ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

Φεβρουάριος 2005

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

ΘΕΜΑ 1 (25 μονάδες) Σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινείται σύμφωνα με το δυναμικό νόμο:

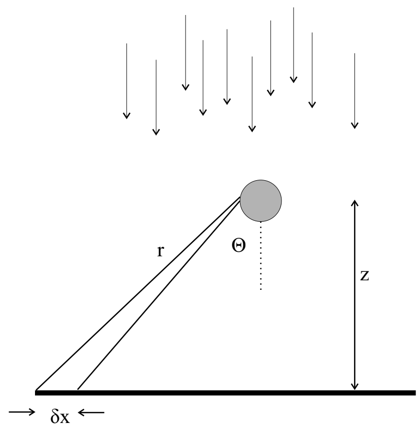
$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\lambda}{r}\dot{\vec{x}} \times \hat{z} \ ,$$

όπου $\vec{x}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου ενώ οι τελείες επί του διανύσματος θέσης συμβολίζουν, ως συνήθως, παραγώγιση ως προς το χρόνο. Η $\lambda > 0$ είναι μία θετική σταθερά, το $\hat{z}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του άξονα z, και το r το μήκος της κάθετης απόστασης του σωματιδίου από τον άξονα z. Λόγω της μορφής του δυναμικού νόμου επιλέγουμε να περιγράψουμε την κίνηση στις κυλινδροπολικές συντεταγμένες (r, θ, z). (α) Περιγράψτε την z συνιστώσα της κίνησης του σωματιδίου. (β) Δείξτε ότι σε κάθε περίπτωση διατηρείται η συνολική κινητική ενέργεια του σωματιδίου και στη συνέχεια γράψτε την κινητική ενέργεια σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες. (γ) Για ποιες αρχικές συνθήκες το σωματίδιο εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας r_0 περί του άξονα z; (δ) Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση που διέπει τη χρονική εξέλιξη της στροφορμής $\vec{L} = \vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ και από την εξίσωση αυτή δείξτε ότι η z συνιστώσα της στροφορμής, L_z, ικανοποιεί τη σχέση: $L_z(r) = L_z(r_0) - \lambda(r - r_0)$ όπου $L_z(r)$ η z συνιστώσα της στροφορμής στη θέση r. (ε) Γράψτε την έκφραση της L_z σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες. Παρατηρείτε το σωματίδιο στη θέση r_0 να κινείται με θετική γωνιακή ταχύτητα, έτσι ώστε $L_z(r_0) > 0$, να έχει κινητική ενέργεια E, και μηδενική ταχύτητα στην z διεύθυνση. Δείξτε ότι η μεταβολή της απόστασης r του σωματιδίου από τον άξονα z μπορεί να προσδιορισθεί από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας στη μορφή $E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$ όπου $V_{eff}(r)$ ένα ενεργό δυναμικό. Προσδιορίστε το ενεργό δυναμικό και σχεδιάστε το. Τι ενέργεια απαιτείται να έχει το σωματίδιο για να μπορέσει να διαφύγει στο άπειρο;
[Δίδεται η διανυσματική ταυτότητα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.]

