



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

## Τμήμα Φυσικής Πρόοδος στη Μηχανική I Δεκέμβριος 2007

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

*Όλα τα υποερωτήματα είναι ισοδύναμα και απαντώνται άμεσα. Αν δεν ξέρετε να απαντήσετε ένα υποερώτημα προχωρήστε αμέσως στο επόμενο. Καλή σας επιτυχία.*

1. Σε σωματίδιο που αρχικά είναι ακίνητο στη θέση  $x = 0$  ασκούνται δυνάμεις σύμφωνα με την εξίσωση

$$\ddot{x} = \delta(t - 1) - \delta(t - 2)$$

- α.** Σχεδιάστε την ταχύτητα του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.  
**β.** Σχεδιάστε τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

2. Δύο σημειακά σωματίδια μάζας  $m_1$  και  $m_2$  κινούνται στη μία διάσταση και είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με γραμμικό ελατήριο μηδενικού μήκους ισορροπίας και σταθεράς  $k$ . Οι θέσεις των σωματιδίων αντίστοιχα είναι  $x_1$  και  $x_2$ .

- α.** Δείξτε ότι η συνολική ορμή (το άθροισμα των ορμών των σωματιδίων) διατηρείται.  
**β.** Είναι η παρακάτω πρόταση ορθή ή λάθος; "Αν παρατηρήσετε τα σωματίδια από ένα άλλο αδρανειακό σύστημα που κινείται με ταχύτητα  $V$  ως προς το αρχικό, η συνολική ορμή στο νέο σύστημα αναφοράς ισούται με την αρχική ορμή μείον την ποσότητα  $(m_1 + m_2)V$ ."  
**γ.** Μεταβείτε στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο η συνολική ορμή των σωματιδίων είναι μηδενική. Ποια η σχέση των συντεταγμένων των δύο σωματιδίων στο σύστημα αυτό; Γράψτε στο σύστημα αυτό την εξίσωση κίνησης του πρώτου σωματιδίου.  
**δ.** Περιγράψτε την κίνηση των σωματιδίων στο παραπάνω σύστημα αναφοράς.

3. Σωματίδιο κινείται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\ddot{x} = -nx^{n-1}$$

όπου  $n$  άρτιος ακέραιος με  $n \geq 2$ .

- α.** Γράψτε την εξίσωση ενέργειας.  
**β.** Γράψτε την έκφραση που δίνει την περίοδο της κίνησης  $T(E)$  συναρτήσει της ενέργειας  $E$ .  
**γ.** Κάνοντας την αλλαγή της μεταβλητής  $x = E^{1/n}\xi$ , δείξτε ότι  $T(E) = kE^\beta$  όπου  $k$  μία σταθερά που δεν εξαρτάται από την ενέργεια  $E$  και προσδιορίστε τον εκθέτη  $\beta$ .  
**δ.** Για ποιο  $n$  η περίοδος είναι ίδια για όλες τις ενέργειες;  
**ε.** Ποια η συμπεριφορά της περιόδου με την ενέργεια στο όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(E)$ ;  
**ζ.** Σχεδιάστε το δυναμικό στο όριο  $n \rightarrow \infty$ ; Ποιο φυσικό σύστημα προσεγγίζεται σε αυτό το όριο; Μπορείτε με απλά επιχειρήματα να καταλήξετε στην εξάρτηση της περιόδου με την ενέργεια που βρήκατε στο προηγούμενο υποερώτημα;

4. Θεωρήστε αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση στον οποίο ασκείται εξωτερική αρμονική δύναμη και η κίνησή του προσδιορίζεται από την εξίσωση:

$$\ddot{x} + \frac{14}{\tau}\dot{x} + \left(\frac{25}{\tau}\right)^2 x = F_0 \cos \frac{25t}{\tau}$$

Το  $\tau$  είναι θετική σταθερά με μονάδες χρόνου. Δίδεται ότι  $25^2 - 7^2 = 24^2$ .

- α.** Προσδιορίστε την ομογενή γενική λύση της εξίσωσης κίνησης.  
**β.** Προσδιορίστε την μη ομογενή λύση.  
**γ.** Αν αρχικά το σωματίδιο ήταν ακίνητο στη θέση  $x = 0$  να προσδιορίστε την κίνηση του ταλαντωτή για χρόνους  $t/\tau \ll 1$ .  
**δ.** Προσδιορίστε τη κίνηση του ταλαντωτή για χρόνους  $t/\tau \gg 1$ .  
**ε.** Πώς θα υπολογίζατε την ενέργεια που απορροφά ο ταλαντωτής από την εξωτερική δύναμη στο χρονικό διάστημα  $[0, \tau]$  (μην κάνετε πράξεις, γράψτε απλώς την έκφραση).
5. Διανύσματα στις δύο διαστάσεις είναι (κατ' αντιστοιχία με τις τρεις) δυάδες αριθμών που μετασχηματίζονται όπως και οι συντεταγμένες ενός σημείου με τους μετασχηματισμούς των στροφών. Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων σε μία στροφή κατά γωνία  $\theta$  είναι:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta.\end{aligned}$$

- α.** Η δυάδα των συντεταγμένων σημείου,  $(x_1, x_2)$ , είναι εξ ορισμού διάνυσμα. Ορίζει η δυάδα  $(x_2, x_1)$  διάνυσμα;  
**β.** Ορίζει η δυάδα  $(-x_2, x_1)$  διάνυσμα;  
**γ.** Εάν ορίζαμε το γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$  ως τον αριθμό  $a_1 b_1 - a_2 b_2$ , θα ήταν αυτός ο ορισμός καλός με την έννοια ότι δεν θα εξαρτιόταν από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς (με άλλα λόγια ορίζει το γινόμενο αυτό μία βαθμωτή ποσότητα);