

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Οκτώβριος 2002

Τμήμα Πέτρου Ιωάννου και Θεοχάρη Αποστολάτου



Απαντήστε και στα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1 (20 μονάδες)

- α) Διατυπώστε με σαφήνεια τους νόμους του Νεύτωνα.
β) Εξηγήστε με συντομία υπό ποία έννοια ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα δεν είναι πόρισμα του δευτέρου.
γ) Οι νόμοι του Νεύτωνα αναφέρονται σε υλικά σημεία και όχι σε εκτεταμένα φυσικά σώματα. Εξηγήστε με συντομία, κάνοντας χρήση των νόμων του Νεύτωνα, πώς προσδιορίζεται η κίνηση εκτεταμένων σωμάτων.
δ) Οι νόμοι του Νεύτωνα ικανοποιούν την αρχή του αιτιότητας. Εξηγήστε με συντομία υπό ποία έννοια ικανοποιείται αυτή η αρχή (τι απατείται δηλαδή για να γνωρίζετε το μέλλον ή το παρελθόν ενός μηχανικού συστήματος) και πώς εξασφαλίζεται από τους νόμους του Νεύτωνα η ισχύς της.

Θέμα 2 (25 μονάδες)

- (α) Δύο σωματίδια, τα οποία μπορούν να κινηθούν μέσα στην ύλη δίχως καμία αντίσταση, εκτοξεύονται από το εσωτερικό της Γης με ταχύτητες τέτοιες ώστε να εκτελέσουν κυκλικές κινήσεις στο βαρυτικό πεδίο του εσωτερικού της Γης. Ποιο θα ολοκληρώσει πιο γρήγορα την κυκλική του τροχιά, αυτό που βρίσκεται πιο βαθιά στο εσωτερικό της Γης ή το άλλο, εάν η πυκνότητα της Γης θεωρηθεί σταθερή στο εσωτερικό της.
(β) Πώς θα εκμεταλλευόσασταν τα δεδομένα διαφορετικών περιόδων για τέτοια σωματίδια που εκτελούν κυκλικές κινήσεις στο εσωτερικό της Γης προκειμένου να συμπεράνετε πώς αλλάζει η πυκνότητα της Γης στο εσωτερικό της; [Για ευκολία υποθέστε, αν θέλετε, ότι η πυκνότητα μειώνεται γραμμικά με την απόσταση από το κέντρο της Γης.]

Θέμα 3 (25 μονάδες)

Ένας δορυφόρος αρχίζει να εισέρχεται στην ανώτερη ατμόσφαιρα της Γης. Θέλουμε να μελετήσουμε την κίνησή του. Έστω λοιπόν ότι ένας δορυφόρος μοναδιαίας μάζας εκτελεί επίπεδη κίνηση που περιγράφεται από τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) , όπου r η απόσταση από την αρχή στην οποία υποθέτουμε ότι βρίσκεται το κέντρο της Γης. Στο δορυφόρο ασκούνται δύο δυνάμεις: η κεντρική βαρυτική έλξη της Γης η οποία έχει μέτρο $\frac{\mu}{r^2}$ και η δύναμη τριβής από την αραιή ατμόσφαιρα $-k\vec{v}$ που αντιτίθεται στη κίνηση του σωματιδίου ($\vec{v}$ είναι η ταχύτητα του δορυφόρου, μ, k δύο σταθερές). Αφού παραγάγετε το 2^ο νόμο του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες, δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$r^2\dot{\theta} = he^{-kt} \quad \text{και} \quad \mu r = h^2 e^{-2kt} - r^3(\ddot{r} + k\dot{r}),$$

όπου h κάποια σταθερά. Τι είναι το h ;

Επιβεβαιώστε ότι αν αρχικά ο δορυφόρος εκτελούσε κυκλική κίνηση ακτίνας a , με γωνιακή ταχύτητα ω , έτσι ώστε $\mu = a^3 \omega^2$ και εάν ισχύει ότι $\frac{k}{\omega} \ll 1$ (ποια είναι η φυσική έννοια αυτής της υπόθεσης;) τότε η κίνηση του δορυφόρου δίδεται κατά προσέγγιση από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$r = ae^{-2kt}, \quad \dot{\theta} = \omega e^{3kt}.$$

