ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι
Σεπτέμβριος 2004

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Θέμα 1 (25 μονάδες)

Ένα εκκρεμές μήκους l κρέμεται έτσι ώστε η σημειακή μάζα να βρίσκεται ακριβώς πάνω στην επιφάνεια της Γης όταν ισορροπεί. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη συχνότητα μικρών ταλαντώσεων αυτού του εκκρεμούς θεωρώντας ότι το l δεν είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα της Γης R. Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης θεωρείται γνωστή.

(α) Γράψτε την κινητική και τη δυναμική ενέργεια του εκκρεμούς όταν αυτό σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο και έχει γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$.

(β) Θεωρήστε μικρή τη γωνία θ του εκκρεμούς και αναπτύξτε τη δυναμική ενέργεια μέχρι όρους δεύτερης τάξης ως προς αυτή.

(γ) Από τη σύγκριση της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας του εκκρεμούς με την αντίστοιχη ενός αρμονικού ταλαντωτή υπολογίστε τη συχνότητα του εκκρεμούς.

(δ) Υπολογίστε το όριο αυτής της συχνότητας για $l/R \to 0$ και για $l/R \to \infty$. Ποια είναι η μικρότερη δυνατή συχνότητα που μπορεί να έχει ένα εκκρεμές;

Θέμα 2 (25 μονάδες)

(α) Δύο ίδιοι σφαιρικοί πλανήτες, αμελητέων διαστάσεων κινούνται στο διάστημα μακριά από άλλα βαρυτικά σώματα σε παράλληλες τροχιές με την ίδια ταχύτητα και προς την ίδια κατεύθυνση. Αν η αρχική απόσταση των πλανητών είναι d σε πόσο χρόνο θα συγκρουστούν;

(β) Αν οι δύο πλανήτες έχουν διαφορετικές μάζες m_1, m_2 και διαφορετικές **μη** παράλληλες ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ να υπολογιστεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας τους.

(γ) Τι τιμή πρέπει να έχει η στροφορμή στο σύστημα του κέντρου μάζας τους, ώστε να είναι δυνατόν να συγκρουστούν οι δύο πλανήτες; Στην περίπτωση αυτή περιγράψτε πώς κινούνται οι δύο πλανήτες στο σύστημα του κέντρου μάζας τους.

(δ) Αν συγκρουστούν σε πόσο χρόνο θα συγκρουστούν;

[Δίνονται τα ορισμένα ολοκληρώματα $\int_0^a dx \frac{1}{\sqrt{1/x - 1/a}} = \frac{\pi}{2} \alpha^{3/2}$ και

$\int_b^a dx \frac{1}{\sqrt{1/x - 1/a}} = \alpha^{3/2} \left[\cos^{-1} \sqrt{\frac{b}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{1 - \frac{b}{a}} \right]$ αν $b < a$].

Θέμα 3 (25 μονάδες)

Σε ένα περίεργο ηλιακό σύστημα η βαρυτική έλξη από τον Ήλιο σε έναν πλανήτη, στο τροχιακό επίπεδο, είναι παντού μηδενική εκτός από τις γωνιακές θέσεις $\theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$, από τις οποίες όταν περάσει ο πλανήτης υφίσταται μια στιγμιαία ώθηση με κατεύθυνση προς τον Ήλιο και μέτρου mu_0, όπου m η μάζα του πλανήτη και u_0 κάποια σταθερά με διαστάσεις ταχύτητας που σχετίζεται με το κεντρικό σώμα. Η μάζα του Ήλιου θεωρείται τόσο μεγάλη σε σχέση με τον πλανήτη, ώστε ο Ήλιος να θεωρείται ακλόνητος.

(α) Διατηρείται η στροφορμή ενός πλανήτη που κινείται υπό την επίδραση αυτής της δύναμης; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