ΘΕΜΑ 2 (25 μονάδες) (α) Θεωρήστε μία σφαίρα ακτίνας a και συνολικού φορτίου $+Ze$. Το θετικό φορτίο είναι ομοιογενώς κατενεμημένο σε όλο τον όγκο της, με πυκνότητα φορτίου ρ. Δεδομένου ότι ένα σημειακό φορτίο Q δημιουργεί πεδίο έντασης $\vec{E} = (Q/4\pi\epsilon_0)(\vec{x}/|\vec{x}|^3)$ σε απόσταση $\vec{x}$ από αυτό, υπολογίστε τη δυναμική ενέργεια $V(r)$ για ένα σημειακό φορτίο q που βρίσκεται σε απόσταση $r = |\vec{x}|$ από το κέντρο της φορτισμένης σφαίρας. (Αναλογιστείτε την ομοιότητα του πεδίου αυτού με το αντίστοιχο βαρυτικό πεδίο). Σχεδιάστε τη δυναμική αυτή ενέργεια. Πόσο μεγαλύτερη είναι η δυναμική ενέργεια στο κέντρο της σφαίρας από αυτή στην επιφάνεια της σφαίρας; (β) Πριν από τον Rutherford είχε προταθεί ότι τα άτομα αποτελούνται από μία ομογενώς φορτισμένη σφαίρα ακτίνας $10^{-10}\ m$ μέσα στην οποία βρίσκονται διάσπαρτα τα αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια. Ο Rutherford το 1910 κατηύθυνε σωματίδια α ενέργειας $= 6.4MeV$ σε πολύ λεπτά φύλλα χρυσού και παρατήρησε ότι ένα πολύ μικρό ποσοστό των σωματιδίων α οπισθοσκεδάζονταν δηλαδή επέστρεφαν πίσω προς την πηγή τους. Δείξτε ότι αν η ακτίνα των θετικά φορτισμένων ατομικών σφαιρών ήταν της τάξης που πιστευόταν τότε δεν θα μπορούσε να συμβεί οπισθοσκέδαση. Στη συνέχεια υπολογίστε πόσο μικρότερη από $10^{-10}\ m$ θα πρέπει να είναι η ακτίνα των ατομικών σφαιρών ώστε να συμβεί το παρατηρούμενο γεγονός. [Υποδ: Μπορείτε δίχως βλάβη της γενικότητας να αγνοήστε την ύπαρξη των ηλεκτρονίων αφού αυτά είναι εξαιρετικά ελαφρά σε σχέση με τα σωματίδια α και μια έντονη κρούση με αυτά θα τα εκσφενδονίσει μακριά από τη θετικά φορτισμένη σφαίρα. Επίσης υποθέστε ότι τα σωματίδια α χτυπούν μόνο σε μια ατομική σφαίρα και μάλιστα κεντρικά (παράμετρο κρούσης $b = 0$) ώστε να μπορούμε να επιτύχουμε εκτροπή 180°. Δίδονται για βοήθεια τα ακόλουθα δεδομένα: $1MeV = 1.6 \times 10^{-13}\ Joules$, $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \times 10^9\ N \cdot m^2/Cb^2$, $1e = 1.6 \times 10^{-19}\ Cb$, για το χρυσό $Z = 79$, αριθμητικό βοήθημα: $27 \times 79 \times 1.6/2 \sim 1700$.]

ΘΕΜΑ 3 (25 μονάδες) (α) Στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας R κατασκευασμένης από υλικό σταθερής πυκνότητας έχει ανοιχθεί μια σφαιρική κοιλότητα το κέντρο της οποίας βρίσκεται σε απόσταση a από το κέντρο της αρχικής σφαίρας και έχει ακτίνα b. Υπολογίστε το βαρυτικό πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας θεωρώντας ότι το πεδίο της κούφιας σφαίρας είναι επαλληλία ενός πεδίου από μια γεμάτη σφαίρα και ενός πεδίου από μια μικρή σφαίρα (στη θέση της κοιλότητας) με αρνητική πυκνότητα. [Υπόδ: Θεωρήστε γνωστό ότι το βαρυτικό πεδίο από έναν σφαιρικό φλοιό είναι μηδέν στο εσωτερικό του φλοιού, ενώ έξω από το σφαιρικό φλοιό είναι ισοδύναμο με το βαρυτικό πεδίο από μια σημειακή μάζα, ίση με τη μάζα του σφαιρικού φλοιού, η οποία είναι τοποθετημένη στο κέντρο του φλοιού.] (β) Θέλουμε στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε το πεδίο εντός της κοιλότητας για να επιταχύνουμε σωματίδια στη μέγιστη δυνατή ταχύτητα μέσα στο κενό της κοιλότητας. Πού πρέπει να τοποθετήσουμε τα σωματίδια αρχικά στην κοιλότητα και πόσο μεγάλη κοιλότητα πρέπει να κατασκευάσουμε (ποιες είναι οι αντίστοιχες τιμές των a, b) για να επιτύχουμε τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα;

