ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Τμήμα
Πέτρου Ιωάννου και Θεοχάρη Αποστολάτου

Ιανουάριος 2000

Απαντήστε σε 4 από τα 5 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1

α) Σε ένα σωματίδιο μάζας, m, του οποίου η θέση ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι $\vec{r}$ ασκείται η δύναμη

$$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t),$$

όπου $V(\vec{r})$ κάποιο δυναμικό, $\vec{B}$ κάποια συνάρτηση του χώρου και του χρόνου, και *q*, *c* σταθερές. Αποδείξτε ότι κατά τη κίνηση του σωματιδίου διατηρείται η ενέργεια:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r}),$$

όπου $v = |\dot{\vec{r}}|$.

β) Δύο σωματίδια μάζας m_1, m_2 αλληλεπιδρούν βαρυτικά: η δύναμη που ασκείται στο m_1 από το m_2 δίδεται από

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12},$$

όπου $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ η σχετική θέση των σωματιδίων και $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$ η μεταξύ τους απόσταση. Προσδιορίστε τη συνάρτηση δυναμικού $V(r_{12})$ από την οποία προκύπτει η δύναμη, έτσι ώστε $\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_1}V$, όπου $\vec{\nabla}_{\vec{r}_1}$ συμβολίζει τη βαθμίδα ως προς $\vec{r}_1$. Υπολογίστε το έργο για να μεταφερθούν τα δύο αυτά σωματίδια από το άπειρο σε σχετική απόσταση r_{12}. Η ποσότητα αυτή του έργου θεωρείται ότι αποθηκεύεται στο βαρυτικό πεδίο. Πόση ενέργεια θα έχει αποθηκευτεί στο βαρυτικό πεδίο όταν τα δύο σωματίδια συμπέσουν;

Θέμα 2

Ένα διατομικό μόριο αποτελείται από άτομα μάζας m_1 και m_2 συνδεδεμένα με γραμμικό ελατήριο σταθεράς k, και φυσικού μήκους L, έτσι ώστε η δύναμη που ασκείται στο άτομο μάζας m_1 να είναι $F = k(x_2 - x_1 - L)$, όπου x_1 θέση του ατόμου μάζας m_1 ως προς κάποιο σημείο αναφοράς και x_2 η θέση του ατόμου μάζας m_2. Το μόριο κινείται χωρίς τριβή πάνω σε μία ευθεία. Αρχικά το μόριο είναι ακίνητο και η σχετική απόσταση των ατόμων είναι L.

α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης.

β) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης που διέπουν (i) το κέντρο μάζας του μορίου και (ii) τη σχετική απόσταση μεταξύ των ατόμων $x = x_2 - x_1$. Ποια η συχνότητα ταλάντωσης του μορίου;

γ) Προσδιορίστε τη κίνηση των ατόμων αν ξαφνικά προσδώσουμε ταχύτητα v μόνο στο άτομο μάζας m_1.

δ) Περιγράψτε σε αυτήν την περίπτωση με σαφήνεια τη κίνηση του μορίου όταν $m_1 << m_2$ και όταν $m_2 << m_1$.

ε) Θεωρήστε ότι το πρώτο άτομο, που αρχικά ήταν ακίνητο, απέκτησε την ταχύτητα v μετά από ελαστική κρούση με άλλο άτομο ίδιας μάζας. Μετά την κρούση αυτή, έχετε ήδη υπολογίσει την κίνηση του μορίου. Η κρούση μεταξύ του αρχικά κινουμένου ατόμου και του μορίου θεωρείται ελαστική όταν η εσωτερική ενέργεια του μορίου (η ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας) είναι μηδενική. Δείξτε ότι η κρούση μεταξύ ατόμου και μορίου δεν μπορεί ποτέ να είναι ελαστική και το γεγονός αυτό είναι ανεξάρτητο της τιμής του k.

Θέμα 3

Ένας κομήτης κινείται ακτινικά προς το κέντρο ενός πλανήτη μάζας, M. Ο πλανήτης θεωρείται σημειακός και ακλόνητος και θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν άλλα ουράνια σώματα που επιδρούν στη κίνηση του κομήτη. Η θέση του κομήτη από το κέντρο του πλανήτη είναι r.

α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης του κομήτη.

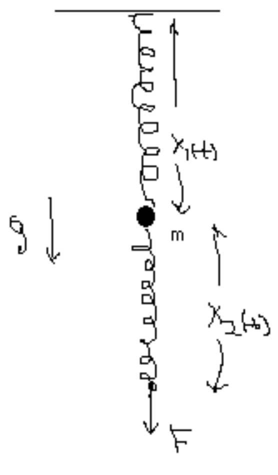
β) Προσδιορίστε τις σταθερές A και α ώστε η $r(t) = A(t_0 - t)^{\alpha}$ να είναι λύση της εξίσωσης κίνησης (η t_0 είναι μία άλλη σταθερά που θα προσδιορίσετε αργότερα).