συνεχίζεται…

(β) Ένας πλανήτης κινείται σε τετράγωνη τροχιά με κέντρο του τετραγώνου το κεντρικό σώμα. Ποια η ταχύτητα του πλανήτη και τι διεύθυνση έχουν οι πλευρές του τετραγώνου; Είναι καθορισμένο το μέγεθος της τροχιάς αυτής;
(γ) Δείξτε ότι η ταχύτητα διαφυγής για ένα σώμα που βρίσκεται αρχικά στη θέση (0,α) και κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα x είναι $\sqrt{2}\,u_0$. (Το κεντρικό σώμα βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και η γωνία θ μετριέται από τον άξονα x.)
(δ) Εξαρτάται η ταχύτητα διαφυγής από την κατεύθυνση κίνησης του σώματος; [Υπ: Κατασκευάστε το διανυσματικό διάγραμμα των ορμών σε κάθε «πέρασμα» του σώματος από τις πολικές γωνίες π/4,3π/4,5π/4,7π/4.]
(ε) Είναι αυτή η δύναμη συντηρητική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 4 (25 μονάδες)
(α) Στο εσωτερικό ενός σφαιρικού πλανήτη, αποτελούμενου από ρευστό σταθερής πυκνότητας, δημιουργείται ένας μικρός σβώλος με πυκνότητα το 1/4 της πυκνότητας του ρευστού του πλανήτη. Υπολογίστε την άνωση που θα δέχεται ο σβώλος αυτός, στηριζόμενος στην αρχή του Αρχιμήδη σύμφωνα με την οποία η άνωση σε ένα βυθισμένο σώμα είναι ίση με το βάρος που θα είχε ίσος όγκος ρευστού αν τοποθετούνταν στην ίδια θέση.
(β) Από την έκφραση για την άνωση σα συνάρτηση της ακτινικής θέσης του σβώλου μέσα στον πλανήτη υπολογίστε σε πόσο χρόνο θα φτάσει ο σβώλος στην επιφάνεια του πλανήτη, αν ξεκινήσει ακίνητος από τη θέση $R/2$, όπου R η ακτίνα του πλανήτη. Δίδονται το G, και η πυκνότητα του ρευστού ρ καθώς και ότι $\cosh^{-1} 2 = \ln(2+\sqrt{3}) = 1.317$.

Απαντήστε και στα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

(α) Η δυναμική ενέργεια στην τυχαία θέση του εκκρεμούς που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο, είναι

$$V(\theta) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{\sqrt{(R+l)^2 + l^2 - 2(R+l)l\cos\theta}}$$

ενώ η κινητική του ενέργεια είναι $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$. Το άθροισμα των δύο αυτών ενεργειών διατηρείται.

(β) Για μικρές γωνίες θ η δυναμική ενέργεια είναι

$$V(\theta) \cong -\frac{GMm}{\sqrt{(R+l)^2 + l^2 - 2(R+l)l(1-\theta^2/2)}} = -\frac{GMm}{\sqrt{(R+l-l)^2 + (R+l)l\theta^2}} \cong$$

$$-\frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{(R+l)l}{2R^2}\theta^2\right) = -mgR\left(1 - \frac{(R+l)l}{2R^2}\theta^2\right)$$

(γ) Αν αγνοήσει κανείς τη σταθερή ποσότητα –mgR στη δυναμική ενέργεια η οποία δεν έχει κάποια φυσική σημασία η ολική ενέργεια του εκκρεμούς είναι

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mg\frac{l(R+l)}{R}\theta^2$$

Μια απλή σύγκριση με την ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ δείχνει ότι η συχνότητα του εκκρεμούς είναι $\omega = \sqrt{\frac{mgl(l+R)/R}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{l}{R}\right)}$.

(δ) Όταν $l/R \to 0$ η συχνότητα τείνει σε αυτήν ενός κοινού εκκρεμούς $\sqrt{g/l}$ ενώ για $l/R \to \infty$ τείνει στο $\sqrt{g/R}$.

ΘΕΜΑ 2

(α) Στο σύστημα του ΚΜ οι δύο πλανήτες είναι αρχικά ακίνητοι. Επομένως ζητούμε τον χρόνο δύο ακίνητοι πλανήτες σε απόσταση d να συγκρουστούν κινούμενοι εξαιτίας της βαρυτικής τους έλξης. Λόγω συμμετρίας του προβλήματος και οι δύο θα κινούνται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο οπότε

$$m\ddot{x} = \frac{Gm^2}{(2x)^2} \Rightarrow u\frac{du}{dx} = \frac{Gm}{4x^2} \Rightarrow d\left(\frac{u^2}{2}\right) = d\left(-\frac{Gm}{4x}\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u = -\sqrt{\frac{Gm}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d/2}\right)} \Rightarrow$$

$$t_{o\lambda} = -\int_{d/2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{Gm}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d/2}\right)}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{Gm}}\left(\frac{d}{2}\right)^{3/2} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{d^3}{Gm}}$$

(β) Το ΚΜ κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_{KM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$.

(γ) Αν η στροφορμή στο ΚΜ δεν είναι μηδενική αυτό σημαίνει ότι οι δύο πλανήτες θα διαγράφουν ίδιες κωνικές τομές ως προς αυτό. Για να συγκρουστούν θα πρέπει η στροφορμή να είναι μηδέν. Και πάλι όμως χρειάζεται άλλη μια συνθήκη: η ενέργεια στο σύστημα ΚΜ να είναι αρνητική. Δηλαδή:

(1) $\mathbf{0} = m_1\vec{r}_1\times\vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2\times\vec{v}_2 = m_1\vec{r}_1\times(\vec{v}_1-\vec{v}_2) \Rightarrow \vec{d}\times(\vec{v}_1-\vec{v}_2)=\mathbf{0}$. Η σχετική ταχύτητα θα πρέπει να έχει τη διεύθυνση που συνδέει τους δύο πλανήτες.

