ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 1: (α) Ταχύτητα ΚΜ: $u_{KM} = \dfrac{mu_1 + mu_1}{2m} = \dfrac{u_1 + u_2}{2}$.

Επομένως $u_1' = u_1 - \dfrac{u_1+u_2}{2} = \dfrac{u_1-u_2}{2}$, $u_2' = u_2 - \dfrac{u_1+u_2}{2} = -\dfrac{u_1-u_2}{2}$

(β) Διατήρηση ορμής στο ΚΜ:

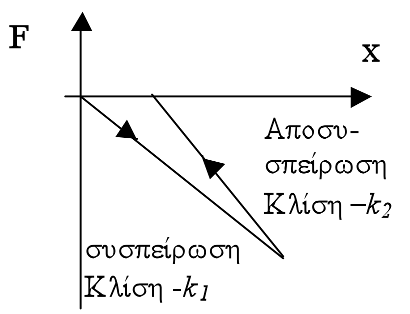
$mu_1' + mu_2' = mV_1' + mV_2' \Rightarrow u_1' + u_2' = V_1' + V_2' = 0 \Rightarrow V_1' = -V_2'$ (όπως πάντα στο ΚΜ).

Χρησιμοποιήσαμε τόνους για ΚΜ και κεφαλαία για μετά ή κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Επιπλέον η διατήρηση της ενέργειας δίδει:

$\frac{1}{2}mu_1'^2 + \frac{1}{2}mu_2'^2 = \frac{1}{2}mV_1'^2 + \frac{1}{2}mV_2'^2 + \frac{1}{2}k_1x^2$. Όταν η συσπείρωση x γίνει μέγιστη οι ταχύτητες V_1', V_2' πού έχουν ίδιο μεταξύ τους μέτρο θα γίνουν ελάχιστες δηλαδή μηδέν. Έτσι $x_{\max} = \sqrt{\dfrac{2m}{k_1}}\left|\dfrac{u_1-u_2}{2}\right|$ (1).

(γ) Όταν το ελατήριο αποσυμπιεστεί θα επιμηκυνθεί από το σημείο μέγιστης συσπείρωσης κατά $F_{\max}/k_2 = \dfrac{k_1}{k_2}x_{\max}$.



Επομένως αντί του $E = \dfrac{1}{2}k_1x^2_{\max}$ (2), θα χρησιμοποιηθεί κατά την αποσυμπίεση η $E' = \dfrac{1}{2}k_2\left(\dfrac{k_1}{k_2}x_{\max}\right)^2 = E\dfrac{k_1}{k_2}$.(3)

(δ) Από διατήρηση της ενέργειας μετά την κρούση:
$\frac{1}{2}mV_1'^2 + \frac{1}{2}mV_2'^2 = E\dfrac{k_1}{k_2}$ και αφού $V_2' = -V_1'$ εξαιτίας διατήρησης της ορμής, προκύπτει από (1),(2),(3) ότι $V_2' = \left|\dfrac{u_1-u_2}{2}\right|\sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}}$, και προσθέτοντας την στην ταχύθητα του ΚΜ παίρνουμε: $u_2' = \dfrac{u_1+u_2}{2} + \sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}}\left|\dfrac{u_1-u_2}{2}\right|$.

Αντίστοιχα $u_1' = \dfrac{u_1+u_2}{2} - \sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}}\left|\dfrac{u_1-u_2}{2}\right|$.

(ε) Εξαρτάται αφού αν επιλέξουμε το ένα σώμα να είναι ακίνητο $u_2 = 0$, τότε ο λόγος της τελικής κινητικής ενέργειας προς την αρχική είναι $\dfrac{1 + k_1/k_2}{2}$, ενώ αν κινούνταν αρχικά με αντίθετες αλλά ίσες ταχύτητες ο λόγος αυτός είναι $\dfrac{k_1}{k_2}$.

ΘΕΜΑ 2: (α) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες ο0 2ος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τη μορφή $\vec{F} = -k\vec{x} = -k\left(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y\right) = m\ddot{\vec{x}} = m\left(\ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y\right)$. Επομένως:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$
$$m\ddot{y} + ky = 0 \, .$$

Η λύση των δύο αυτών διαφορικών εξισώσεων είναι λύσεις αρμονικού ταλαντωτή και μάλιστα ίδιας συχνότητας (γεγονός που εξασφαλίζει την κλειστότητα της τροχιάς). Έτσι

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$
$$y = C\cos\omega t + D\sin\omega t \, ,$$

με $\omega^2 = k/m$. Γενικά η τροχιά αυτή είναι μια έλλειψη στραμμένη σε σχέση με το σύστημα των αξόνων x-y που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων (μπορεί κανείς να το δείξει αν γράψει την εξίσωση της έλλειψης σε ένα στραμμένο καρτεσιανό σύστημα και προσπαθήσει να προσδιορίσει τις παραμέτρους αυτής βάσει των A,B,C,D). Αν B=C=0 είναι εύκολο να δει κανείς πως πρόκειται περί έλλειψης με ημιάξονες A και D.

