ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι
Φεβρουάριος 2003

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Θέμα 1 (25 μονάδες)

Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις σύντομα.

(α) Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για δύο σωματίδια που αλληλεπιδρούν με δυνάμεις που εξαρτώνται μόνο από τη σχετική τους θέση αλλάζει αν εκτελέσουμε έναν γαλιλαϊκό μετασχηματισμό συντεταγμένων;

(β) Μια δύναμη της μορφής F(x) για μονοδιάστατες κινήσεις οδηγεί πάντα σε μια διατηρήσιμη ποσότητα, την οποία ονομάζουμε ενέργεια;

(γ) Παρακολουθούμε δύο μπίλιες του μπιλιάρδου οι οποίες τη στιγμή λίγο πριν συγκρουστούν μεταξύ τους πλησίαζαν και οι δύο το ένα τοίχωμα του τραπεζιού του μπιλιάρδου. Είναι δυνατόν τη στιγμή αμέσως μετά τη σύγκρουσή τους να κινούνται προς το απέναντι τοίχωμα και οι δύο (αν όχι εξηγήστε γιατί, αν ναι δώστε παράδειγμα); Μεταξύ των δύο στιγμών μεσολαβεί μόνο η σύγκρουση των δύο σφαιρών.

(δ) Μεταξύ δύο ίδιων άπειρων παραλλήλων πλακών ομογενούς πυκνότητας ύλης, το βαρυτικό πεδίο τι ένταση έχει;

(ε) Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Κέπλερ ο λόγος του τετραγώνου της περιόδου προς τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της Γης, κατά την κίνησή της γύρω από τον Ήλιο, είναι ίσος με τον αντίστοιχο λόγο της Σελήνης όσον αφορά την κίνηση αυτής περί τη Γη;

(στ) Ένας κομήτης έρχεται από το υπερπέραν με αρχική ταχύτητα u_o. Αν θεωρήσουμε ότι το ηλιακό σύστημα αποτελείται μόνο από τον Ήλιο, μπορεί να μείνει εγκλωβισμένος ο κομήτης στο ηλιακό σύστημα ή θα ξαναεπιστρέψει στο άπειρο; Γιατί;

(ζ) Ποια θα ήταν η διεύθυνση και η φορά του βαρυτικού πεδίου στο εσωτερικό ενός λεπτού σφαιρικού φλοιού αν η δύναμη ήταν ΌΧΙ αντιστρόφου τετραγώνου, αλλά αντιστρόφου κύβου;

(η) Εξαρτάται το βαρυτικό δυναμικό στο εσωτερικό μιας σφαίρας από τον τρόπο που είναι κατανεμημένη η πυκνότητα στο εσωτερικό αυτής; Δώστε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι ο ισχυρισμός σας είναι σωστός.

(θ) Αν θεωρήσουμε ότι οι διαμοριακές δυνάμεις είναι ίδιες σε δύο διατομικά μόρια με μάζες ατόμων m_1,m_2 το πρώτο, και $(m_1+m_2)/2$, $(m_1+m_2)/2$ το δεύτερο μόριο, ποιο από τα δύο θα διεγερθεί περισσότερο από εξωτερική διέγερση μεγαλύτερης συχνότητας;

(ι) Η στροφορμή ενός υλικού σημείου όταν κινείται υπό την επίδραση μιας κεντρικής δύναμης διατηρείται, όταν το σημείο αναφοράς ως προς το οποίο μετριέται είναι το κέντρο της δύναμης. Υπάρχουν άλλα σημεία ως προς τα οποία διατηρείται η στροφορμή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 2 (25 μονάδες)

(α) Θεωρώντας δεδομένη τη βαρυτική δυναμική ενέργεια στο εξωτερικό ομογενούς σφαίρας, δείξτε ότι κοντά στην επιφάνεια της Γης η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m είναι με πολύ καλή προσέγγιση mgh, όπου h το ύψος από την επιφάνεια της Γης.

