ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι
25 Μαϊου 2004

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 4 θέματα με συντομία και σαφήνεια. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις θεμάτων εκτιμώνται Ιδιαίτερα.

Θέμα 1 (25 μονάδες)

Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις σύντομα.

(α) Δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν με δυνάμεις που ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Δείξτε ότι η συνολική ορμή και στροφορμή των σωματιδίων ως προς οποιοδήποτε σημείο αναφοράς διατηρούνται κατά την κίνηση.

(β) Ποιά δύναμη επιβάλλει το δυναμικό $V = -\vec{a} \cdot \vec{x}$ σε σωματίδιο που βρίσκεται στη θέση $\vec{x}$; ($\vec{a}$ =σταθ)

(γ) Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται σε δύο σωματίδια που κινούνται στην ευθεία και αλληλεπιδρούν με δυναμικό $V = x_1 - x_2$, όταν οι θέσεις των σωματιδίων είναι $x_1 > x_2$ και όταν $x_1 < x_2$. Πιστεύετε ότι ένα τέτοιο δυναμικό θα περιέγραφε την αλληλεπίδραση δύο σωματιδίων;

(δ) Ο πλανήτης Ποσειδών είναι περίπου 30 φορές μακρύτερα από τον Ηλιο από ότι η Γη. Εκτιμήστε κατά προσέγγιση πόσο διαρκεί ένα έτος στον πλανήτη αυτό.

(ε) Δύο σωματίδια μάζας 1 kg και 3 kg είναι συνδεδεμένα με ελατήριο σταθεράς 3 Nt/m. Σε τι συχνότητα παρουσιάζεται συντονισμός;

(στ) Ο ταλαντωτής $\ddot{x} + x = F\cos\omega t$ $\omega \neq 1$ αρχικά είχε $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Προσδιορίστε το $x(t)$.

(ζ)Προσδιορίστε το όριο της λύσης του (στ) στο όριο $\omega \to 1$. Σχεδιάστε την οριακή αυτή λύση.

(θ)Ο ταλαντωτής $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$ χάνει ενέργεια. Αν κάποια στιγμή παρατηρηθεί ότι η μοναδιαία μάζα του έχει ταχύτητα 1 m/s, ποίος ο ρυθμός μείωσης της ενέργειάς του τη στιγμή αυτή;

(ι) Ένας κομήτης έρχεται από το υπερπέραν. Υπάρχει περίπτωση να εκλωβισθεί στο ηλιακό μας σύστημα;

Θέμα 2 (25 μονάδες)

Σε ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας ασκείται η δύναμη $\vec{F} = \vec{a} + \dot{\vec{r}} \times \vec{b}$, όπου $\vec{a}, \vec{b}$ σταθερά διανύσματα που είναι κάθετα το ένα στο άλλο, $\vec{r}$ η θέση του σωματιδίου και $\dot{\vec{r}}$ η ταχύτητά του.

(α) Δείξτε ότι κατα τη κίνηση του σωματιδίου η προβολή της ταχύτητάς του στη διεύθυνση του $\vec{b}$ είναι σταθερά, καθώς και η ποσότητα $\dfrac{|\dot{\vec{r}}|^2}{2} - \vec{a} \cdot \vec{r}$.

(β) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης στη περίπτωση $\vec{a} = (E,0,0)$ και $\vec{b} = (0,0,B)$. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\vec{r}(0) = (0,0,0)$ με ταχύτητα $\dot{\vec{r}}(0) = (0,-E/B,0)$ προσδιορίστε τις τιμές όλων των ανωτέρων χρονικών παραγώγων $d^n\vec{r}/dt^n$ στο χρόνο $t = 0$ για $n = 2,3,\ldots$

(γ) Με τη βοήθεια της (β) ή άλλως προσδιορίστε τη τροχιά του σωματιδίου $\vec{r}(t)$ για τις παραπάνω αρχικές συνθήκες.. Σχεδιάστε την κίνηση, τα $\vec{a}, \vec{b}$ και τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο.