ΘΕΜΑ 4 (25 μονάδες) Στον τρισδιάτατο χώρο που ζούμε ορίζουμε την ενεργό διαφορική διατομή ως $d\sigma/d\Omega$ ώστε αν πολλαπλασιάσουμε την ποσότητα αυτή με την εισερχόμενη ροή των σωματιδίων - βλημάτων να πάρουμε μια έκφραση για την ροή των εξερχομένων σωματιδίων ανά μονάδα στερεάς γωνίας μέσα στην οποία εξέρχονται τα σκεδασμένα σωματίδια. Ειδικά στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας έχουμε δείξει ότι η διαφορική αυτή ενεργός διατομή είναι σταθερή και ανεξάρτητη από τη γωνία σκέδασης. (α) Πως θα ορίζατε την αντίστοιχη διαφορική ενεργό διατομή σε ένα δισδιάστατο κόσμο; (β) Υπολογίστε την διαφορική ενεργό διατομή για έναν σκληρό κύκλο. Συγκεκριμένα, σταθερή ροή βλημάτων (βλήματα ανά μονάδα μήκους κάθετα στην κίνηση και ανά μονάδα χρόνου) που κινούνται επί ενός επιπέδου χτυπούν πάνω σε μια ημιπεριφέρεια ακτίνας R και σκεδάζονται ελαστικά. Σε ποια γωνία περιμένουμε να έχουμε το μέγιστο αριθμό σκεδαζομένων σωματιδίων; Πόση είναι η συνολική ενεργός διατομή; (γ) Μια ροή σωματιδίων I_0 (σωμάτια ανά μονάδα επιφάνειας και χρόνου) προσπίπτει κάθετα σε μια επιφάνεια. Θέλουμε με κάποιο τρόπο να εστιάσουμε τα σωματίδια σε μια περιοχή της επιφάνειας. Το μόνο που διαθέτουμε είναι ένας μακρύς σκληρός κυλινδρικός σωλήνας ακτίνας R τον οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως σκεδαστή των σωματιδίων τοποθετώντας τον κάθετα στη ροή αυτών. Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος κατά τον άξονα του σωλήνα, το πρόβλημα της σκέδασης είναι δισδιάστατο και οι περιοχές που θα δέχονται την ίδια ροή σωματιδίων είναι λωρίδες παράλληλες με τον σωλήνα. Αν ο σωλήνας βρίσκεται σε απόσταση $z >> R$ από την επιφάνεια, ώστε ο σωλήνας να θεωρείται ότι είναι σχεδόν μια γραμμή, δείξτε ότι το πλήθος των *σκεδασμένων* σωματιδίων που θα καταφθάνουν στη μονάδα του χρόνου σε μια τέτοια λωρίδα απειροστού πάχους δx και μήκους l, που βρίσκεται σε γωνία Θ (βλ. σχήμα) ως προς τον σωλήνα θα είναι $I_0(Rl\ \delta x/2z)\cos^2\Theta \sin(\Theta/2)$. (δ) Βρείτε τη θέση της λωρίδας που θα δέχεται το μέγιστο πλήθος σωματιδίων. Πόσο μεγαλύτερο είναι αυτό το πλήθος από εκείνο εξαιτίας της απευθείας ροής των σωματιδίων στην εν λόγω λωρίδα; [Δίδεται ότι $\cos\Theta = 1 - 2\sin^2(\Theta/2)$.]



