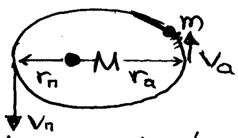
Λύσεις θεμάτων
Μηχανικής Ι
Σεπτέμβριος 2000

ΘΕΜΑ 1: (α)



Λόγω $M >> m$ το άστρο μάζας M παραμένει σχεδόν ακίνητο.

Από διατήρηση στροφορμής $\underbrace{\cancel{m} v_\pi r_\pi}_{\text{περιήλιο}} = \underbrace{\cancel{m} v_a r_a}_{\text{αφήλιο}}$ (

" " ενέργειας: $\frac{\cancel{m} v_\pi^2}{2} - \frac{GM\cancel{m}}{r_\pi} = \frac{\cancel{m} v_a^2}{2} - \frac{GM\cancel{m}}{r_a}$

$$(1,2) \Rightarrow \frac{V_\pi^2}{2} - \left(\frac{V_\pi r_\pi}{r_a}\right)^2 \frac{1}{2} = GM\left(\frac{1}{r_\pi} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{V_\pi^2}{2}\left(\frac{r_a^2 - r_\pi^2}{r_a^2}\right) = GM\left(\frac{r_a - r_\pi}{r_a r_\pi}\right)$$

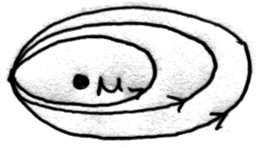
$$\Rightarrow \frac{V_\pi^2}{2}\left(\frac{r_a + r_\pi}{r_a}\right) = \frac{GM}{r_\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{r_\pi}{r_a} = \left(\frac{GM}{r_\pi} - \frac{V_\pi^2}{2}\right)\frac{2}{V_\pi^2}$$

$$\Rightarrow r_a = r_\pi \Big/ \left[\frac{2GM}{r_\pi V_\pi^2} - 1\right]$$

(β) Αφού μετά από κάθε πέρασμα από το περιήλιο η v_π μικραίνει (λόγω τριβής), χωρίς όμως να αλλάζει η r_π (αφού η τροχιά πρέπει να είναι κλειστή αν αγνοηθεί η επιβράδυνση), ο παρονομαστής μεγαλώνει και η r_a μικραίνει.

Έτσι περιμένουμε η τροχιά να είναι ως ακολούθως:



(γ)

Η τροχιά ξεκινά από το περιήλιο r_π με ταχύτητα V_0. Επομένως φθάνει στο αφήλιο για πρώτη φορά, όπου

$$r_{a1} = \frac{r_\pi}{\frac{2GM}{r_\pi V_0^2} - 1}$$

Μετά το πέρασμα από το περιήλιο και την ελάττωση της ταχύτητας, το δεύτερο πέρασμα από το αφήλιο θα έχει ακτίνα

$$r_{a2} = \frac{r_\pi}{\frac{2GM}{r_\pi V_0^2 (1-\delta)^2} - 1}$$

Γενικά
$$r_{aN} = \frac{r_\pi}{\frac{2GM}{r_\pi V_0^2 (1-\delta)^{2N-2}} - 1} \qquad (3)$$

(δ) Κυκλική θα γίνει η τροχιά όταν $r_\pi = r_{\alpha N}$

Επομένως όταν $\dfrac{GM}{r_\pi V_0^2 (1-\delta)^{2N-2}} = 1 \Rightarrow$

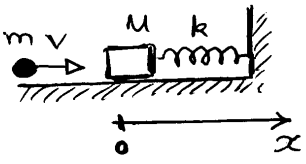
$$N = \frac{1}{2}\,\frac{\ln\left(\frac{GM}{r_\pi V_0^2}\right)}{\ln(1-\delta)} + 1 \simeq \frac{1}{2\delta}\ln\left(\frac{r_\pi V_0^2}{GM}\right) + 1$$

όταν $\delta \ll 1$

* Για την ακρίβεια κανείς πρέπει να λάβει το ακέραιο μέρος της παραπάνω λύσης

(ε) Προφανώς δεν μπορούμε να επεκτείνουμε τη λύση (3) που βρήκαμε στο ερώτημα (γ) πέραν του αριθμού N που βρήκαμε παραπάνω, γιατί τότε το "αφήλιο" θα άρχιζε να πλησιάζει στον αστέρα περισσότερο από το περιήλιο, οπότε θα εμφανιζόταν τριβή και στο αφήλιο. (ή καλύτερα καθ' όλη την τροχιά).