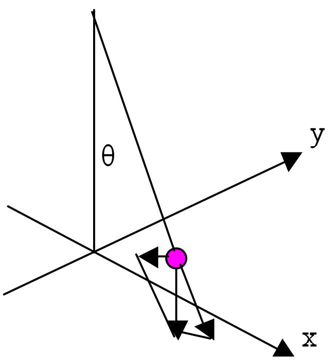
(β) Η περίοδος ολοκλήρωσης μιας πλήρους ταλάντωσης και στον x και στον y άξονα είναι $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, επομένως η κίνηση επαναλαμβάνεται μετά από T για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες που καθορίζουν τα A,B,C,D δηλαδή το μέγεθος και το ακριβές σχήμα.

(γ) $$\begin{aligned} &x(t=0)=0 \Rightarrow A=0, y(t=0)=a \Rightarrow C=a \\ &\dot{x}(t=0)=v_0 \Rightarrow B\omega = v_0, \dot{y}(t=0)=0 \Rightarrow D=0 \end{aligned}$$

Η τροχιά λοιπόν είναι η $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{\left(v_0/\omega\right)^2} = 1$ (έλλειψη με y-ημιάξονα a και x-ημιάξονα v_o/ω).

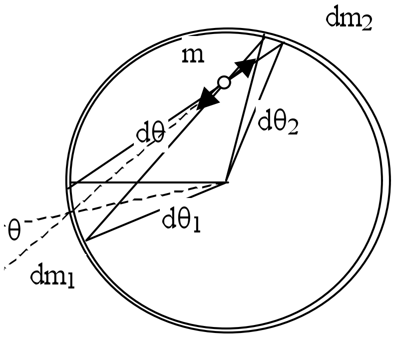
(δ) $\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = m\vec{r}(0)\times\vec{v}(0)$ σταθερτή αφού η δύναμη είναι κεντρική. $\vec{L} = mav_0\hat{z}$.

(ε) $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$, όπου $V(r) = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}kr^2$. Ο όρος $\frac{L^2}{2mr^2}$ είναι ο όρος με την αζιμουθιακή ταχύτητα $\frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2$ αν κάνουμε την αντικατάσταση $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$.



(στ) Η οριζόντια συνιστώσα του βάρους είναι $mg\tan\theta$, δηλαδή περίπου $mg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l}$. Η x συνιστώσα αυτού είναι $mg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l}\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -mgx/l$ και αντίστοιχα για την y συνιστώσα. Διανυσματικά: $\vec{F} = -\left(\frac{mg}{l}\right)\vec{x}$, δηλαδή είναι της μορφής που εξετάσαμε στο πρόβλημα αυτό. Επομένως η κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο θα είναι μια έλλειψη της οποίας η περίοδος δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Επομένως όποια μικρή ώθηση και αν δώσουμε στο εκκρεμές αλλάζοντας έτσι την κίνηση από μονοδιάστατη σε διδιάστατη δεν μεταβάλλουμε την περίοδο, οπότε και μπορούμε με ασφάλεια να μετρήσουμε το *g*.

ΘΕΜΑ 3: (α) Οι δύο δυνάμεις F_1, F_2 που δέχεται μια στοιχειώδης μάζα *m* από τις δύο στοιχειώδεις μάζες dm_1, dm_2 είναι



$$F_1 = \frac{G_2 m dm_1}{r_1}$$

$$F_2 = \frac{G_2 m dm_2}{r_2}$$

Αλλά $dm_1 = \lambda R d\theta_1$, όπου *R* η ακτίνα του δακτυλίου, *λ* η γραμμική πυκνότητα μάζας (μάζα ανά μονάδα τόξου του δακτυλίου), και αντίστοιχα για την dm_2. Αλλιώς μπορούμε να γράψουμε ότι

$dm_1 = \lambda r_1 \dfrac{d\theta}{\cos\theta}$ και $dm_2 = \lambda r_2 \dfrac{d\theta}{\cos\theta}$, αφού οι γωνίες θ και $d\theta$ είναι κοινές και για τα δύο στοιχειώδη τόξα. Έτσι λοιπόν οι δύο δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες και αλληλοαναιρούνται οι βαρυτικές συμβολές από τα δύο αυτά τόξα. Το ίδιο συμβαίνει για όλα τα αντίθετα κείμενα τόξα, οπότε η 2-βαρυτική δύναμη είναι μηδέν στο εσωτερικό του δακτυλίου.

(β) Σύμφωνα με την πρόταση (Α) η δύναμη που θα δέχεται μια μάζα *m* στο εσωτερικό ενός κυκλικού άστρου θα είναι

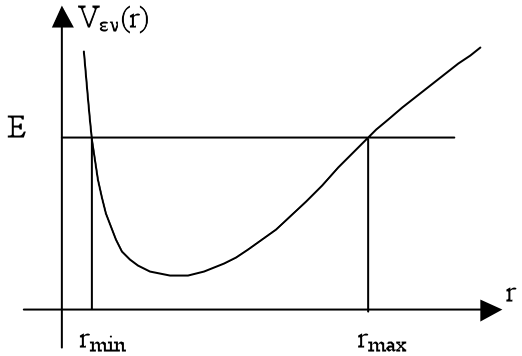
$\vec{F} = -G_2 m \dfrac{M(r)}{r}\hat{r} = -G_2 m \dfrac{\rho\pi r^2}{r}\hat{r} = -G_2 m \dfrac{Mr}{R^2}\hat{r}$, όπου ρ, R η πυκνότητα και η ακτίνα του άστρου. Η δύναμη αυτή έχει τη μορφή αρμονικού ταλαντωτή και επομένως αφού αρχικά στη μάζα δεν δίνουμε ταχύτητα και καμία άλλη δύναμη δεν δέχεται αυτή από την ύλη του άστρου θα εκτελέσει γραμμική ταλάντωση γύρω από το κέντρο του άστρου με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^2}{G_2 M}}$.

(γ) $V_{\varepsilon\nu}(r) = V(r) + \dfrac{L^2}{2mr^2}$ (το φυγοκεντρικό δυναμικό θα είναι όπως και στις 3 διαστάσεις αφού έτσι κι αλλιώς η κίνηση θα είναι επίπεδη όπως και στις κεντρικές δυνάμεις στις 3 διαστάσεις).

$V(r) = -\displaystyle\int_{r_0}^{r} -G_2 mM \frac{\hat{r}}{r}\cdot d\vec{r} + V(r_0) = G_2 mM \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + V(r_0)$. Αν επιλέξουμε $r_0 = 1$ και

$V(r_0) = 0$, $V_{\varepsilon\nu}(r) = G_2 mM \ln(r) + \dfrac{L^2}{2mr^2}$. [Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι στη διδιάστατη περίπτωση ούτε το r=0 ούτε το r=∞ είναι κατάλληλα σημεία αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια αφού και στα δύο αυτά σημεία απειρίζεται το δυναμικό (ο λογάριθμος). Η επιλογή $V(r=1) = 0$ δείχνει ότι δεν υπάρχει κάποια κλίμακα μήκους χαρακτηριστική για το πρόβλημα αυτό (1 σε τι μονάδες;)]

Η συνάρτηση του ενεργού δυναμικού τείνει στο άπειρο και για $r \to 0$ και για $r \to \infty$, αφού το $1/r^2$ πάει πολύ πιο απότομα στο +άπειρο απ` ότι ο $\ln r$ στο –άπειρο όταν $r \to 0$.



Από τη μορφή του ενεργού δυναμικού φαίνεται ότι για οποιαδήποτε ενέργεια οι τροχιές θα είναι δέσμιες, θα βρίσκονται εντός κάποιου δακτυλίου $r_{\min} \le r \le r_{\max}$ (βλέπε διάγραμμα).

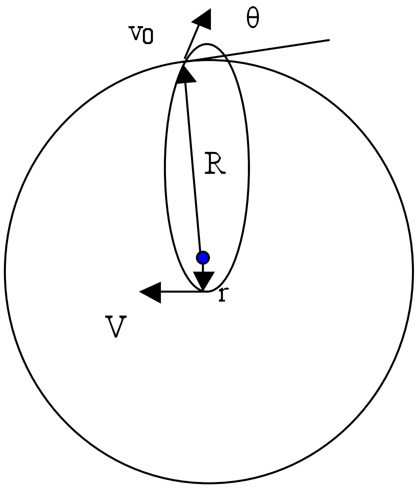
Προφανώς μόνο πλανήτες μπορούμε να έχουμε γύρω από ένα τέτοιο άστρο· κομήτες με μία μόνο εμφάνιση δεν μπορούμε να έχουμε αφού δεν είναι δυνατό οποιοδήποτε σώμα να φύγει σε άπειρη απόσταση μακριά από το άστρο.