(β) Ένα σωματίδιο κινείται σε μία διάσταση έχοντας δυναμική ενέργεια της μορφής

$$V(x)=\begin{cases} 0, \gamma\iota\alpha |x| > a/2 \\ V_0, \gamma\iota\alpha\ |x| \le a/2 \end{cases} .$$

Αν η ενέργεια του σωματιδίου είναι $E > V_0$ υπολογίστε την καθυστέρηση ή το κέρδος χρόνου του σωματιδίου για να διανύσει την απόσταση από $x = -L/2 < -a/2$, μέχρι $x = L/2 > a/2$, σε σχέση με το χρόνο που θα χρειαζόταν για να διανύσει την ίδια απόσταση L, αν δεν υπήρχε το πηγάδι του δυναμικού (αν δηλαδή $V_0 = 0$).

(γ) Υπολογίστε το όριο αυτής της χρονικής διαφοράς όταν $E >> V_0$. Πώς εξαρτάται το αποτέλεσμα από το γινόμενο $V_0 a$;

(δ) Δείξτε ότι όποια μορφή και αν έχει η δυναμική ενέργεια του πηγαδιού, στο όριο του ερωτήματος (γ) το αποτέλεσμα εξαρτάται μόνο από το $\int V dx$.

(ε) Αν θέλατε να καθυστερήσετε ένα φορτηγό που τρέχει ελεύθερα με μεγάλη ταχύτητα τοποθετώντας χαλίκια κατά μήκος της τροχιάς των τροχών του, δεδομένου ότι μπορείτε να χρησιμοποιήσετε πέτρες δοσμένου συνολικού βάρους, θα χρησιμοποιούσατε μεγάλες ή μικρές πέτρες; [Θεωρήστε για ευκολία τις πέτρες κυβικές.]
(στ) Σχολιάστε το αποτέλεσμά σας όταν το μέγεθος των λίθων τείνει στο μηδέν.

Θέμα 3 (25 μονάδες)
(α) Δείξτε ότι η κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μια ορθή κυλινδρική έλικα. Η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι της μορφής

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}.$$

Υπολογίστε το βήμα και την ακτίνα της έλικας.
(β) Έστω ότι αρχικά η ταχύτητα του σωματιδίου είναι κάθετη στο μαγνητικό πεδίο. Διατηρείται η στροφορμή του σωματιδίου ως προς κάποιο σταθερό σημείο επί του άξονα της κυκλικής τότε τροχιάς του; Το μέτρο της;
(γ) Σε ένα θάλαμο φυσαλίδων παίρνουμε μια φωτογραφία κατά τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου οπότε αποτυπώνουμε το επίπεδο το κάθετο στο μαγνητικό πεδίο. Παρατηρούμε ότι λαμβάνει χώρα κάποια πυρηνική αντίδραση αυθόρμητης διάσπασης ενός ουδέτερου σωματιδίου σε δύο σωματίδια κατά την οποία διατηρείται η συνολική κινητική ενέργεια. Στη φωτογραφική πλάκα παρατηρούμε τα δύο σωματίδια να κινούνται σε δύο κύκλους ακτίνων $R_1=R_2$ οι οποίοι τέμνονται κάθετα. Μπορείτε να καθορίσετε ποια είναι η διεύθυνση κίνησης στο επίπεδο της φωτογραφικής πλάκας του μητρικού σωματιδίου. Δεν γνωρίζουμε τις μάζες των προϊόντων σωματιδίων.