.Θέμα 3 (25 μονάδες)

¨Ενα απλό εκκρεμές αποτελείται απο μία σημειακή μάζα m που κρέμεται από σταθερό σημείο με μία αβαρή ράβδο μήκους l. Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με τη προς τα κάτω κατακόρυφο διεύθυνση. Το εκκρεμές εκτελεί κινήσεις σε ένα κατακόρυφο επίπεδο μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας. Υποθέστε ότι αρχικά το εκκρεμές ήταν ακίνητο στη $\theta = \alpha$.

(α) Δείξτε ότι κατά τη κίνηση του εκκρεμούς διατηρείται η ακόλουθη ποσότητα:

$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = E$, όπου η σταθερά E πρέπει να προσδιορισθεί συναρτήσει των m, g, l, α (η g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας).

(β) Εξηγήστε πολύ σύντομα γιατί η κίνηση είναι περιοδική και δείξτε ότι η περίοδος είναι

$$T = 4\left(\frac{l}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

(γ) Για μικρές γωνίες α αναπτύσσοντας τα συνημίτονα σε 4η τάξη ως προς α δείξτε ότι η περίοδος σε δεύτερη τάξη ως προς α είναι: $T = 2\pi\left(l/g\right)^{1/2}\left[1 + A\alpha^2\right]$, και προσδιορίστε τη θετική σταθερά A. Αν η γωνία είναι $\alpha = \frac{\pi}{2}$ πόσο τοις εκατό αλλάζει η περίοδος του εκκρεμούς από την περίοδο της αρμονικής ταλάντωσης;; [Υπ. Θα σας φανεί χρήσιμη στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων η αντικατάσταση $\theta = a\sin\psi$ και η ταυτότητα $\sin^2\psi = (1-\cos 2\psi)/2$]

Θέμα 4 (25 μονάδες)

Ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινείται υπό την επίδραση μίας δύναμης μέτρου $F(r)$ με διεύθυνση προς ένα σταθερό σημείο Ο, και r είναι η απόσταση του σωματιδίου από το Ο.

(α) Υποθέτοντας ότι $V' = -F(r)$, όπου $V' \equiv dV/dr$, και ότι $V \to 0$ καθώς $r \to \infty$ σχεδιάστε το δυναμικό και δείξτε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = E - V(r) - (h^2/(2r^2)),$$

όπου h, E είναι αντίστοιχα η στροφορμή του και η συνολική του ενέργεια. [Η ταχύτητα σε πολικές συ-ντεταγμένες είναι $\dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$.]

(β). Ένα σωματίδιο σε έναν αστροφυσικό δίσκο κινείται μέσα στο παραπάνω δυναμικό και ταυτόχρονα χάνει ενέργεια χωρίς να διαταράσσεται η στροφορμή του h. Αποδείξτε ότι η τελική κατάσταση του σωματιδίου είναι να εκτελεί κυκλική κίνηση δεδομένης ενέργειας. Υπολογίστε την ακτίνα κυκλικής κίνησης a καθώς και την ελάχιστη αυτή ενέργεια E_c. [Αυτός είναι ο λόγος που οι αστροφυσικοί δίσκοι είναι κυκλικοί.]

(γ) Αν η ενέργεια του σωματιδίου που εκτελεί κυκλική κίνηση διαταραχθεί λίγο και γίνει $E_c + \delta E$ ενώ η στροφορμή του h παραμείνει η ίδια, δείξτε ότι η τροχιά του σωματιδίου $r = a + \eta$ ικανοποιεί σε δεύτερη τάξη ως προς τη διαταραχή της τροχιάς η την εξίσωση

$$\dot{\eta}^2 + \eta^2\left(V''(a) + 3V'(a)/a\right) = 2\delta E.$$

Από τη σχέση αυτή, τι συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί το δυναμικό έτσι ώστε να είναι η κυκλική κίνηση ευσταθής.; [Υπ. Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα: $(1+\varepsilon)^{-2} = 1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2$.]

(δ) Υποθέστε ότι το δυναμικό είναι $V = -1/r^n$, για ποιους εκθέτες n η κυκλική τροχιά είναι ασταθής; Που θα βρεθεί τελικά το σωματίδιο;

Καλή σας επιτυχία