(2) $$\mathbf{0} > \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1-\vec{v}_{KM})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2-\vec{v}_{KM})^2 - \frac{Gm_1m_2}{d} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2 - \frac{Gm_1m_2}{d}$$

(δ) Εκμεταλλευόμενοι τη διατήρηση της ενέργειας στο σύστημα του ΚΜ μπορούμε να βρούμε το χρόνο σύγκρουσης. Συγκεκριμένα

$$\ddot{x} = \frac{G(m_1+m_2)}{x^2} \Rightarrow u\frac{du}{dx} = \frac{GM}{x^2} \Rightarrow d\left(\frac{u^2}{2}\right) = d\left(-\frac{GM}{x}\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u = -\sqrt{u_0^2 - 2GM\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{d}\right)} \Rightarrow$$

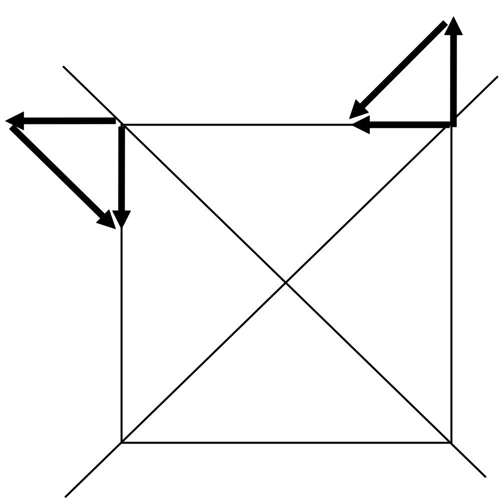
$$t_{ολ} = -\int_d^0 \frac{dx}{\sqrt{u_0^2 - 2GM\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{d/2}\right)}}$$

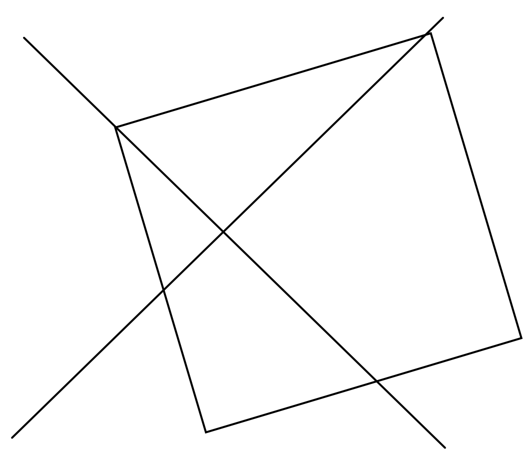
όπου $M=m_1+m_2$, $u = |\vec{v}_1-\vec{v}_2|$ και u_0 η αρχική σχετική ταχύτητα. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται από τον δοσμένο γενικό τύπο. Τα παραπάνω αναφέρονται στην περίπτωση που αρχικά τα δύο σώματα πλησίαζαν το ένα το άλλο, οπότε η ταχύτητα δίνεται από το αρνητικό πρόσημο. Αν αρχικά τα σώματα απομακρύνονταν το ένα από το άλλο το αποτέλεσμα θα δινόταν από δύο τέτοια ολοκληρώματα, ένα από d μέχρι εκείνη την απόσταση που θα μηδενιζόταν η ταχύτητα που δεν είναι άλλη από τη ρίζα μηδενισμού της υπόρριζης ποσότητας αλλά με σύν πρόσημο λόγω θετικής ταχύτητας, και ένα από αυτή την απόσταση μέχρι το μηδέν.

ΘΕΜΑ 3

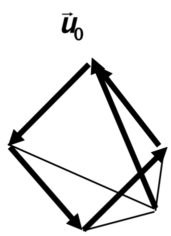
(α) Η δύναμη είναι κεντρική αφού η ώθησή της κατευθύνεται προς το κέντρο και επομένως η στροφορμή διατηρείται.

(β) Ενόσω ο πλανήτης δεν περνά από τις επίμαχες γωνίες κινείται ομαλά και ευθύγραμμα. Επομένως θέλουμε όταν διασχίσει τις γωνίες αυτές εξαιτίας της ώθησης που θα δεχθεί να στρίψει το διάνυσμα της ορμής του κατά π/2. Με απλή γεωμετρία είναι εύκολο να δούμε ότι αυτό μπορεί να επιτευχθεί (βλ. σχήμα αριστερά) μόνο αν η τετράγωνη τροχιά του είναι κεντραρισμένη στην αρχή των αξόνων, οι πλευρές του τετραγώνου παράλληλες με τους άξονες x,y και η ταχύτητα κίνησης επί της τροχιάς $u_0/\sqrt{2}$. Σε αντίθετη περίπτωση δεν είναι δυνατόν ούτε καν να κατασκευαστεί τετράγωνο (βλ. σχήμα δεξιά).

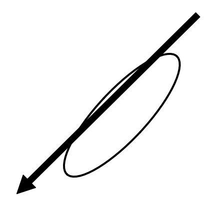




Το μέγεθος της τροχιάς ωστόσο δεν καθορίζεται αφού αρκεί η κίνηση με την ανωτέρω ταχύτητα παράλληλα σε κάποιον από τους άξονες x,y για να σχηματιστεί η εν λόγω τετράγωνη τροχιά.
(γ) Η ταχύτητα διαφυγής είναι τέτοια ώστε όταν περάσει από τη γωνία π/4 να στρίψει έτσι ώστε να κινηθεί στη συνέχεια παράλληλα με τη γωνία 3π/4 και επομένως να καταλήξει στο άπειρο χωρίς να υποστεί άλλη μεταβολή. Επομένως η αρχική ορμή η τελική ορμή και η ώθηση πρέπει να σχηματίζουν ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο. Η αρχική ορμή (υποτείνουσα) πρέπει λοιπόν να είναι $\sqrt{2}$ φορές μεγαλύτερη από την ώθηση. Το γιατί μικρότερη από αυτή την ταχύτητα οδηγεί σε κλειστές τροχιές θα φανεί από την ακόλουθη ανάλυση.
(δ) Ας κατασκευάσουμε το διάγραμμα των ορμών κάθε φορά που το σώμα διασχίζει μια από τις επίμαχες διευθύνσεις. Η αρχική ορμή είναι το ασύμμετρο διάνυσμα, τα ανύσματα που σχηματίζουν τετράγωνο είναι οι ωθήσεις και οι άλλες τρεις γραμμές παριστάνουν τις διευθύνσεις κίνησης μετά από κάθε μεταβολή ορμής. Είναι εύκολο να δει κανείς πως προκειμένου να ολοκληρωθεί μια κλειστή τροχιά θα πρέπει η αρχή του ανύσματος της αρχικής ορμής να βρίσκεται εντός του τετραγώνου των ωθήσεων. Για παράδειγμα η διεύθυνση κίνησης στο σχήμα μετά την πρώτη μεταβολή της ορμής είναι τέτοια ώστε ποτέ ο πλανήτης δεν θα διασχίσει την επόμενη επίμαχη διεύθυνση 3π/4. Η κλειστότητα της τροχιάς στην πρώτη περίπτωση μπορεί να δειχθεί με γεωμετρικά επιχειρήματα. Έτσι η ταχύτητα διαφυγής, η αρχική ταχύτητα που έχει ως αρχή κάποιο σημείο του τετραγώνου, έχει διαφορετικό μέτρο για κάθε αρχική διεύθυνση.



(ε) Αν και η συμβολή όλων των ωθήσεων είναι μηδενική και επομένως σε κλειστές τροχιές που περικλείουν την αρχή των αξόνων το έργο των ωθήσεων είναι μηδενικό το πεδίο των δυνάμεων δεν είναι συντηρητικό αφού αν διαγράψω μια κλειστή τροχιά που διαπερνά μια επίμαχη διεύθυνση δύο φορές όπως στο σχήμα θα κερδίζω συνεχώς ενέργεια.



ΘΕΜΑ 4
(α) Η ένταση της βαρύτητας στο εσωτερικό ενός ομογενούς πλανήτη είναι

$$g(r) = \frac{GM}{R^3}\frac{r^3}{r^2} = \frac{GM}{R^3} r .$$

Έτσι η συνολική δύναμη που θα δέχεται ο σβώλος είναι

$$\vec{F} = -m_{\sigma\beta}\, g\hat{r} + \rho_{\pi\lambda} V g\hat{r} = \left(-\rho/4 + \rho\right) V \frac{4}{3}\pi\rho G\vec{r} = G\pi\rho^2 V\vec{r} .$$

Η άνωση αποτελεί τον δεύτερο όρο σε αυτή τη δύναμη.
(β) Η εξίσωση της κίνησης είναι

$m\ddot{r} = G\pi\rho^2 V r \Rightarrow \ddot{r} = \dfrac{G\pi\rho^2 V}{\rho V} r = G\pi\rho r$. Πρόκειται για εξίσωση αντιταλαντωτή (προσέξτε το πρόσημο) με λύση $r = \dfrac{R}{2}\cosh\left(\sqrt{G\pi\rho}\, t\right)$. Από το δεδομένο της άσκησης χρειάζεται χρόνος $t = 1317/\sqrt{G\pi\rho}$ προκειμένου η ακτίνα να διπλασιαστεί.