Περιγράψτε ποιοτικά τη κίνηση του δορυφόρου για $t > 0$. Η ταχύτητα του δορυφόρου αυξάνεται ή μειώνεται; Είναι η υπόθεση ότι ο δορυφόρος εκτελεί επίπεδη κίνηση αναγκαστικά ορθή;

Θέμα 4 (30 μονάδες)

Μια χάντρα μάζας m κινείται χωρίς τριβή υπό την επίδραση του ομογενούς πεδίου βαρύτητας επί μίας κυκλικής στεφάνης ακτίνας a . Η στεφάνη είναι στο κατακόρυφο επίπεδο και εξαναγκάζεται να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω περί την κατακόρυφο διάμετρό της. Χρησιμοποιώντας ένα ακλόνητο ως προς τη περιστρεφόμενη στεφάνη σύστημα ορθογωνίων αξόνων με μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_3$ στη κατακόρυφη διεύθυνση και $\vec{e}_1$ στην οριζόντια διεύθυνση του επιπέδου της στεφάνης, δείξτε ότι η θέση της χάντρας μπορεί να προσδιορισθεί ως $\vec{x} = a(\sin\psi, 0, -\cos\psi)$ και υπολογίστε το $\dot{\vec{x}}$ και $\ddot{\vec{x}}$ σε αυτό το σύστημα αξόνων. Αν $\vec{e}_2$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση που είναι κάθετη στο επίπεδο της στεφάνης, υπολογίστε το $\dot{\vec{e}}_1$ και το $\dot{\vec{e}}_2$ ως προς το αδρανειακό σύστημα στο οποίο η στεφάνη περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω . Στην χάντρα ασκούνται δύο δυνάμεις: η δύναμη της βαρύτητας $-mg\vec{e}_3$ και η αντίδραση της στεφάνης η οποία είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας (στο σύστημα των αξόνων που περιστρέφεται με τη στεφάνη). Γράψτε τους νόμους του Νεύτωνα σε ένα αδρανειακό σύστημα αξόνων και απαλείφοντας την αντίδραση δείξτε ότι ισχύει:

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{a}(1 - \mu \cos\psi) \sin\psi = 0,$$

όπου $\mu = \frac{a\omega^2}{g}$. Από τη σχέση αυτή δείξτε ότι η ενέργεια διατηρείται υπό την έννοια ότι υπάρχει κάποιο δυναμικό $V(\psi)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + V(\psi) = \text{σταθερό}.$$

Προσδιορίστε το $V(\psi)$. Πώς μπορείτε να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και το είδος τους από το γράφημα της $V(\psi)$; Δείξτε έτσι ότι όταν $\mu < 1$ υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας: τα $\psi = 0$ $\psi = \pi$ και όταν $\mu > 1$ υπάρχει και ένα τρίτο σημείο ισορροπίας: το $\psi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Προσδιορίστε το είδος ισορροπίας σε κάθε περίπτωση. Κάνοντας παραβολική προσέγγιση στο ενεργό δυναμικό

προσδιορίστε τη συχνότητα μικρών ταλαντώσεων περί το ευσταθές σημείο ισορροπίας για $\mu > 1$.

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1: (α) Με κάπως διαφορετική διατύπωση από αυτή του Νεύτωνα, 1^{ος} νόμος: Τα ελεύθερα υλικά σημεία κινούνται ευθυγράμμως και ισοταχώς, 2^{ος} νόμος: Εάν σε κάποιο υλικό σημείο εφαρμοστεί μια δύναμη, έχει ως συνέπεια τη μεταβολή της ορμής του με ρυθμό ίσο με τη δύναμη και στην κατεύθυνση της δύναμης, 3^{ος} νόμος: Οι αμοιβαίες δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ δύο υλικών σημείων είναι ίσες και αντίθετες.

(β) Αν και ο πρώτος φαίνεται να πηγάζει από τον πρώτο, η ύπαρξη του πρώτου είναι αναγκαία για να καθοριστεί το σύστημα στο οποίο πρέπει να μετρηθεί η κίνηση (καθορισμός των αδρανειακών συστημάτων). Επιπλέον, ο πρώτος καθορίζει και τον ρυθμό ροής του παγκόσμιου χρόνου.