Να γραφούν και τα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Λύσεις

Θέμα 1: α) Από το εξωτερικό γινόμενο αμέσως φαίνεται ότι η ασκούμενη δύναμη στην $\hat{z}$ διεύθυνση

είναι μηδενική. Συνεπώς η κίνηση είναι ισοταχής σε αυτή τη διεύθυνση ($\dot{z}$ = σταθερή).

Γράφουμε για μελλοντική χρήση τις συνιστώσες της δύναμης σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες. Επειδή η ταχύτητα είναι:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{z}$$

η δύναμη έχει τις συνιστώσες:

$$\vec{F} = \lambda\dot{\theta}\hat{e}_r - \lambda\frac{\dot{r}}{r}\hat{e}_\theta \ .$$

β) Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης κίνησης με την ταχύτητα έχουμε αμέσως ότι

$$\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}} \cdot \left(\frac{\lambda}{r}\dot{\vec{x}} \times \hat{z}\right) = 0.$$

Επειδή δε

$$\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}},$$

καταλήγουμε ότι η συνολική κινητική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}$$

διατηρείται κατά τη κίνηση. Υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο έχουμε την έκφραση της κινητικής ενέργειας στις κυλινδροπολικές συντεταγμένες:

$$K = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) \ .$$

Σημειώνουμε επίσης ότι επειδή είναι η $\dot{z}$ = σταθερή κατά τη κίνηση διατηρείται και η ολική "οριζόντια" κινητική ενέργεια:

$$K_h = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \ .$$

γ) Το σωματίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση όταν η ακτίνα του παραμένει σταθερή $r = r_0$ καθώς επίσης και η γωνιακή του ταχύτητα: $\dot{\theta}$. Στην περίπτωση αυτή η επιτάχυνση είναι: $\ddot{\vec{x}} = -r_0\dot{\theta}^2\hat{e}_r$ και η ισορροπία δυνάμεων απαιτεί:

$$-r_0\dot{\theta}^2 = \lambda\dot{\theta} \ .$$

Συνεπώς το σωματίδιο πρέπει να τοποθετηθεί στο $r = r_0$ με μηδενική ακτινική ταχύτητα καθώς και $\dot{z} = 0$ και με γωνιακή ταχύτητα

$$\dot{\theta} = -\frac{\lambda}{r_0} \ ,$$

για να εκτελέσει κυκλική κιίνηση.

δ) Η χρονική εξέλιξη της στροφορμής είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{x} \times \dot{\vec{x}}\right) \\
&= \vec{x} \times \ddot{\vec{x}} \\
&= \vec{x} \times \left(\frac{\lambda}{r}\dot{\vec{x}} \times \hat{z}\right) \\
&= \frac{\lambda}{r}\left(\vec{x} \cdot \hat{z}\right)\dot{\vec{x}} - \frac{\lambda}{r}\left(\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}\right)\hat{z} \\
&= \frac{\lambda}{r}z\left(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{z}\right) - \frac{\lambda}{r}\left(r\dot{r} + z\dot{z}\right)\hat{z} \ .
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι το διάνυσμα θέσης είναι: $\vec{x} = r\hat{e}_r + z\hat{z}$. Η z συνιστώσα της παραπάνω εξίσωσης δίνει για την εξέλιξη της στροφορμής σε αυτή τη διεύθυνση:

$$\begin{aligned} \frac{dL_z}{dt} &= \frac{\lambda}{r} z\dot{z} - \frac{\lambda}{r}(r\dot{r} + z\dot{z}) \\ &= -\frac{\lambda}{r} r\dot{r} \\ &= -\lambda \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\frac{d}{dt}(L_z + \lambda r) = 0\ .$$

Η ποσότητα δηλαδή $L_z + \lambda r$ διατηρείται κατά τη κίνηση. Εάν λοιπόν η στροφορμή στη θέση r_0 είναι $L_z(r_0)$ τότε μπορεί να συμπεράνουμε ότι στη θέση r θα είναι:

$$L_z(r) = L_z(r_0) - \lambda(r - r_0)\ .$$

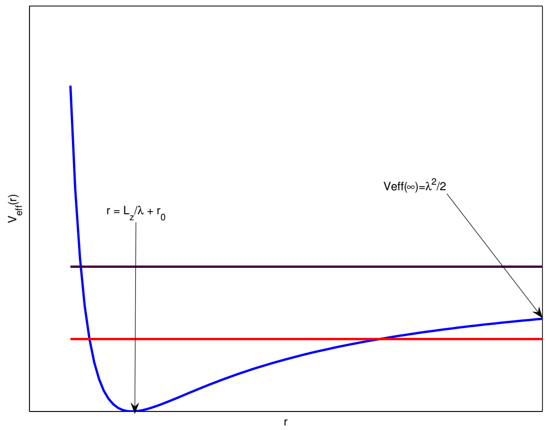
ε) Είναι $L_z = r^2\dot{\theta}$ όπως αμέσως φαίνεται από το

$$\vec{L} = (r\hat{e}_r + z\hat{z}) \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{z})\ .$$

Η διατηρούμενη κινητική ενέργεια είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{r^2}\ . \end{aligned}$$

Η ακτινική κίνηση εξελίσσεται σα να βρισκόταν το σωματίδιο σε ενεργό δυναμικό:

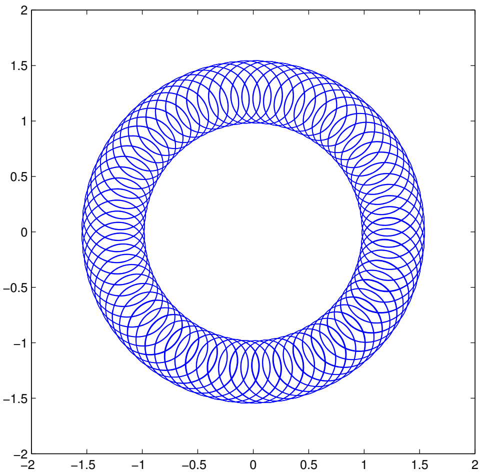


Σχήμα 1: Το ενεργό δυναμικό για την περίπτωση $L_z(r_0) > 0$ και $\lambda > 0$. Το ενεργό δυναμικό $V_{eff}(r) \to \infty$ όταν $r \to 0$ και στο όριο $r \to \infty$ το ενεργό δυναμικό γίνεται $V_{eff}(r) \to \lambda^2/2$. Το ενεργό δυναμικό παρουσιάζει ελάχιστο στην ακτίνα $r_m = L_z(r_0)/\lambda + r_0$ όπου η στροφορμή μηδενίζεται. Για ενέργειες μικρότερες από $E < \lambda^2/2$ έχουμε φραγμένες κινήσεις με μέγιστη και ελάχιστη απόσταση τα σημεία τομής της καμπύλης με την ενέργεια, άλλως αν $E \geq \lambda^2/2$ το σωματίδιο διαφεύγει στο άπειρο.

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{(L_z(r_0) - \lambda(r - r_0))^2}{r^2}\ .$$

Επί του προκειμένου, για δεδομένη ενέργεια E οι επιτρεπόμενες περιοχές κίνησης είναι αυτές για τις οποίες

$$E \geq \frac{(L_z(r_0) - \lambda(r - r_0))^2}{2r^2}.$$



Σχήμα 2: Τυπική τροχιά στη περίπτωση που η κίνηση είναι φραγμένη.

Το ενεργό δυναμικό για την περίπτωση $L_z(r_0) > 0$ και $\lambda > 0$ σχεδιάζεται στο Σχ. 1. Όπως φαίνεται από το σχήμα για ενέργειες $E \geq \lambda^2/2$ το σωματίδιο διαφεύγει στο άπειρο αφού για $r \to \infty$, $E \to \lambda^2/2$. Άλλως το σωματίδιο εκτελεί τη κίνηση που σχεδιάζουμε στο Σχ. 2 (δεν εξητείτο αυτό στο διαγώνισμα). Μπορείτε να σκεφθείτε τι κίνηση θα εκτελούν φορτισμένα σωματίδια που βρίσκονται στο επίπεδο του ισημερινού σε μεγάλα ύψη στην ατμόσφαιρα.

