ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

6 Σεπτεμβρίου 2005

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 4 Θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α (25 μονάδες)

1. Γράψτε το ενεργό δυναμικό για ένα κεντρικό πεδίο που διέπεται από δυναμικό της μορφής $V(r) = -k/r^{1+\alpha}$.

2. Υπολογίστε τη συχνότητα της κυκλικής κίνησης, ακτίνας r_0, ενός σωματιδίου σε ένα τέτοιο δυναμικό. Υπολογίστε ακόμη τη στροφορμή του σωματιδίου στην τροχιά αυτή.

3. Αναπτύσσοντας το ενεργό δυναμικό γύρω από την ακτίνα r_0 και κρατώντας την ίδια τιμή της στροφορμής του σωματιδίου υπολογίστε τη συχνότητα μικρών ακτινικών ταλαντώσεων του σωματιδίου.

4. Για ποιές τιμές της παραμέτρου α οι δύο συχνότητες των ερωτημάτων (2) και (3) έχουν ρητό λόγο; Εξηγήστε ποια είναι η συνέπεια ενός τέτοιου αποτελέσματος στο σχήμα της τροχιάς.

ΘΕΜΑ Β (25 μονάδες) Δύο αστεροειδείς περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο σε κλειστές τροχιές που διαγράφονται στο ίδιο επίπεδο. Κάποια στιγμή και οι δύο αστεροειδείς βρίσκονται σε ίδια απόσταση, R_0, από τον Ήλιο και οι αντίστοιχες επιβατικές ακτίνες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία ϕ. Τη στιγμή αυτή οι ταχύτητες των δύο αστεροειδών είναι και οι δύο $\sqrt{\kappa G M_\odot / R_0}$ και είναι κάθετες στις αντίστοιχες επιβατικές ακτίνες. ($M_\odot$ είναι η μάζα του Ήλιου και κ κάποιος πραγματικός θετικός αριθμός.)

1. Τι τροχιά διαγράφει ο καθένας από τους δύο αστεροειδείς ως συνάρτηση της τιμής της παραμέτρου κ; Εξαρτάται το σχήμα της τροχιάς από τη μάζα του κάθε αστεροειδή; (Θεωρήστε ότι **η μοναδική** δύναμη που ασκείται στους αστεροειδείς είναι η βαρυτική έλξη του Ήλιου ενώ η μεταξύ τους έλξη καθώς και η έλξη από τους άλλους πλανήτες θεωρείται αμελητέα.)

2. Σχεδιάστε ποιοτικά την εξέλιξη της απόστασης μεταξύ των αστεροειδών ως συνάρτηση του χρόνου δείχνοντας με ένα σχήμα σε ποιες θέσεις της τροχιάς τους βρίσκονται οι αστεροειδείς στο μέγιστο και στο ελάχιστο της μεταξύ τους απόστασης.

3. Υπολογίστε το λόγο της μέγιστης προς την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των αστεροειδών ως συνάρτηση της τιμής της παραμέτρου κ.

4. Εξηγήστε γιατί οι ακραίες τιμές της κ είναι αυτές που βρήκατε, γιατί στις τιμές αυτές ο λόγος των αποστάσεων τείνει στο άπειρο και γιατί όταν η κ είναι μονάδα ο λόγος παίρνει την ελάχιστη τιμή του. Ποια είναι αυτή;

ΘΕΜΑ Γ (25 μονάδες) Δύο γραμμικοί αρμονικοί ταλαντωτές μπορούν να κινούνται επί της ίδιας ευθείας δίχως τριβές έχοντας **κοινό** κέντρο ταλάντωσης. Οι δύο ταλαντωτές έχουν μάζες m_1, m_2 και σταθερές ελατηρίων k_1, k_2 αντίστοιχα, διαφορετικές μεταξύ τους αλλά με κοινό λόγο $k_1/m_1 = k_2/m_2$. Αρχικά ο αριστερός ταλαντωτής (ο 2) βρίσκεται ακίνητος στη θέση ισορροπίας του, ενώ ο δεξιός ταλαντωτής (ο 1) αφήνεται ακίνητος από τη θέση A_0.

1. Εξηγήστε γιατί οι ταλαντωτές θα συνατιούνται και θα συγκρούονται πάντα στο κοινό σημείο ισορροπίας τους. (Η σύγκρουση θεωρείται ελαστική.)

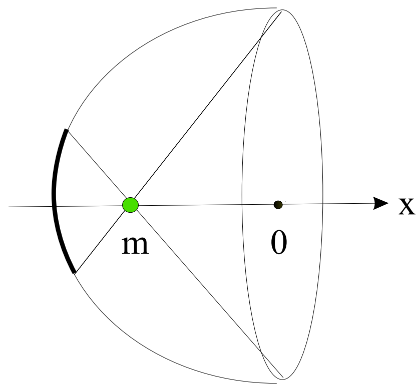
2. Υπολογίστε τα πλάτη της ταλάντωσής τους μετά την πρώτη ελαστική κρούση.

3. Υπολογίστε τα πλάτη της ταλάντωσής τους μετά και τη δεύτερη κρούση. Εξηγήστε από μαθηματικής άποψης γιατί τα πλάτη αυτά είναι ίδια με τα αρχικά (A_0 και 0 αντίστοιχα). [Υποδ: Τι είδους σύστημα εξισώσεων λύνει κανείς για να υπολογίσει τις ταχύτητες μετά από κάθε κρούση ;]

4. Σχεδιάστε τα διαγράμματα φάσης των δύο ταλαντωτών.

5. Ο αριστερός ταλαντωτής, και γενικά το διάστημα αριστερά από το σημείο ισορροπίας, είναι κρυμμένος πίσω από ένα πέτασμα. Για ποιούς λόγους μαζών αυτό που βλέπουμε δεν μπορούμε να το ξεχωρίσουμε από την κίνηση ενός μόνο απλού αρμονικού ταλαντωτή του οποίου δεν φαίνεται το αριστερό μέρος ;

6. Αν οι δύο ταλαντωτές έχουν απόσβεση με κοινό συντελεστή απόσβεσης $\gamma_1 = \gamma_2$ θα εξακολουθήσουμε (στην περίπτωση που ισχύει το ερώτημα (5)) να νομίζουμε πως παρακολουθούμε το ήμισυ της ταλάντωσης ενός απλού αποσβυνόμενου ταλαντωτή ;



ΘΕΜΑ Δ (25 μονάδες)

1. Υπολογίστε το δυναμικό $V(x)$ κατά μήκος του άξονα συμμετρίας ενός ημισφαιρικού φλοιού συνολικής μάζας M και ακτίνας R, ως συνάρτηση της απόστασης x από το κέντρο της σφαίρας.

2. Στη συνέχεια υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται από το φλοιό σε μια σημειακή μάζα m. Ποιά η τιμή του ορίου αυτής της δύναμης όταν η σημειακή μάζα πλησιάζει την επιφάνεια του φλοιού ;

3. Με γεωμετρικά επιχειρήματα δείξτε ότι η βαρυτική δύναμη που ασκείται στην m, όταν αυτή βρίσκεται στο εσωτερικό του φλοιού, οφείλεται μόνο στην πλησιέστερη μάζα του ημισφαιρίου (παχιά γραμμή στο σχήμα), που περικλείεται στον κώνο που αποκόπτουν οι χορδές οι οποίες διέρχονται από την περιφέρεια του ημισφαιρίου και από τη θέση της m.

4. Δείξτε ότι στο όριο που η m προσεγγίζει το φλοιό, απομένει να ασκεί βαρυτική έλξη μόνο ο απειροστός, σχεδόν επίπεδος κυκλικός δίσκος, ο οποίος έχει ακτίνα όση και η σχεδόν μηδενική απόσταση της m από το φλοιό.

5. Υπολογίστε το δυναμικό από έναν επίπεδο κυκλικό δίσκο σταθερής επιφανειακής πυκνότητας κατά μήκος του άξονα αυτού και σε απόσταση τόση όση και η ακτίνα του κύκλου και στη συνέχεια υπολογίστε την αντίστοιχη δύναμη σε μια μάζα m. Δείξτε ότι στο όριο της μηδενικής απόστασης παίρνετε ακριβώς το αποτέλεσμα του ερωτήματος (3).

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α :

1. $V_{eff} = -\frac{k}{r^{1+a}} + \frac{L^2}{2mr^2}$
2. Από $V'_{eff}(r_0) = 0$ και $L = m\omega r_0^2$ βρίσκουμε
$$L = \sqrt{mk(1+a)r_0^{1-a}}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k(1+a)}{mr_0^{3+a}}}$$
3. Αναπτύσσοντας μέχρι 2η τάξη αφού η πρώτη παράγωγος είναι 0 παίρνουμε
$$V_{eff}(r \simeq r_0) = V_{eff}(r_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{3L^2}{mr_0^4} - \frac{(2+a)(1+a)k}{r_0^{3+a}}\right)(r-r_0)^2 + \mathcal{O}(r-r_0)^3$$
Αντικαθιστώντας την τιμή της L
$$V_{eff}(r \simeq r_0) = V_{eff}(r_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{(1-a^2)k}{r_0^{3+a}}\right)(r-r_0)^2 + \mathcal{O}(r-r_0)^3$$
Ο συντελεστής σκληρότητας του αρμονικού ταλαντωτή είναι λοιπόν $\frac{(1-a^2)k}{r_0^{3+a}}$ και συνεπώς η συχνότητα ακτινικών ταλαντώσεων είναι
$$\omega_r = \sqrt{\frac{(1-a^2)k}{mr_0^{3+a}}}$$
4. Ο λόγος των δύο συχνοτήτων είναι $\sqrt{1/(1-a)}$. Όταν αυτός ο λόγος είναι ρητός (π.χ. για $a = 0, -3, 1-1/\sqrt{2}$, κλπ.) η τροχιά είναι κλειστή.

ΘΕΜΑ Β :

1. Και οι δύο διαγράφουν έλλλειψη και μάλιστα ίδιου σχήματος. Για να είναι κλειστή η τροχιά θα πρέπει $\kappa < \sqrt{2}$ (v_0=ταχύτητα διαφυγής). Η μάζα του αστεροειδή δεν παίζει κανένα ρόλο. Οι 2 ίδιες ελλείψεις σχηματίζουν γωνία ϕ (οι μεγάλοι τους ημιάξονες).

2. Αφού θα κινούνται επί ίδιων ελλειπτικών τροχιών κάθε στιγμή θα σχηματίζουν (με τον Ήλιο) ένα ισοσκελές τρίγωνο γωνίας ϕ και πλευράς όση η επιβατική ακτίνα του καθενός.
$$d(t) = 2r(t)\sin(\phi/2)$$
Αφού η $r(t)$ ακολουθεί μια ταλαντωτική κίνηση με ελάχιστο στο περιήλιο και μέγιστο στο αφήλιο αντίστοιχη ταλάντωση θα εκτελεί και η απόσταση των αστεροειδών.

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι ο λόγος αφηλίου : περιήλιο. Για να τον υπολογίσουμε χρησιμοποιούμε διατήρηση ενέργειας και στροφορμής για τις δύο αυτές θέσεις (επειδή δεν γνωρίζουμε αν η αρχική θέση είναι περιήλιο ή αφήλιο -επιβατική θέση κάθετη στην ακτίνα- τις δύο θέσεις άσχετα τι είναι η καθεμία τις ονομάζουμε v_0, V).
$$v_0 r_0 = VR\ ,\ v_0^2/2 - GM/r_0 = V^2/2 - GM/R$$
Λύνοντας βρίσκουμε
$$\frac{r_0}{R} = \frac{2GM/r_0}{v_0^2} - 1 = \frac{2}{\kappa} - 1$$
Έτσι αν $\kappa > 1$ ο λόγος είναι μικρότερος του 1 (r_0 = περιήλιο) ενώ αν $\kappa < 1$ ο λόγος είναι μεγαλύτερος του 1 (r_0 = αφήλιο). Συνεπώς ο λόγος μέγιστης προς ελάχιστη απόσταση αστεροειδών είναι $\frac{2}{\kappa} - 1$ αν $\kappa < 1$ και $\frac{\kappa}{2-\kappa}$ αν $\kappa > 1$.

4. Ο παραπάνω λόγοι απειρίζονται για $\kappa = 2$ $\kappa = 0$. Στην 1η περίπτωση η τροχιά μετατρέπεται σε παραβολή οπότε δεν κλείνει και οι αστεροειδείς συνεχώς απομακρύνονται και στη 2η περίπτωση οι αστεροειδείς πέφτουν ακτινικά στον ΄Ηλιο οπότε πλησιάζουν συνεχώς μεταξύ τους μέχρι να συγκρουστούν. Για $\kappa = 1$ οι τροχιές είναι κυκλικές και οι αστεροειδείς κρατούν σταθερή απόσταση ο ένας από τον άλλο.

ΘΕΜΑ Γ :

1. Αφού οι 2 συχνότητες είναι ίδιες θα είναι ίδιες και οι περίοδοι και οι ημιπερίοδοι. Αν συγκρουστούν λοιπόν αρχικά στο σημείο ισορροπίας τους ότι ταχύτητα και αν έχουν μετά (θετική ή αρνητική) θα ξανακαταλήξουν στο ίδιο σημείο μετά από μια ημιπερίοδο.

