



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Εξέταση στη Μηχανική Ι
13 Φεβρουαρίου 2013

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

ΘΕΜΑ Α Σωματίδιο μάζας m και φορτίου e κινείται στο χώρο υπό την επίδραση χρονο-εξαρτώμενου μαγνητικού πεδίου, $\vec{B}(\vec{r}, t)$, (το ηλεκτρικό πεδίο είναι αμελητέο). Η θέση και η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $\vec{r}(t)$ και $\vec{v}(t)$, και η διανυσματική εξίσωση κίνησης είναι:

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{v} \times \vec{B}.$$

1. Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου διατηρείται. Αν το μαγνητικό πεδίο έχει σταθερή διεύθυνση (αλλά μεταβαλλόμενο μέτρο) ποια συνιστώσα της ταχύτητας παραμένει σταθερά;
2. Δείξτε ότι η στροφορμή του σωματιδίου $m\vec{r} \times \vec{v}$, γενικά δεν διατηρείται, επιλέγοντας κατάλληλες αρχικές συνθήκες. [Δίδεται $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.]
3. Θεωρήστε το αξονικά συμμετρικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B(z)\hat{z} - \frac{1}{2}\rho(dB(z)/dz)\hat{\rho}$ (το μαγνητικό αυτό πεδίο προκύπτει από την απαίτηση το ανυσματικό δυναμικό να είναι αξονικά συμμετρικό $\vec{A} = A_\theta\hat{\theta}$). Έστω $\dot{\mathcal{E}} = \hat{z} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{v}})/2$ ο στιγμιαίος ρυθμός με τον οποίο σαρώνει επιφάνεια, η προβολή $\rho\hat{\rho}$ του διανύσματος θέσης $\vec{r}(t)$ του σωματιδίου στο επίπεδο που είναι κάθετο στο \hat{z} , δηλαδή το (x, y) . Ποια είναι η σχέση μεταξύ του $\dot{\mathcal{E}}$ και της στροφορμής \vec{L} ; Δείξτε ότι η ποσότητα

$$m\dot{\mathcal{E}} + \frac{eB(z)\rho^2}{4},$$

διατηρείται κατά την κίνηση του σωματιδίου, όπου (ρ, θ) οι πολικές συντεταγμένες του επιπέδου (x, y) . Προσδιορίστε τώρα ποια ποσότητα πρέπει να προστεθεί στη z -συνιστώσα της στροφορμής για να πετύχουμε κάποιον αντίστοιχο νόμο διατήρησης.

4. Αν το μαγνητικό πεδίο είναι σχεδόν ομογενές $\vec{B} \simeq B(z)\hat{z}$ (αλλάζει ελάχιστα κατά μήκος του άξονα z) η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ του σωματιδίου, με αρκετά καλή ακρίβεια δίνεται από τη σχέση $\dot{\theta} \simeq -eB(z)/m$. Από την προηγούμενη διατηρούμενη ποσότητα βρείτε πώς αλλάζει η ακτίνα περιστροφής ρ του σωματιδίου ως συνάρτηση της z συντεταγμένης του σωματιδίου.
5. Πώς αλλάζει η περιστροφική του ταχύτητα $\rho\dot{\theta}$ αν το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται κατά μήκος του z ; Υπάρχει ανώτατο όριο αυτής της ταχύτητας; [Σκεφθείτε το πρώτο ερώτημα.]

ΘΕΜΑ Β Σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινείται υπό την επίδραση του βαρυντικού πεδίου του Ήλιου. Στο σωματίδιο ασκείται η βαρυντική έλξη από τον Ήλιο μ/r^2 (r η απόσταση από το κέντρο του Ήλιου, το οποίος θεωρείται ότι βρίσκεται πακτωμένος στο $r = 0$) και δύναμη τριβής σε διεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας του σωματιδίου και μέτρου kv , όπου $v = |\vec{v}|$ και \vec{v} η ταχύτητα του σωματιδίου. Η θέση του σωματιδίου στο χώρο είναι \vec{r} , ενώ τα μ και k είναι σταθερές.

1. Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση που διέπει τη κίνηση του σωματιδίου και δείξτε ότι η ποσότητα $\vec{H} = e^{kt}\vec{r} \times \vec{v}$ διατηρείται κατά τη κίνηση. Από αυτή τη διατήρηση αποδείξτε ότι η κίνηση του σωματιδίου περιορίζεται σε ένα επίπεδο.
2. Λαμβάνοντας πολικές συντεταγμένες (r, θ) επί αυτού του επιπέδου δείξτε ότι η κίνηση διέπεται από τις εξισώσεις: $r^2\dot{\theta} = He^{-kt}$, $\mu r = H^2e^{-2kt} - r^3(\ddot{r} + k\dot{r})$, όπου $H = |\vec{H}|$.