Θέμα 4 (25 μονάδες)
Ένα ελεύθερο σωματίδιο κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση μιας ημιτονοειδούς δύναμης $F_o\sin(\omega t)$, και μιας αντίστασης της μορφής $T=-bu$, όπου u η ταχύτητα του κινητού.
(α) Δείξτε ότι το σωματίδιο θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση μετά από αρκετό χρόνο ώστε να έχουν «ξεχαστεί» οι αρχικές συνθήκες. Τι θα θεωρούσατε αρκετό χρόνο;
(β) Δώστε την πλήρη περιγραφή της κίνησής του και εξηγήστε πώς μεταβάλλεται το πλάτος της ταλάντωσης με τη συχνότητα της διέγερσης ω. Ποια η διαφορά φάσης μεταξύ της διέγερσης και της ταλάντωσης;
(γ) ‘Ενας σωλήνας περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το μέσον του διαγράφοντας ένα κατακόρυφο επίπεδο. Το εσωτερικό του σωλήνα είναι γεμάτο με υγρό μέσα στο οποίο βρίσκεται ένα σφαιρίδιο μάζας m με διαστάσεις όσες και η διάμετρος του σωλήνα ώστε αυτό να μπορεί να κινείται κατά μήκος του σωλήνα. Ο σωλήνας περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα ω και το σφαιρίδιο συνδέεται με το άκρο του σωλήνα με ελατήριο σταθεράς $k = m\omega^2$ και φυσικού μήκους όσο το μισό του μήκους του σωλήνα. (i) Δείξτε ότι η κίνηση του σφαιριδίου διέπεται από τη δυναμική του σωματιδίου των ερωτημάτων (α,β). Αγνοήστε την άνωση από το ρευστό

και λάβετε υπόψη την αντίσταση από το ρευστό (θεωρώντας την ανάλογη της ταχύτητας), καθώς επίσης και τη φυγόκεντρο δύναμη στο σύστημα του σωλήνα. (ii) Θα επιλέγατε μεγάλο η μικρό ω ώστε να μην κτυπά το σφαιρίδιο στα άκρα του σωλήνα καθώς ταλαντώνεται μέσα σε αυτόν; (iii) Καθορίστε τέλος το πού θα πρέπει να βρίσκεται το σφαιρίδιο όταν ο σωλήνας είναι οριζόντιος ώστε να πετύχουμε τη μέγιστη εκμετάλλευση της διαδρομής του σωλήνα κατά την ταλάντωση. Θεωρήστε δεδομένα το μήκος του σωλήνα $\boldsymbol{L}$, την σταθερά $\boldsymbol{b}$ της αντίστασης και την επιτάχυνση της βαρύτητας g.

Απαντήστε και στα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

(α) Όχι. $\vec{F}_1(\vec{x}_1-\vec{x}_2)=m_1\ddot{\vec{x}}_1, \vec{F}_2(\vec{x}_1-\vec{x}_2)=m_2\ddot{\vec{x}}_2$. Αν εκτελέσουμε έναν γαλιλαϊκό μετασχηματισμό ($\vec{x}\to\vec{x}-\vec{V}t, t\to t$) οι παραπάνω εξισώσεις δεν αλλάζουν αφού η διαφορά των δύο θέσεων δεν αλλάζει και η δεύτερη χρονική παράγωγος εξαφανίζει τους όρους $\vec{V}t$.

(β) Ναι πάντα σε μία διάσταση. $F(x)=m\ddot{x}=m\dfrac{d\dot{x}}{dt}=m\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d\dot{x}}{dx}=mu\dfrac{du}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}mu^2\right)$.

Επομένως αν ορίσουμε τη συνάρτηση $V(x)=-\int F(x)dx$, τότε

$$-\frac{d}{dx}V(x)=F(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}mu^2\right)\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}mu^2+V(x)\right)=0$$

Που σημαίνει ότι το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας διατηρείται.

(γ) Το κέντρο μάζας κατά τη σύγκρουση των σφαιρών δεν αλλάζει την κίνησή του. Συνεπώς αν αρχικά οι δύο σφαίρες κινούνταν προς τη μία κατεύθυνση, την ίδια κατεύθυνση είχε και θα έχει, αν δεν δράσει εξωτερική δύναμη, το κέντρο μάζας. Αν και οι δύο σφαίρες γύριζαν προς τα πίσω μετά τη σύγκρουσή τους αυτό θα σήμαινε ότι το κέντρο μάζας θα άλλαζε κίνηση.

(δ) Μηδέν αφού και οι δύο πλάκες ασκούν ελκτική δύναμη ανεξάρτητη της απόστασης από την κάθε μία.

(ε) Όχι γιατί ο λόγος αυτός εξαρτάται από τη μάζα του βαρυτικού κέντρου. Άλλο όμως το βαρυτικό κέντρο για τη Γη και άλλο για τη Σελήνη.

(στ) Θα ξαναεπιστρέψει στο άπειρο, αφού η συνολική ενέργεια είναι θετική.

(ζ) Ο μηδενισμός του βαρυτικού πεδίου στο εσωτερικό σφαιρικού φλοιού οφείλεται στο ότι οι απέναντι στοιχειώδεις μάζες έχουν λόγο $(r_1/r_2)^2$. Αν η βαρυτική δύναμη ήταν ανάλογη του $1/r^3$, τότε η πιο μακρυνή μάζα θα είχε μικρότερη συνεισφορά και η συνολική δύναμη για λόγους συμμετρίας θα κατευθυνόταν προς το πλησιέστερο σημείο του φλοιού.

(η) Ναι εξαρτάται. Αν για παράδειγμα είχαμε όλη τη μάζα στην επιφάνεια, στο εσωτερικό το δυναμικό θα ήταν όσο στην επιφάνεια (-GM/R). Αν η μάζα ήταν ομοιόμορφα κατανεμημένη στο κέντρο θα ήταν -3GM/2R.

(θ) Η ιδιοσυχνότητα είναι $\sqrt{k/\mu}$. Στο πρώτο μόριο $\mu=m_1m_2/M$, στο δεύτερο $\mu=M/4$. Είναι εύκολο να δείτε γράφοντας $m_{1,2}=\dfrac{M}{2}\pm x$ ότι η πρώτη ανηγμένη μάζα είναι η μικρότερη και επομένως αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη ιδιοσυχνότητα, επομένως το πρώτο θα διεγερθεί από πιο υψίσυχνη διέγερση.

(ι) $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$. Ισχύει ότι $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\dot{\vec{p}}=\vec{r}\times\vec{F}$. Για κεντρικές δυνάμεις ισχύει ότι $\vec{F}\,/\!/\,\hat{e}_r$. Μόνο λοπόν αν η θέση $\vec{r}$ μετριέται από το κέντρο της δύναμης είναι σταθερή η στροφορμή.

ΘΕΜΑ 2

(α) $-G\dfrac{Mm}{R+h}=-\dfrac{GMm}{R(1+h/R)}\cong-\dfrac{GMm}{R}(1-h/R)=-\dfrac{GMm}{R}+\dfrac{GMm}{R^2}h=\sigma\tau\alpha\theta+mgh$

(β) Οι κινήσεις είναι παντού (σε κάθε περιοχή) ομαλές (με σταθερή ταχύτητα).

Χωρίς το πηγάδι δυναμικού: $t_0=L/u=L/\sqrt{2E/m}$

Με το πηγάδι: $t=\dfrac{L-a}{u}+\dfrac{a}{u'}=\dfrac{L-a}{\sqrt{2E/m}}+\dfrac{a}{\sqrt{2(E-V_0)/m}}$

Η καθυστέρηση είναι λοιπόνρ $\Delta t=t-t_0=\dfrac{a}{\sqrt{2(E-V_0)/m}}-\dfrac{a}{\sqrt{2E/m}}$. Αν $V_0>0$ θα έχουμε καθυστέρηση αλλιώς κέρδος.

(γ) Αν $E>>V_0\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{E-V_0}}\cong\dfrac{1}{\sqrt{E}}\left(1+\dfrac{V_0}{2E}\right)$. Έτσι

$$\Delta t=\sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{V_0 a}{2E}.$$

(δ) Οποιοδήποτε πηγάδι μπορούμε να το θεωρήσουμε ως άθροισμα από στενόμακρα πηγάδια πάχους $d\lambda$. Στο καθένα από αυτά θα είχαμε καθυστέρηση χρόνου $V(x)dx$. Ή συνολική καθυστέρηση λοιπόν θα είναι ανάλογη του $\int V\,dx$.

(ε) Η κάθε πέτρα θα δημιουργούσε μια καθυστέρηση ανάλογη του α^2 αφού το δυναμικό ανύψωσης είναι ανάλογο του α και το πάχος ί2σο με α. Η συνολική καθυστέρηση θα είναι ανάλογη του $N\alpha^2 \sim \alpha^{-3}\ \alpha^2 \sim \alpha^{-1}$. Συνεπώς όσο μικρότερες πέτρες τόσο πιο μεγάλη η καθυστέρηση.

(στ) Ενώ το αποτέλεσμα φαίνεται να τείνει στο άπειρο για α τείνοντος στο 0, αυτό δεν έχει νόημα γιατί απείρως μικρές πέτρες θα χρειαζόντουσαν άπειρο μήκος για να απλωθούν.

ΘΕΜΑ 3

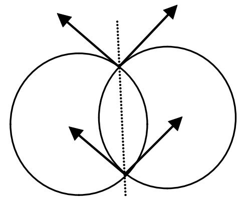
(α)Η δύναμη Lorentz είναι η κεντρομόλος της κίνησης αφού είναι κάθετη στην ταχύτητα. Μπορούμε να διαχωρίσουμε την κίνηση σε εκείνη που είναι παράλληλη με το μαγνητικό πεδίο για την οποία η δύναμη είναι μηδέν ($\vec{u}_{//}\times\vec{B}=0$) και εκείνη που πραγματοποιείται στο επίπεδο το κάθετο στο μαγνητικό πεδίο $\vec{u}=\vec{u}_{//}+\vec{u}_{\perp}$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $qu_{\perp}B=mu_{\perp}^2/R$. Επειδή μάλιστα η δύναμη είναι συντηρητική (κάθετη στην ταχύτητα), η ταχύτητα δεν αλλάζει και συνεπώς η κίνηση είναι ομαλή κυκλική στο επίπεδο το κάθετο στο μαγνητικό πεδίο συν μια ομαλή μεταφορική παράλληλα με το πεδίο (συνολικά διαγράφεται μια ορθή κυλινδρική έλικα). Η ακτίνα είναι

$R=\dfrac{mu_{\perp}}{Bq}$ και το βήμα της έλικας $b=u_{//}T=u_{//}\dfrac{2\pi R}{u_{\perp}}=\dfrac{2\pi m}{Bq}u_{//}$.

(β) $\vec{L}=(\vec{h}+\vec{R})\times m\vec{u}_{\perp}$, όπου το $\vec{h}$ η θέση του κέντρου του κύκλου από το σημείο του άξονα ως προς το οποίο μετράμε τη στροφορμή (σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες $\vec{h}=h\vec{z},\vec{R}=R\vec{e}_r,\vec{u}_{\perp}=-u\vec{e}_{\theta}$.

Συνολικά $\vec{L} = hmu\vec{e}_r + \vec{z}Rmu$. Το πρώτο μέλος δεν είναι σταθερό διάνυσμα λόγω περιστροφής του $\vec{e}_r$. Το μέτρο όμως του συνολικού διανύσματος είναι σταθερό $L = mu\sqrt{h^2 + R^2}$.

(γ) Από τη στιγμή που η παρατήρηση γίνεται στο επίπεδο το κάθετο στο μαγνητικό πεδίο οποιαδήποτε κίνηση παράλληλη με αυτό δεν καταγράφεται στην πλάκα. Έτσι εμείς παρατηρούμε μονάχα τις κάθετες συνιστώσες των ταχυτήτων των δύο σωματιδίων. Επειδή μάλιστα τα σωματίδια πρέπει να έχουν αντίθετα φορτία (αφού προέρχονται από ουδέτερο σωματίδιο) θα πρέπει να περιστρέφονται με αντίθετες φορές (μια εκ των δύο περιπτώσεων του σχήματος). Το γεγονός ότι οι ακτίνες είναι ίδιες σημαίνει ότι οι ορμές των σωματιδίων στο επίπεδο το κάθετο στο μαγνητικό πεδίο είναι ίσες και κάθετες μεταξύ τους. Συνεπώς το άθροισμα των δύο αυτών ορμών δίδει την αντίστοιχη ορμή του μητρικού σωματιδίου. Λόγω συμμετρίας η ορμή αυτή είναι κατά μήκος της κοινής χορδής των κύκλων. Συνεπώς το ουδέτερο σωματίδιο κινούνταν αρχικά στο επίπεδο που ορίζεται από την κοινή χορδή και το μαγνητικό πεδίο.



