



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

**Τμήμα
Πέτρου Ιωάννου και Θεοχάρη Αποστολάτου**

Σεπτέμβριος 2000

Να απαντηθούν και τα τέσσερα θέματα

ΘΕΜΑ 1: Ένας πλανήτης περιστρέφεται γύρω από έναν αστέρα μάζας M (πολύ μεγαλύτερης από τη μάζα του πλανήτη) σε πολύ ελλειπτική τροχιά. Όταν ο πλανήτης περνά από το περιήλιό του (το σημείο πλησιέστερα στον αστέρα), λόγω της τριβής του με το αραιό εκτεταμένο νέφος σκόνης που περιβάλλει τον αστέρα, χάνει ένα μικρό ποσοστό δ της ταχύτητας του (όπου $\delta \ll 1$).

(α) Υπολογίστε την απόσταση του αψηλίου (της μακρινότερης θέσης του πλανήτη από το άστρο) σαν συνάρτηση της απόστασης του περιηλίου, της M , και της ταχύτητας του πλανήτη στο περιήλιο, αγνοώντας καταρχάς την ελάττωση της ταχύτητας στο περιήλιο.

(β) Περιγράψτε αρχικά ποιοτικά την τροχιά του πλανήτη, λαμβάνοντας τώρα υπόψη και την ελάττωση της ταχύτητας με την συμπλήρωση κάθε τροχιάς.

(γ) Υπολογίστε την ακτίνα του αψηλίου μετά από N πλήρεις τροχιές, θεωρώντας ότι αρχικά ο πλανήτης έχει ξεκινήσει από το περιήλιο, έχοντας εξέλθει ήδη από το νέφος της σκόνης, με ταχύτητα V_0 .

(δ) Μετά από πόσες τροχιές θα έχει γίνει η τροχιά του πλανήτη κυκλική;

(ε) Θα συνεχίζατε να εφαρμόζετε τη σχέση που εξαγάγατε στο ερώτημα (γ) για αριθμό τροχιών μεγαλύτερο από αυτόν που πήρατε στο ερώτημα (δ);

ΘΕΜΑ 2: Ένα σώμα μάζας m ολισθαίνει δίχως τριβές σε οριζόντιο δάπεδο και συγκρούεται ελαστικά με άλλο σώμα μάζας M το οποίο είναι αρχικά ακίνητο και βρίσκεται προσδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχωμα.

(α) Τι θα πρέπει να ισχύει ώστε **μόλις** να συμβούν δύο συγκρούσεις μεταξύ των δύο σωμάτων; [Υπόδειξη: σκεφθείτε τι θα ίσχυε αν μετά τη σύγκρουση έφταναν στο σημείο να ακουμπήσει μόλις το ένα το άλλο.]

(β) Δεδομένου ότι η πρώτη μη μηδενική θετική λύση της υπερβατικής εξίσωσης $\tan(x) = x$ είναι η $x_0 = 4.494$, το συνημίτονο της οποίας έχει τιμή $\cos(x_0) = -0.217$, ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν οι μάζες ώστε να μην συμβεί διπλή σύγκρουση μεταξύ των δύο σωμάτων;

ΘΕΜΑ 3: Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται στο ελκτικό κεντρικό

πεδίο δυνάμεων: $F(r) = -\frac{L^2}{mr^3} - k(r - r_0)$, όπου L η στροφορμή του σωματιδίου και k

μια θετική σταθερά.

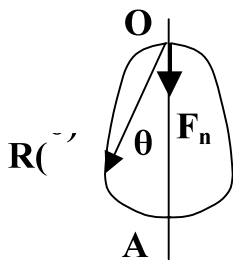
(α) Κατασκευάστε το ενεργό δυναμικό που αντιστοιχεί στο πεδίο αυτό και περιγράψτε ποιοτικά την τροχιά του σωματιδίου.

(β) Υπολογίστε τις αρχικές συνθήκες κίνησης ώστε η τροχιά να είναι κυκλική.

(γ) Αν επιλέξουμε τυχαίες αρχικές κινήσεις, πόσος χρόνος θα μεσολαβεί μεταξύ διαδοχικών επισκέψεων του σωματιδίου στο αψηλίο (μακρινότερη απόσταση από το ελκτικό κέντρο) αυτού;

(δ) Πιστεύετε ότι η τροχιά θα είναι κλειστή για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες;

ΘΕΜΑ 4: Θεωρήστε έναν πλανήτη μάζας M και σταθερής πυκνότητας ρ , ο οποίος είναι συμμετρικός γύρω από κάποιον άξονα OA και η επιφάνειά του οποίου είναι κυρτή.



(α) Αποδείξτε ότι το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε σώμα, μάζας m , που βρίσκεται στο σημείο O της επιφάνειας του πλανήτη κατά την διεύθυνση της καθέτου \vec{n} στην επιφάνεια στο σημείο O , είναι

$$F_n = 2\pi\rho Gm \int_0^{\pi/2} R(\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta,$$

όπου $R(\theta)$ είναι η πολική εξίσωση που περιγράφει την επιφάνεια του πλανήτη και θ η γωνία όπως μετράται από τον άξονα OA . Η πυκνότητα ρ και η συνάρτηση $R(\theta)$ είναι τέτοιες ώστε να

ικανοποιείται η σχέση $M = \frac{2}{3}\pi\rho \int_0^{\pi/2} R^3(\theta)\sin\theta d\theta$.

(β) Υπολογίστε την κάθετη δύναμη στην περίπτωση που $R(\theta) = A\sqrt{\cos\theta}$, όπου η σταθερά A είναι αυτή που απαιτείται ώστε η μάζα του πλανήτη να είναι M , συναρτήσει των M, m, ρ .

(γ) Υπολογίστε το λόγο της παραπάνω δύναμης προς αυτήν που θα ασκούσαν αν ο πλανήτης ήταν σφαιρικός με την ίδια μάζα και πυκνότητα.

Καλή σας επιτυχία