- Δείξτε ότι αν $k = 0$ το σωματίδιο μπορεί να εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας a για κάθε τιμή του a . Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα ω της κυκλικής κίνησης συναρτήσει του a και μ .
- Αν $k/\omega \ll 1$ είναι τόσο μικρό, έτσι ώστε οι όροι \dot{r} και το \ddot{r} να μπορούν να θεωρηθούν αμελητέοι στις παραπάνω εξισώσεις, δείξτε ότι τότε θα έχουμε κατά προσέγγιση:

$$r \simeq ae^{-2kt} \quad , \quad \dot{\theta} \simeq \omega e^{3kt} .$$

Ελέγξτε στο τέλος ότι αυτή η λύση καθιστά πράγματι τον όρο $r^3(\ddot{r} + k\dot{r})$, που αγνοήσαμε στην παραπάνω εξίσωση κίνησης, εξαιρετικά μικρό σε σύγκριση με τον καθένα από τους δύο άλλους εναπομείναντες όρους: μr , $H^2 e^{-2kt}$.

- Περιγράψτε την κίνηση για $t > 0$. Μεγαλώνει ή μικραίνει η ταχύτητα του σωματιδίου;

ΘΕΜΑ Γ Με αρκετά καλή ακρίβεια ο δίσκος ενός γαλαξία μπορεί να θεωρηθεί ως ένα άπειρο επίπεδο στρώμα πάχους $2H$ και αποτελούμενο από υλικό σταθερής πυκνότητας μάζας ρ_0 .

- Εξηγήστε γιατί περιμένετε το βαρυτικό πεδίο μέσα και έξω από το δίσκο να έχει τη διεύθυνση του άξονα της κάθετου στο άπειρο επίπεδο στρώμα (για ευκολία θεωρήστε ότι πρόκειται για τον άξονα z και θέστε $z = 0$ ακριβώς στο μέσο του στρώματος). Επίσης εξηγήστε για ποιο λόγο το βαρυτικό πεδίο σε συμμετρικές θέσεις $\pm z$ θα έχει ίδια ένταση (κατά μέτρο).
- Με κατάλληλη επιλογή ενός κυλίνδρου ύψους $2z$, συμμετρικά τοποθετημένου γύρω από το επίπεδο $z = 0$ και με χρήση του νόμου του Gauss, υπολογίστε το βαρυτικό πεδίο (την έντασή του) σε κάθε σημείο (μέσα και έξω από το στρώμα). [Μπορείτε αν θέλετε να ακολουθήσετε κάποιον άλλο, εναλλακτικό, τρόπο υπολογισμού του βαρυτικού πεδίου.]
- Περιγράψτε την κίνηση που θα εκτελεί ένα άστρο το οποίο βρίσκεται κάπου εντός του στρώματος κινούμενο μόνο υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου του στρώματος, ενόσω το άστρο **δεν** εξέρχεται από το στρώμα αυτό, .
- Ποια συνθήκη αρχικών συνθηκών του άστρου $\vec{r}(0) = (x(0), y(0), z(0))$, $\vec{v}(0) = (v_x(0), v_y(0), v_z(0))$ οδηγεί σε κινήσεις του άστρου μόνο στο εσωτερικό του στρώματος $H \geq z(t) \geq -H$ για κάθε t ;
- Παρακολουθώντας την κίνηση μιας ομάδας n άστρων στην περιοχή του δίσκου του Γαλαξία μας, παρατηρούμε ότι η χρονική περίοδος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας v_z του κάθε άστρου είναι ίδια για όλα τα άστρα εκτός από ένα, το n -στό. Αν ονομάσουμε v_i τη μέγιστη z -συνιστώσα της ταχύτητας του i -στού άστρου, παρατηρούμε ότι είναι $v_1 < v_2 < \dots < v_{n-1} < v_n$. Μπορούμε να έχουμε ένα εύρος δυνατών τιμών του πάχους του γαλαξιακού δίσκου, από τις παραπάνω τιμές, αν γνωρίζουμε την πυκνότητα μάζας ρ_0 αυτού;
- [**Ερώτηση για έναν επιπλέον βαθμό.**] Αν γνωρίζετε ότι η χρονική περίοδος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της z -ταχύτητας του n -στού άστρου είναι k φορές μεγαλύτερη από την αντίστοιχη όλων των άλλων άστρων, μήπως μπορείτε να εκτιμήσετε ακριβώς το πάχος του γαλαξιακού δίσκου;