ΘΕΜΑ 2:



Έστω ότι η κρούση συμβαίνει τη χρονική στιγμή 0, στη θέση x=0. Λόγω ελαστικής κρούσης

$$\left.\begin{aligned} mv &= mv + MV_2 \\ mv^2/2 &= mv_1^2/2 + MV_2^2/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{m-M}{m+M} V$$

$$V_2 = \frac{2m}{m+M} V.$$

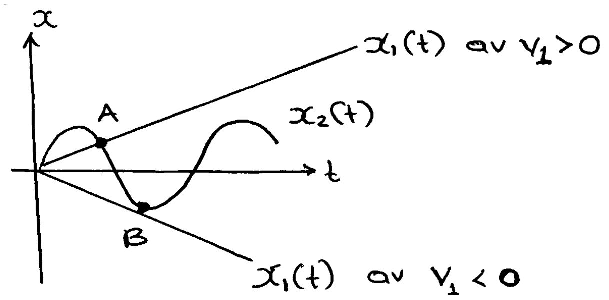
(α) Μετά την κρούση και εφόσον δεν ξαναλληλεπιδράσουν τα δύο σώματα θα ακολουθήσουν την ακόλουθη εξίσωση κίνησης.

$$X_1 = V_1 t$$

$$X_2 = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\, t\right)$$

όπου $\frac{1}{2}k\alpha^2 = \frac{1}{2}MV_2^2 \Rightarrow \alpha = V_2\sqrt{\frac{M}{k}}$

$$X_2 = V_2\sqrt{\frac{M}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\, t\right)$$



Φαίνεται αμέσως ότι αν $V_1 > 0$, θα επαναληφθεί κρούση (σημείο A). Η συνθήκη "μόλις να ακουμπήσουν" τα δύο σώματα συνεπάγεται επαφή των λύσεων τύπου σημείου B. Δηλαδή:

$$X_1(t_*) = x_2(t_*) \quad \text{και}$$
$$\dot{x}_1(t_*) = \dot{x}_2(t_*)$$

Με άλλα λόγια πρέπει να υπάρχει t_* για το οποίο

$$V_1 t_* = V_2 \sqrt{\frac{M}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t_*\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 \tau = V_2 \sin\tau \quad (1) \quad \left(\tau \equiv \sqrt{\frac{k}{M}} t_*\right)$$

και

$$V_1 = V_2 \sqrt{\frac{M}{k}} \sqrt{\frac{k}{M}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t_*\right)$$

$$\Rightarrow V_1 = V_2 \cos\tau \quad (2)$$

Επομένως τα V_1, V_2 πρέπει να είναι τέτοια ώστε να υπάρχει κοινή λύση για (1) και (2).

(β) Διαιρώντας την (1) και (2)

$$\Rightarrow \tau = \tan\tau \quad \text{με λύση } \tau_0 = 4.494.$$

Επομένως $\quad V_1/V_2 = \cos\tau_0 = -0.217$

$$\frac{m-M}{2m} = -0.217 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} - \frac{M}{2m} = -0.217 \Rightarrow$$

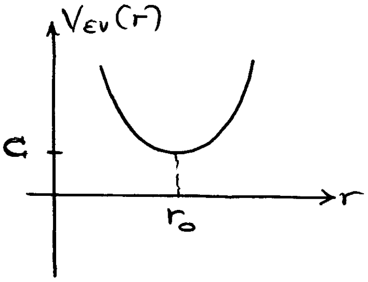
$$\frac{M}{m} = 1.434.$$

Προφανώς για να μην συμβεί διπλή σύγκρουση $M > 1.434m$ αφού τότε η μικρή μάζα θα εκσφενδονισθεί ακόμη πιο γρήγορα προς τα πίσω και δεν θα την προλάβει η M.

ΘΕΜΑ 3: $F(r) = -\frac{L^2}{mr^3} - k(r-r_0)$

(α) $V(r) = \int F dr = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}(r-r_0)^2 + C$

$$V_{εν}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{k}{2}(r-r_0)^2 + C$$



Το σωματίδιο θα εκτελεί κατά την ακτινική κατεύθυνση ταλάντωση σταθερής συχνότητας, καθώς θα περιστρέφεται γύρω από το ελκτικό κέντρο, αφού $\frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{εν}(r) =$ σταθ.

(β) Για να είναι κυκλική η τροχιά, η ολική ενέργεια πρέπει να εφάπτεται στον πάτο του πηγαδιού, οπότε $r = r_0$ και $\dot{r} = 0$. Η αζιμουθιακή ταχύτητα μπορεί να είναι οσηδήποτε, αφού η δύναμη εξαρτάται από την L.