2. Από διατήρηση ενέργειας και ορμής

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ m_1 v_1^2 &= m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \end{aligned} \tag{1}$$

   βρίσκουμε

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \ , \ v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

   Μετά τη σύγκρουση θα έχουμε

$$A_1' = v_1'/\omega = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} A_0 \ , \ A_2' = v_2'/\omega = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} A_0$$

3. Αφού οι ίδιες εξισώσεις ισχύουν και για τις διστονες ταχύτητες (μετά τη δεύτερη κρούση) και το σύστημα είναι δευτέ ρου βαθμού θα έχει το πολύ δύο σετ λύσεων, αυτές που βρήκαμε προηγουμένως και τις αρχικές ταχύτητες επομένως και τα αρχικά πλάτη.

4. Τα διαγράμματα φάσης είναι ημικύκλια (ή ημιέλλειψη εξαρτάται από την κλίμακα των αξόνων) για τον κάθε ταλαντωτή για την κάθε ημιπερίοδο. Αν $m_1 > m_2$ ο πρώτος ταλαντωτής διαγράφει ένα ημικύκλιο δεξιά και ένα μικρότερο αριστερά. Αν $m_1 < m_2$ ο πρώτος ταλαντωτής διαγράφει ένα ημικύκλιο δεξιά και ένα μικρότερο πάλι δεξιά. Και στις 2 περιπτώσεις ο δεύτερος ταλαντωτής διαγράφει πάντα ένα αριστερο ημικύκλιο έρχεται στο σημείο ισορροπίας (κέντρο) και περιμένει εκεί μέχρι να τον ξαναχτυπήσει ο 1 μετά από μια ημιπερίοδο για να ξαναγράψει το ίδιο ημικύκλιο.

5. ΄Οπως είπαμε για $m_1 > m_2$ ο 1 ταλαντωτής περνά τη μισή περίοδο πίσω από το πέτασμα οπότε φαίνεται η δεξιά πλευρά της ταλάντωσης η οποία δεν διαφέρει από το μισό μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης.

6. Οι συχνότητες θα αλλάξουν αλλά θα είναι πάλι ίσες μεταξύ τους, οπότε πάλι για την ίδια σχέση μαζών θα παρακολουθούμε το μισό μιας απλής αποσβυνόμενης αρμονικής ταλάντωσης.

ΘΕΜΑ Γ :

1.

$$V(x) = -\int \frac{G\sigma dS}{r} = -\frac{GM}{2\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \frac{2\pi R \sin\theta R d\theta}{\sqrt{R^2 + x^2 + 2Rx\cos\theta}}$$

   όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα μάζας, και θ η γωνία που σχηματίζει η επιβατική ακτίνα του κάθε δακτυλίου με τον αρνητικό άξονα των x. Μετά από πράξεις καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$V(x) = -\frac{GM}{Rx} \left[R + x - \sqrt{R^2 + x^2} \right]$$

   η οποία είναι σωστή και για $x > 0$ και για $x < 0$.

2.
$$F(x) = -m\frac{dV}{dx} = -\frac{GM}{R}\left[\frac{R}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{\sqrt{R^2+x^2}}{x^2}\right]$$

Στο όριο $x \to -R$, $F(x=-R) = -\frac{GM}{R^2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. Βλ. σημειώσεις θεωρίας. Οι επιφάνειες του ημισφαιρίου εκτός των δύο κώνων που σχηματίζονται ασκούν μηδενικές συνολικά βαρυτικές δυνάμεις. Απομένει μόνο η παχιά επιφάνεια να ασκεί έλξη.

4. Όταν η σημειακή μάζα πλησιάζει τη σφαιρική επιφάνεια οι χορδές τείνουν να σχηματίσουν γωνία 45^o. Οπότε η έλξη οφείλεται σε ένα απειροστό δίσκο ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση όση η ακτίνα του.

5. Από δίσκο ακτίνας R και σε απόσταση x από το κέντρο του

$$V(x) = -\int_0^R \frac{G\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = -G\sigma 2\pi\left(\sqrt{R^2+x^2} - |x|\right).$$

Έτσι η δύναμη που ασκεί ένας τέτοιος δίσκος στο όριο που γίνεται μικροσκοπικός και αντιστοίχως έρχεται απείρως κοντά είναι

$$F = G\sigma 2\pi\left(\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} - 1\right) \to G\sigma 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$$

Αν αντικαταστήσει κανείς την πυκνότητα $\sigma = M/2\pi R^2$ της σαφίρας καταλήγει στο αποτέλεσμα του (2) ερωτήματος.