Θέμα 2: Κατ᾽ αναλογίαν με το βαρυτικό πεδίο μιας "γεμάτης" σφαίρας στην περίπτωση μιας φορτισμένης σφαίρας το ηλεκτρικό πεδίο στο μεν εξωτερικό θα είναι

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}, \text{ για } r > R$$

ενώ στο εσωτερικό αυτής

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q(r)}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr^3/R^3}{r^3}\vec{r} \text{ για } r \leq R.$$

Για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια ενός φορτίου που φέρεται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο της φορτισμένης σφαίρας (θεωρώντας ότι η ενέργεια αυτή ως συνήθως είναι 0 στο άπειρο)

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} q\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{r}^{\infty} q\vec{E}\cdot d\vec{r}.$$

Για $r > R$

$$V(r) = \int_{r}^{\infty}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r},$$

ενώ για $r \leq R$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{R} + \int_{r}^{R}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{R^3}r\,dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{R}\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right].$$

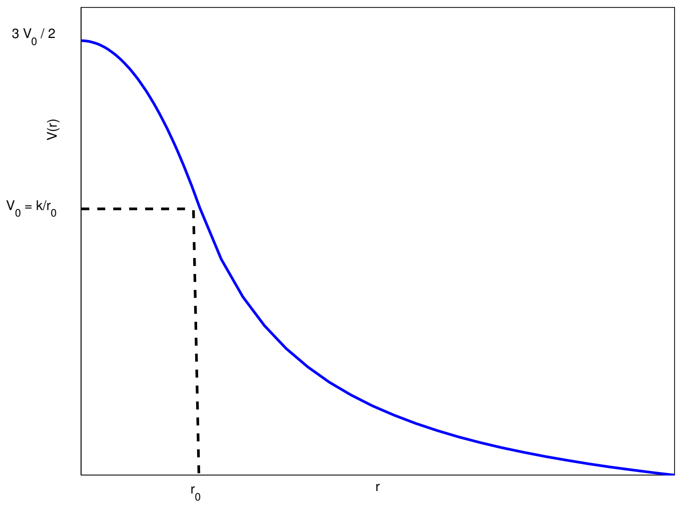
(βλ. Σχήμα 3) οπότε στο κέντρο της σφαίρας η δυναμική ενέργεια είναι

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Qq}{2R}.$$

Συνεπώς στο κέντρο η ενέργεια είναι 1.5 φορές η ενέργεια στην επιφάνεια.

(β) Ας συγκρίνουμε την κινητική ενέργεια των σωματιδίων με τη δυναμική ενέργεια στο κέντρο της σφαίρας.

$$\frac{E_k}{V(0)} = \frac{6.4 \times 1.6 \times 10^{-13}}{(3/2)9 \times 10^9 \times 79 \times (1.6 \times 10^{-19})^2/10^{-10}} = 1000\frac{64}{17}.$$



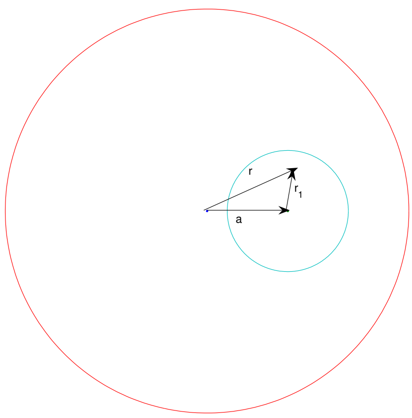
Σχήμα 3: Η δυναμική ενέργεια (όπου $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Qq$) του φορτίου στο πεδίο της φορτισμένης σφαίρας ως συνάρτηση της απόστασης.

Αφού λοιπόν η κινητική είναι τόσο μεγαλύτερη αποκλείεται η παρουσία ενός τέτοιου πυρήνα να ανακόψει την κίνηση του βλήματος και να το οπισθοσκεδάσει. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί μόνο αν οι δύο ενέργειες γινόντουσαν ίσες οπότε τότε το βλήμα θα σταματούσε στο κέντρο του πυρήνα και θα εκσφενδονιζόταν πάλι πίσω (αν δεν έφτανε ακριβώς στο κέντρο που θα ισορροπούσε ασταθώς). Η ακτίνα λοιπόν θα έπρεπε να είναι $1000\frac{64}{17}$ φορές μικρότερη, δηλαδή $(17/64) \times 10^{-14}\ m$ που είναι πολύ κοντύτερα στην παραγματική τιμή του μεγέθους του πυρήνα. Στην εύρεση της ακτίνας του πυρήνα μάλιστα, ο όρος 3/2 θα μπορούσε να αγνοηθεί αφού για να πετύχουμε οπισθοσκέδαση χωρίς να διαλύσουμε τον πυρήνα θα θέλαμε το σωματίδιο α να φθάσει απλώς μέχρι την επιφάνεια και να γυρίσει πίσω και όχι να διαπεράσει τον πυρήνα.

Θέμα 3: α) Η δύναμη που ασκείται σε κάθε σημείο της κοιλότητας είναι:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -G\frac{(4\pi r^3/3)\rho}{r^3}\vec{r} - G\frac{(4\pi r_1^3/3)(-\rho)}{r_1^3}\vec{r_1} \\ &= -4\pi G\rho\vec{a}\,,\end{aligned}$$

όπου $\vec{a} = \vec{r} - \vec{r_1}$ είναι το διάνυσμα μέτρου a που ενώνει το κέντρο της σφαίρας με το κέντρο της κοιλότητας, r η απόσταση κάποιου σημείου της κοιλότητας από το κέντρο της κύριας σφαίρας, r_1 η απόσταση του σημείου αυτού από το κέντρο της κοιλότητας (βλ. Σχ. 4). Συνεπώς το πεδίο μέσα στη κοιλότητα είναι ομογενές με κατεύθυνση παράλληλη με την ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δύο σφαιρών και φορά προς το κέντρο της μεγάλης σφαίρας.



Σχήμα 4: Το πεδίο μέσα στη κοιλότητα είναι ομογενές.

β) Για να εκμεταλλευτεί κανείς όσο το δυνατόν περισσότερο το ομογενές αυτό πεδίο το σωματίδιο θα πρέπει να αφεθεί στο άκρο της διαμέτρου της κοιλότητας που διέρχεται από το κέντρο της μεγάλης σφαίρας ώστε να διανύσει απόσταση $2b$. Η ταχύτητα που θα αποκτήσει θα είναι $v = \sqrt{2gs}$, όπου g το πεδίο εντός της κοιλότητας και $s = 2b$ η απόσταση που θα διανύσει επιταχυνόμενο. Συνεπώς η ταχύτητα v στο άλλο άκρο της κοιλότητας είναι ανάλογη της $\sqrt{ab}$. Πρέπει λοιπόν να μεγιστοποιήσουμε το $\sqrt{ab}$. Όμως πρέπει $a < R$, όπου R η ακτίνα της μεγάλης σφαίρας, όπως και $b < R$. Επίσης για δεδομένο b το a πρέπει να λαμβάνει τιμές στο διάστημα $0 \le a \le R - b$. Άρα για δεδομένο b η μέγιστη ταχύτητα επιτυγχάνεται για $a = R - b$. Οπότε πρέπει να βρούμε το b που μεγιστοποιεί το γινόμενο $\sqrt{b(R-b)}$. Αυτό επιτυγχάνεται όπως εύκολα διαπιστώνεται (για παράδειγμα με παραγώγιση) για $b = R/2$, και άρα και $a = R/2$.

Θέμα 4: (α) Στις 2 διαστάσεις το αντίστοιχο της επιφάνειας των 3 διαστάσεων είναι το μήκος κάθετα στην κίνηση των σωματιδίων, και το αντίστοιχο της στερεάς γωνίας είναι η γωνία σκέδασης. Έτσι

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{2D} = \left|\frac{db}{d\Theta}\right|$$

Αν αυτή η διαφορική ενεργός διατομή πολλαπλασιαστεί με τη ροή ανά μονάδα μήκους και ανά μονάδα χρόνου των σωματιδίων βλημάτων θα πάρουμε τη ροή των σωματιδίων που θα σκεδαστούν γύρω από τη γωνία Θ που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη παράμετρο κρούσης.

(β) Για σκληρό κύκλο έχουμε: $b = R\sin\theta$, $db = R\cos\theta d\theta$. Παράλληλα $\Theta = \pi - 2\theta$, $d\Theta = -2d\theta$. Συνολικά

$$\left|\frac{db}{d\Theta}\right| = \frac{R}{2}|\cos\theta| = \frac{R}{2}\sin(\Theta/2)$$

Το μέγιστο της ενεργού διατομής $R/2$ το έχουμε όταν $\Theta = \pm\pi$ (οπισθοσκέδαση). Η δε ολική διατομή είναι

$$b = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{db}{d\Theta}\right| d\Theta = \frac{R}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\Theta/2)d\Theta = R\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(x)dx = 2R$$

όπως ήταν αναμενόμενο αφού το "ύψος" του κύκλου είναι $2R$.

(γ) Η λωρίδα πλάτους δx "βλέπει" τον σχεδόν σημειακό σκεδαστή υπό γωνία $\delta\Theta = \delta x\cos\Theta/r$. Από τη γεωμετρία του προβλήματος $z = r\cos\Theta$, οπότε $\delta\Theta = \delta x\cos^2\Theta/z$. Το πλήθος λοιπόν των σωματιδίων που αφού σκεδαστούν θα καταλήγουν ανά μονάδα χρόνου στην εν λόγω λωρίδα θα είναι $I_0 l|db/d\Theta|\delta\Theta = I_0(R/2)\sin(\Theta/2)(\delta x\, l/z)\cos^2\Theta$.

(δ) Ο μέγιστος ρυθμός σωματιδίων θα προσπίπτει στη λωρίδα με $\sin(\Theta/2)\cos^2\Theta = \max$. Αλλά $\sin x(1 - 2\sin^2 x)^2 = \max$ όταν το $y = \sin x$ μεγιστοποιεί την $y(1-2y^2)^2$. Αυτό συμβαίνει όταν $0 = [y(1-2y^2)^2]' = (1-2y^2)^2 + 2y(1-2y^2)(-4y) = (1-2y^2)(1-10y^2)$. Έτσι η γωνία Θ για την οποία $\sin(\Theta/2) = 1/\sqrt{10}$ οδηγεί στο μέγιστο ρυθμό σωματιδίων (η άλλη λύση αντιστοιχεί σε $\Theta = \pi/2$ και επομένως δεν συναντά την επιφάνεια). Το γεγονός ότι πρόκειται περί μεγίστου εύκολα μπορεί να το δει κανείς από to διάγραμμα της $\sin x(1 - 2\sin^2 x)^2$ αλλά και από το γεγονός ότι η παράσταση αυτή είναι μηδέν για $x = 0$ και $x = \pi/4$ και θετική ενδιάμεσα. Έτσι στη θέση του μεγίστου καταφθάνουν $(R/2z)(1/\sqrt{10})(1-2/10)^2$ περισσότερα σωματίδια απ' ότι απ' ευθείας.