γ) Αποδείξτε ότι η παραπάνω λύση μπορεί να θεωρηθεί λύση του προβλήματος με αρχική συνθήκη στο άπειρο παρελθόν ($t = -\infty$) ο κομήτης να ξεκίνησε την κίνησή του από το άπειρο με μηδενική ταχύτητα.

δ) Ασφαλείς παρατηρήσεις φοιτητών από το Παρατηρητήριο του Φυσικού Τμήματος δείχνουν ότι η θέση του κομήτη τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι r_0. Προσδιορίστε τη σταθερά t_0. Σε πόσο χρόνο από το χρόνο της παρατήρησης θα συγκρουσθεί ο κομήτης με τον πλανήτη (τον οποίο θεωρήσαμε σημειακό);

Θέμα 4

Μια μπάλα, μάζας m, είναι συνδεδεμένη στην οροφή με ένα ελατήριο αμελητέας μάζας, σταθεράς k, και μηδενικού φυσικού μήκους. Στο κάτω μέρος της μπάλας κρέμεται ένα άλλο πανομοιότυπο ελατήριο στο κάτω άκρο του οποίου ασκείται η κατακόρυφη δύναμη $F(t) = \alpha t$. Το σύστημα βρίσκεται στο σταθερό πεδίο βαρύτητας και η δύναμη $F(t)$ ασκείται στην ίδια διεύθυνση με τη βαρύτητα (βλ. σχήμα). Η απόσταση της μάζας από την οροφή την χρονική στιγμή t είναι $x_1(t)$, ενώ το μήκος του δεύτερου ελατηρίου είναι $x_2(t)$. Αρχικά, δηλαδή για $t = 0$, το σύστημα των ελατηρίων βρίσκεται σε ισορροπία, και στη συνέχεια υπό την επίδραση της δύναμης τα ελατήρια αρχίζουν να επιμηκύνονται. Αν το μήκος κάποιου ελατηρίου ξεπεράσει κάποια τιμή l (όπου $l > mg/k$), το ελατήριο σπάει. Ο σκοπός του προβλήματος είναι να προσδιορίσετε ποιο από τα δύο ελατήρια θα σπάσει πρώτο.



α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης που διέπουν τη μπάλα και το κατώτερο ελατήριο. Εάν ορίσετε τη μεταβλητή $x = x_1 - mg/k$ αποδείξτε ότι το x ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:

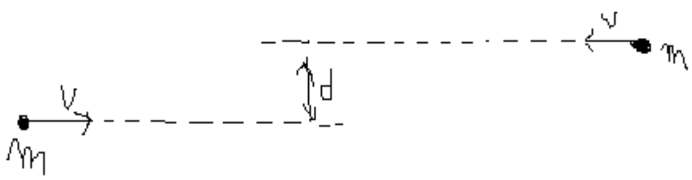
$$m\ddot{x} + kx = \alpha t.$$

β) Προσδιορίστε τα $x_1(t)$ και $x_2(t)$. (Υπόδειξη: η ειδική λύση είναι $\alpha t / k$).

γ) Σχεδιάστε τα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ συναρτήσει του χρόνου στις περιπτώσεις που το α είναι πολύ μικρό και το α είναι πολύ μεγάλο. Ποιο από τα ελατήρια θα σπάσει πρώτο στις δύο αυτές περιπτώσεις;

Θέμα 5

Δύο άστρα ίσης μάζας , m , βρίσκονται απομονωμένα από άλλα ουράνια σώματα και πλησιάζουν το ένα το άλλο μόνο υπό την επίδραση της βαρυτικής έλξης των. Αρχικά το ένα άστρο βρίσκεται στη θέση $x=-\infty$, $y=0$, $z=0$ και κινείται με ταχύτητα $\vec{v}=(v,0,0)$, ενώ το άλλο άστρο βρίσκεται στη θέση $x=\infty$, $y=d$, $z=0$ και κινείται με ταχύτητα $\vec{v}=(-v,0,0)$ (βλ. σχήμα).



α) Αποδείξτε ότι ανά πάσα στιγμή οι ταχύτητές τους θα είναι ίσες και αντίθετες.

β) Αποδείξτε ότι η ολική στροφορμή των δύο άστρων ως προς κάποιο σημείο αναφοράς είναι ανεξάρτητη από το σημείο αναφοράς. Αποδείξτε ότι η ολική στροφορμή διατηρείται και αποδείξτε ότι η κίνηση των άστρων θα παραμείνει στο επίπεδο $z=0$.

γ) Γράψτε τη συνολική ενέργεια των δύο άστρων αρχικά. Διατηρείται αυτή;

δ) Αποδείξτε ότι όταν τα άστρα βρίσκονται στην ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους, το διάνυσμα της σχετικής θέσης τους είναι κάθετο στα διανύσματα των ταχυτήτων τους. (Υπόδειξη: υπολογίστε το $\frac{dr_{12}}{dt}$, όπου r_{12} η σχετική απόσταση των σωμάτων.)

ε) Υπολογίστε την ελάχιστη απόσταση των άστρων. Ποια η ελάχιστη απόσταση όταν η ταχύτητα v είναι πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή;