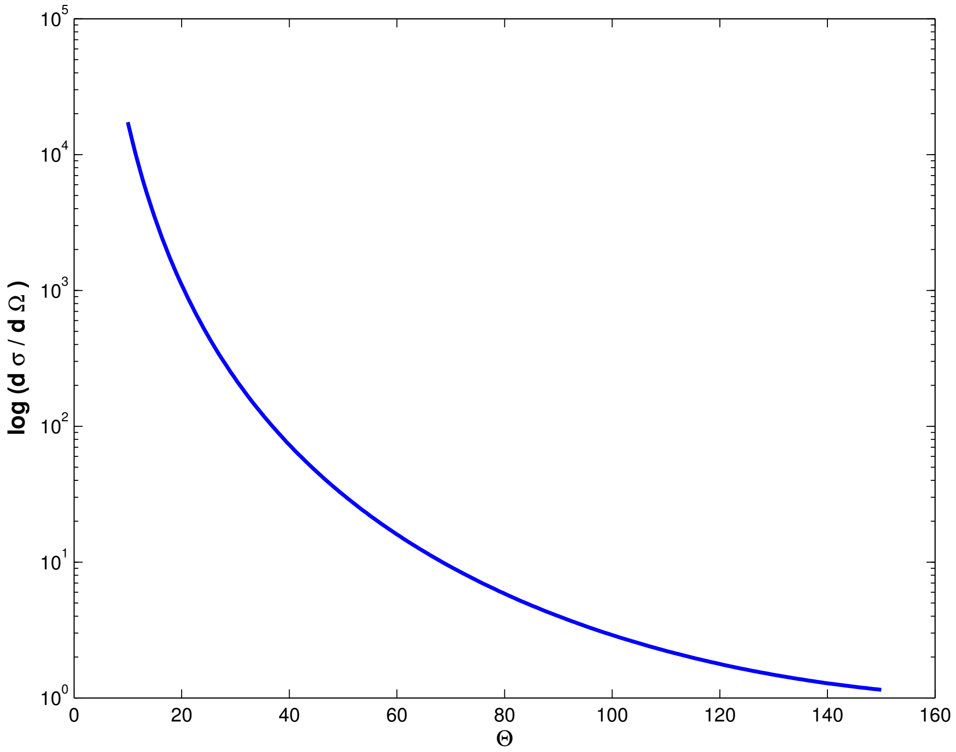
Η παραπάνω ολοκλήρωση κατέστη δυνατή επειδή η στροφορμή $L = mr^2 d\theta/dt$ του σωμτιδίου α είναι σταθερή και ίση με $L = mbv$, όπου b η παράμετρος κρούσης. Από την παραπάνω σχέση συνάγεται ότι η παράμετρος κρούσης σχετίζεται με τη γωνία σκέδασης μέσω του τύπου:

$$b = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E}\cot(\Theta/2)\ ,$$

όπου $E = mv^2/2$ η ενέργεια των σωματδίων α. Συνεπώς η διαφορική ενεργός διατομή της σκέδασης Rutherford θα είναι:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Theta) &= \frac{b|db/d\Theta|}{\sin\Theta}\\ &= \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E}\right)^2 \frac{1}{4\sin^4(\Theta/2)}.\end{aligned}$$

Η διατομή αυτή έχει δραματική εξάρτηση από τη γωνία σκέδασης. Η εξάρτηση έχει σχεδιασθεί στο Σχ. 1.4



Σχήμα 1.4: Γραφική παράσταση του $\log(d\sigma/d\Omega)$ συναρτήσει της γωνίας σκέδασης Θ σε μοίρες στην περίπτωση της σκέδασης Rutherford. Η μεταβολή του αριθμού των σωματιδίων που καταφθάνουν στον ανιχνευτή ανά μονάδα χρόνου για διαφορετικές γωνίες σκέδασης είναι δραματική. Π.χ. ο λόγος του αριθμού των σωματιδίων που σκεδάζονται κατά γωνία 15° ως πρός τον αριθμό των σωματιδίων που σκεδάζονται κατά 150° είναι περίπου 3000.

Προσέξτε ότι στην ανάλυση για τον υπολογισμό της διατομής δεν λάβαμε υπόψη την επιρροή του ηλεκτρονικού νέφους του ατόμου του χρυσού διότι τα σωματίδια α είναι πολύ βαρύτερα από τα ηλεκτρόνια. Επίσης σημειώνουμε ότι θα μπορούσε να αντιτείνει κανείς ότι ο κλασσικός υπολογισμός που κάναμε πρέπει να έχει περιορισμένη ισχύ διότι η αλλεπίδραση με τον πυρήνα πρέπει να υπολογισθεί κβαντομηχανικά. Είναι καταπληκτική σύμπτωση ότι ο κβαντομηχανικός υπολογισμός, που θα κάνετε στα επόμενα χρόνια, δίνει την κλασσική έκφραση για τη διαφορική διατομή σκέδασης.

Το πείραμα του Rutherford επιβεβαίωσε με μέσο τετραγωνικό σφάλμα 11% αυτή τη κατανομή σκεδαζομένων σωματιδίων α και έδωσε την πρώτη πρόβλεψη για τη δομή του ατόμου σύμφωνα με την οποία το θετικό φορτίο είναι συγκεντρωμένο στον πυρήνα που έχει ακτίνα της τάξης των 10^{-14} m ενώ το ηλεκτρονικό νέφος εκτείνεται σε ακτίνα 10^{-10} m. Το πείραμα αυτό κατέρριψε προηγούμενες θεωρίες της δομής των ατόμων που προέβλεπαν ότι το θετικό φορτίο ήταν ομογενώς κατανεμημένο σε μία σφαίρα ακτίνας 10^{-10} m μέσα στην οποία βρίσκονταν επιπλέον και τα ηλεκτρόνια.