(γ) Ένα εκτεταμένο σώμα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πλήθος N υλικών σημείων. Αυτά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αλλά ενδέχεται και να βρίσκονται και σε πεδίο εξωτερικών δυνάμεων. Έτσι

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{x}}_1 &= \vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_1^{(εξωτ)} \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= \vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2N} + \vec{F}_2^{(εξωτ)} \\ &\dots \\ m_N \ddot{\vec{x}}_N &= \vec{F}_N = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N3} + \dots + \vec{F}_{N-1N} + \vec{F}_N^{(εξωτ)} \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις αυτές έχουμε, εξαιτίας του 3^{ου} νόμου, αλληλοεξουδετέρωση των ζευγαριών $\vec{F}_{ij}, \vec{F}_{ji}$ και συνεπώς

$$\sum m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum \vec{F}_i^{(εξωτ)} \Rightarrow M \ddot{\vec{X}}_{KM} = \vec{F}_{oλ}$$

Δηλαδή το εκτεταμένο σώμα συμπεριφέρεται ως υλικό σωματίδιο μάζας όσο η συνολική μάζα του, ευρισκόμενο στο κέντρο μάζας του και κινούμενο υπό την επίδραση όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στα μέρη του.

(δ) Η αιτιότητα στα νευτώνεια μηχανικά συστήματα ικανοποιείται αφού ο καθορισμός της αρχικής θέσης και ταχύτητας είναι αρκετά για να καθορίσουν το μέλλον αλλά και το παρελθόν του συστήματος. Αυτού του είδους η αιτιότητα εξασφαλίζεται από την δεύτερη τάξη της διαφορικής εξίσωσης του 2^{ου} νόμου.

ΘΕΜΑ 2

(α) Στο εσωτερικό της Γης (θεωρούμε ότι η πυκνότητα είναι σταθερή) η βαρυτική δύναμη είναι λόγω σφαιρικής συμμετρίας

$$\vec{F}_{βαρ} = -\frac{GM(r)m}{r^2} \hat{e}_r,$$

όπου M(r) η μάζα στο εσωτερικό της σφαίρας ακτίνας r. Αλλά $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$.

Έτσι

$$\vec{F}_{βαρ} = -\frac{4}{3}Gm\pi r \hat{e}_r = -\frac{4}{3}Gm\pi \vec{r}.$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ένα σωματίδιο που εκτελεί κυκλική κίνηση μέσα στο πεδίο αυτό, θα είναι $F_{\beta\alpha\rho} = F_{\kappa\epsilon\nu\tau\rho} \Rightarrow \frac{4}{3}Gm\pi\rho r = m\omega^2 r$. Δηλαδή η κυκλική κίνηση γίνεται

με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{4}{3}G\pi\rho}$. Η συχνότητα αυτή είναι ανεξάρτητη της ακτίνας και επομένως, όλα τα σωματίδια, ανεξαρτήτως θέσης, θα ολοκληρώνουν ταυτόχρονα την τροχιά τους. Αν θέλουμε να δούμε την αριθμητική τιμή της ω , αρκεί να σκεφθούμε ότι $G\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho\frac{1}{R^2} = g$. Επομένως $\omega = \sqrt{g/R} = 1.26 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$.

(T=83.1 min).

(β) Έστω δύο σωματίδια που κινούνται σε ελαφρώς διαφορετικές κυκλικές τροχιές με ακτίνες r, r' . Τότε $\omega = \sqrt{\frac{GM(r)}{r^3}}, \omega' = \sqrt{\frac{GM(r')}{r'^3}}$. Αν υπολογίσουμε τη μεταβολή της συχνότητας με την ακτίνα

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{\omega' - \omega}{r' - r} = \omega \left(\sqrt{\frac{M' r^3}{M r'^3}} - 1 \right) \frac{1}{r' - r} = \omega \left(\sqrt{1 + \frac{4\pi\rho r^2 dr}{M}} \sqrt{\frac{1}{1 + 3r^{-1}dr}} - 1 \right) \frac{1}{dr} = \omega \left(\frac{2\pi\rho r^2}{M} - \frac{3}{2}r^{-1} \right) = \frac{3\omega}{2r} \left(\frac{4}{3} \frac{\pi\rho r^3}{M} - 1 \right)$$

Έτσι αν η πυκνότητα μεταβάλλεται γραμμικά με την ακτίνα $\rho = \rho_0(1 - ar)$,

$$M = \int dr 4\pi\rho r^2 = 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - a \frac{r^4}{4} \right). \text{ Συνεπώς}$$

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{3\omega}{2r} \left(\frac{1 - ar}{1 - 3ar/4} - 1 \right) = -\frac{3a\omega}{8(1 - 3ar/4)}.$$

Από τη σχέση αυτή μπορεί να καθοριστεί ο συντελεστής a μεταβολής της πυκνότητας. Πάντως αν η πυκνότητα μειώνεται με την ακτίνα, όπως πραγματικά συμβαίνει, η συχνότητα μικραίνει καθώς μεγαλώνει η ακτίνα, όπως φανερώνει η παραπάνω σχέση.

ΘΕΜΑ 3

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m \frac{d^2}{dt^2} (r\vec{e}_r) = m \frac{d}{dt} (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r) = m(\ddot{r}\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\vec{e}}_r + r\ddot{\vec{e}}_r).$$

$$\text{Εύκολα δείχνεται ότι } \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \ddot{\vec{e}}_r = \ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

Έτσι ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

$$\text{Στο πρόβλημά μας } m=1, \vec{F} = \vec{F}_{\beta\alpha\rho} - k\vec{v} = -\frac{\mu}{r^2}\vec{e}_r - k(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta).$$

Οι διαφορικές λοιπόν εξισώσεις που καθορίζουν την κίνηση του δορυφόρου είναι

$$-\frac{\mu}{r^2} - k\dot{r} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$-kr\dot{\theta} = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

Η δεύτερη εξίσωση δίδει $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -k(r^2\dot{\theta}) \Rightarrow (r^2\dot{\theta}) = he^{-kt}$. Στη σταθερά h

αναγνωρίζουμε την αρχική στροφορμή του δορυφόρου. Αντικαθιστώντας το $\dot{\theta}$ από τη σχέση αυτή στην άλλη παίρνουμε τη 2^η ζητούμενη διαφορική εξίσωση.

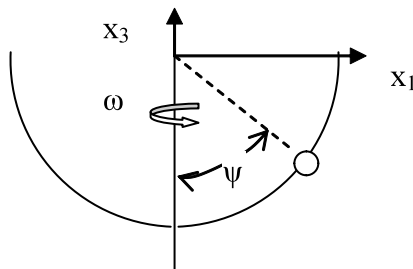
Η σχέση $\mu = a^3\omega^2$ παράγεται από την εξίσωση της κεντρομόλου με την βαρυτική δύναμη. Ο λόγος k/ω όταν είναι πολύ μικρός σημαίνει ότι η τριβή δεν επηρεάζει αισθητά την κίνηση σε χρόνο μιας περιόδου. Δοκιμάζοντας τις προσεγγιστικές εκφράσεις για την ακτινική και την αζιμουθιακή θέση του δορυφόρου, βλέπουμε ότι η πρώτη σχέση ικανοποιείται ταυτοτικά, με $h = a^2\omega$, ενώ η δεύτερη παίρνει τη μορφή

$$a^4\omega^2 e^{-2kt} = a^4\omega^2 e^{-2kt} - 2a^4k^2 e^{-8kt}$$

Παρόλο ότι η τελευταία σχέση δεν φαίνεται να είναι σωστή είναι σωστή κατά προσέγγιση αφού λόγω του μικρού λόγου k/ω , ο τελευταίος όρος είναι αμελητέος σε σχέση με τους υπόλοιπους. Επομένως οι εκφράσεις για τη χρονική μεταβολή των r, θ είναι προσεγγιστικά σωστές. Ο δορυφόρος μειώνει με εκθετικό τρόπο την ακτίνα του και ταυτόχρονα αυξάνει με εκθετικό τρόπο την γωνιακή του ταχύτητα. Η αζιμουθιακή του ταχύτητα $v = r\dot{\theta} = a\omega e^{2kt}$, αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου. Παρά την τριβή, ο δορυφόρος αυξάνει την ταχύτητά του!

Όσο για την επιπεδότητα της κίνησης αυτή εξασφαλίζεται από τη σταθερότητα της διεύθυνσης της στροφορμής. Η μοναδική ροπή, αυτή της τριβής έχει τη διεύθυνση της στροφορμής επομένως η διεύθυνση της στροφορμής δεν μεταβάλλεται.

ΘΕΜΑ 4



Στους άξονες του σχήματος η θέση της χάντρας είναι $\vec{x} = a(\sin\psi, 0, -\cos\psi)$.

Στο σύστημα το περιστρεφόμενο, η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι

$$\dot{\vec{x}}_{\pi\pi} = a\dot{\psi}(\cos\psi, 0, \sin\psi), \ddot{\vec{x}}_{\pi\pi} = a\ddot{\psi}(\cos\psi, 0, \sin\psi) + a\dot{\psi}^2(-\sin\psi, 0, \cos\psi).$$

Λόγω του περιστρεφόμενου συστήματος

$$\dot{\vec{e}}_1 = \omega\vec{e}_2, \dot{\vec{e}}_2 = -\omega\vec{e}_1$$

Στο αδρανειακό σύστημα

$$m\ddot{\vec{x}} = -mg\vec{e}_3 + \vec{R}$$

Υπολογίζοντας την επιτάχυνση στο αδρανειακό σύστημα

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{d^2}{dt^2}(a \sin \psi \vec{e}_1 - a \cos \psi \vec{e}_3) =$$

$$a \left[(-\dot{\psi}^2 \sin \psi + \ddot{\psi} \cos \psi - \omega^2 \sin \psi) \vec{e}_1 + (2\dot{\psi} \omega \cos \psi) \vec{e}_2 + (\dot{\psi}^2 \cos \psi + \ddot{\psi} \sin \psi) \vec{e}_3 \right]$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την επιτάχυνση αυτή με το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ταχύτητας της χάντρας στο περιστρεφόμενο σύστημα $(\cos \psi, 0, \sin \psi)$, θα έχουμε

$$ma \left[(-\dot{\psi}^2 \sin \psi + \ddot{\psi} \cos \psi - \omega^2 \sin \psi) \cos \psi + (\dot{\psi}^2 \cos \psi + \ddot{\psi} \sin \psi) \sin \psi \right] = (-mg\vec{e}_3 + \vec{R}) \cdot (\cos \psi, 0, \sin \psi) \Rightarrow$$

$$ma(\ddot{\psi} - \omega^2 \sin \psi \cos \psi) = -mg \sin \psi \Rightarrow$$

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{a}(\sin \psi - \mu \sin \psi \cos \psi) = 0$$

(Το εσωτερικό γινόμενο της αντίδρασης με το μοναδιαίο στην κίνηση της χάντρας μηδενίζεται λόγω καθετότητας της αντίδρασης.)

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με $\dot{\psi}$ και ολοκληρώνοντας έχουμε ότι

$$\dot{\psi}^2 / 2 + (g/a)(-\cos \psi + \frac{\mu}{4} \cos 2\psi) = \text{σταθ}$$

Ο δεύτερος όρος είναι το αντίστοιχο δυναμικό.

Παραγωγίζοντας το δυναμικό αυτό, μπορούμε από τις ρίζες του να βρούμε τα σημεία ισορροπίας: $\sin \psi - \mu \sin \psi \cos \psi = 0 \Rightarrow \sin \psi = 0, \cos \psi = 1/\mu$.

Για το είδος της ισορροπίας χρειαζόμαστε τη δεύτερη παράγωγο του δυναμικού: $\cos \psi - \mu \cos 2\psi$.

Για $\psi=0$, $V'' = (g/a)(1-\mu)$, ευσταθές για $\mu < 1$, ασταθές για $\mu > 1$

Για $\psi=\pi$, $V'' = (g/a)(-1-\mu) < 0$, ασταθές

Για $\psi=\cos^{-1}(1/\mu)$, $V'' = (g/a)\frac{(\mu-1)^2}{\mu}$, ευσταθές αλλά υπάρχει μόνο για $\mu > 1$.

Η συχνότητα είναι η τετραγωνική ρίζα της δεύτερης παραγώγου του δυναμικού, αφού

$$V \equiv V(\psi_0) + \frac{1}{2} V''(\psi_0)(\psi - \psi_0)^2$$

και η διατήρηση της ενέργειας παίρνει τη μορφή του αρμονικού ταλαντωτή

$$\dot{\psi}^2 / 2 + \frac{1}{2} V''(\psi_0)(\psi - \psi_0)^2 = \text{σταθ}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\mu a}}(\mu - 1)$$