(γ) Αφού ακτινικά το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση δύο διαδοχικά αφήλια θα συμβαίνουν με χρονική διαφορά $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

(δ) Η γωνία περιστροφής στο διάστημα αυτό θα είναι $\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \Rightarrow \Delta\phi = \int_0^T \frac{L}{mr^2} dt$

Αλλά $r = r_0 + a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

$$\Delta\phi = \frac{L}{m\sqrt{\frac{k}{m}}}\int_0^{2\pi} \frac{du}{(r_0 + a\cos u)^2}$$

Προφανώς το $\Delta\phi$ εξαρτάται από την τιμή του a που σχετίζεται με τις αρχ. συνθήκες αφού για

$a = 0$: $\Delta\phi = \frac{L}{\sqrt{mk}}\,\frac{2\pi}{r_0^2}$

ενώ για $a = r_0$ $\quad \int \to \infty$ (αποκλίνει)

Επομένως το κλείσιμο της τροχιάς εξασφαλίζεται μόνο για ορισμένες τιμές του a (των αρχ. συνθηκών).

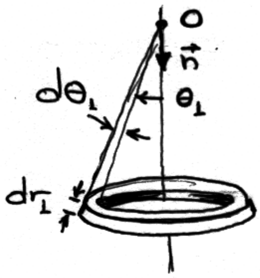
ΘΕΜΑ 4: Λόγω συμμετρίας θα διαιρέσουμε τον πλανήτη σε στοιχειώδεις δακτυλίους με άξονα τον άξονα συμμετρίας ΟΑ και

$r_1 < r < r_1 + dr_1$

$< \theta < \theta_1 + d\theta_1$

$\varphi \in [0, 2\pi)$

(α) Κάθε τέτοιος δακτύλιος ασκεί στο Ο βαρυτική δύναμη: $dF_n = \frac{Gm\,dM}{r_1^2}\cos\theta_1$



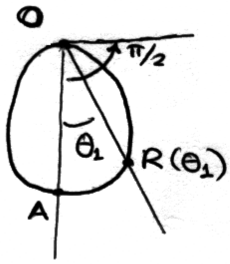
παίρνουμε μόνο τη συνιστώσα της F παράλληλα με τον άξονα OA.

$$dM = \rho\, dV = \rho\,(2\pi r_1 \sin\theta_1)(r_1\, d\theta_1)\, dr_1$$

$$F_n = \int dF_n = \int \frac{Gm}{r_1^2}\, 2\pi\rho\, r_1^2\, dr_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1\, d\theta_1$$

$$= 2\pi\rho G m \int_0^{\pi/2} d\theta_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1 \int_0^{R(\theta_1)} dr_1$$

$$= 2\pi\rho G m \int_0^{\pi/2} d\theta\, R(\theta) \sin\theta \cos\theta$$



όπου όμως $\int dM = M \Rightarrow$

$$2\pi\rho \int_0^{\pi/2} d\theta_1 \sin\theta_1 \int_0^{R(\theta_1)} r_1^2\, dr_1 = M \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi\rho}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta\, R^3(\theta) \sin\theta = M$$

(β) Στην προκείμενη περίπτωση: $A^3 \int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{3M}{2\pi\rho}$

όπου $\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}\theta \sin\theta \, d\theta = -\int_1^0 x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{5}$

$$A = \sqrt[3]{\frac{15M}{4\pi\rho}}$$

και $F_n = 2\pi\rho G m A \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^{3/2}\theta \sin\theta = 2\pi\rho G m A \frac{2}{5} =$

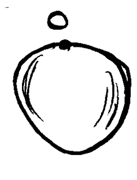
$$= \frac{4\pi\rho}{5} G m \sqrt[3]{\frac{5M}{4\pi\rho}\cdot 3} = \sqrt[3]{\left(\frac{4\pi\rho}{5}\right)^2 (Gm)^3 M \cdot 3}$$

Αν ο πλανήτης ήταν σφαιρικός:

$$\left.\begin{array}{l} F_n^* = \frac{GmM}{R^2} \\ \text{αλλά } \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \end{array}\right\} F_n^* = \frac{GmM}{\sqrt[3]{\left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^2 M (Gm)^2}$$

$$\frac{F_n}{F_n^*} = \frac{\sqrt[3]{3/25}}{\sqrt[3]{1/9}} = \sqrt[3]{27/25} > 1$$

Ένα τέτοιο παραμορφωμένο πλανητοειδές



έχει βαρύτητα στην κορυφή του O μεγαλύτερη από αντίστοιχο σφαιρικό πλανήτη.