(ε) Η ταχύτητα διαφυγής είναι άπειρη αφού $V(r \to \infty) = +\infty$.

(στ) Προκειμένου να έχουμε κυκλικές κινήσεις θα πρέπει:

$F = mv^2 / r \Rightarrow G_2 mM / r = mv^2 / r \Rightarrow v = \sqrt{G_2 M}$ (ανεξάρτητο δηλαδή της απόστασης από το άστρο – το γεγονός αυτό σχετίζεται με το ότι δεν υπάρχει κλίμακα μήκους στο πρόβλημα αυτό). Τη συνθήκη για κυκλική τροχιά θα μπορούσαμε να την εξαγάγουμε και από το $\frac{dV_{\varepsilon\nu}}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{mr^3} + G_2 \frac{mM}{r} = 0 \Rightarrow L^2 = G_2 m^2 M r^2$, και αφού στην κυκλική κίνηση $L = mvr$, συνάγουμε ότι $v = \sqrt{G_2 M}$.

ΘΕΜΑ 4: (α) Όποιο και αν είναι το μέγεθος της Γης η κίνηση είναι αυτή σε ένα πεδίο βαρύτητας νευτώνειου τύπου (δηλαδή αντιστρόφου τετραγώνου). Επομένως είναι έλλειψη. Από διατήρηση στροφορμής



$mv_0 \cos\theta R = mVr \Rightarrow V = v_0 \cos\theta \frac{R}{r}$.(1)

Επίσης από διατήρηση ενέργειας:

$\frac{1}{2} m {v_0}^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2} m V^2 - G\frac{Mm}{r}$.(2)

Από (1) και (2) απαλείφοντας την m:

${v_0}^2 (1 - \cos^2\theta \frac{R^2}{r^2}) = \frac{2GM}{R}(1 - \frac{R}{r})$. (3)

Για ευκολία ας θέσουμε $x \equiv \frac{R}{r}$ και $\beta = \frac{2GM}{{v_0}^2}$.

$(3) \Rightarrow \cos^2\theta x^2 - \beta x + \beta - 1 = 0$ (4).

Οι λύσεις αυτής θα μας οδηγήσουν στο ζητούμενο.

$x = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\cos^2\theta(\beta - 1)}}{2\cos^2\theta}$. Αν επιπλέον χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η αρχική ταχύτητα είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ταχύτητα διαφυγής ο παράγοντας β είναι πολύ μεγάλος αδιάστατος αριθμός. Επομένως

$$x \cong \frac{\beta}{2\cos^2\theta}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{\cos^2\theta}{\beta}}\right) \cong \frac{\beta}{2\cos^2\theta}\left(1 \pm 1 \mp 2\frac{\cos^2\theta}{\beta}\right).$$

Οι λύσεις λοιπόν είναι είτε $x \cong \frac{\beta}{\cos^2\theta}$ (αν αγνοήσουμε ως μικρό τον τελευταίο όρο), είτε $x \cong 1$. Η δεύτερη λύση δίνει την αρχική θέση $r = R$, ενώ η πρώτη δίνει την ζητούμενη απόσταση: $r = R\frac{\cos^2\theta}{\beta} = \frac{v_0{}^2\cos^2\theta}{2g}$. Το μέγιστο ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης δίνεται ακριβώς από τον ίδιο τύπο με ημίτονο όμως στη θέση του συνημιτόνου.

(β) Όταν λοιπόν η γωνία είναι τέτοια ώστε ημίτονο και συνημίτονο να συμπίπτουν (θ=45^o) η ελάχιστη απόσταση είναι ίδια με το μέγιστο ύψος.

(γ) Από τον 3^o νόμο του Κέπλερ $\boxed{T^2 / a^3 = \sigma\tau\alpha\theta}$. Επομένως όταν η κίνηση είναι κυκλική α=R, και $T_0 = \frac{2\pi R}{v_\kappa} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 83\,\text{min}$, ενώ στην περίπτωση μας που η τροχιά είναι πολύ έκκεντρη έλλειψη, αφού περνά πολύ κοντά από το κέντρο της Γης, $a \cong R/2$, $T = T_0\left(\frac{R/2}{R}\right)^{3/2} = \frac{T_0}{2\sqrt{2}} \approx 23\,\text{min}$