ΘΕΜΑ 4

(α) Η διαφορική εξίσωση της κίνησης είναι:

$$F_0 \sin\omega t = m\ddot{x} + b\dot{x}$$

Λόγω της γραμμικότητας της δ.ε. δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής $A\sin\omega t + B\cos\omega t$. Οι λύσεις της ομογενούς (σταθερά)+(εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση) οι οποίες εμπεριέχουν τις αρχικές συνθήκες παραλείπονται προς το παρόν. Απαιτώντας οι όροι με το συνημίτονο και το ημίτονο στο δεξί μέλος να συμπίπτουν με τους αντίστοιχους στο αριστερό μέλος παίρνουμε

$$0 = -mB\omega^2 + bA\omega$$

$$F_0 = -mA\omega^2 - bB\omega$$

με λύση

$$A = -\frac{mF_0}{(m\omega)^2 + (b)^2}$$

$$B = -\frac{F_0 b/\omega}{(m\omega)^2 + (b)^2}.$$

Η κίνηση λοιπόν είναι αρμονική ταλάντωση με πλάτος $\sqrt{A^2 + B^2}$. Τώρα οι αρχικές συνθήκες (θέσης-ταχύτητας) εξαιτίας του όρου αντίστασης μισοεξαφανίζονται με την πάροδο του χρόνου με χαρακτηριστικό χρόνο τον $\tau = m/b$. Για την ακρίβεια η ομογενής λύση του προβλήματος είναι η

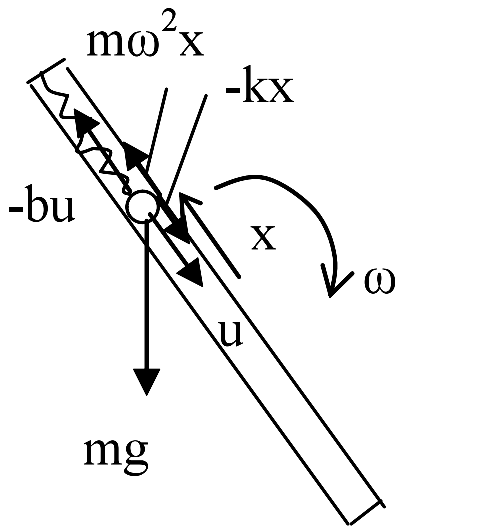
$$x(t) = C + De^{-t/\tau}$$

με $x_0 = C + D, u_0 = -D/\tau$. Επομένως μετά από αρκετό χρόνο θα απομείνει μια σταθερά λύση η οποία μπορεί να προστεθεί στην παραπάνω ταλαντωτική λύση.

(β) Συνολικά η χρονική εξέλιξη του σωματιδίου μετά από αρκετό χρόνο θα είναι

$$x(t) = C + \frac{F_0/\omega}{\sqrt{(m\omega)^2 + b^2}}\sin(\omega t + \varphi),$$

όπου το πλάτος της ταλάντωσης προσδιορίστηκε από τα Α,Β παραπάνω και η γωνία ϕ είναι ίση με $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{-m\omega}{\sqrt{(m\omega)^2+b^2}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{-b}{\sqrt{(m\omega)^2+b^2}}\right)$. Χρησιμοποιήσαμε και τις δύπο τριγωνομετρικές συναρτήσεις για να άρουμε τυχόν πολλαπλές λύσεις. Το βασικό είναι ότι η διαφορά φάσης μεταξύ διέγερσης και απόκρισης είναι μεταξύ π και 3π/2. Όσο πιο μεγάλη η συχνότητα της διέγερσης η διαφορά φάσης τείνει στο π.



(γ) (i) Το σφαιρίδιο δέχεται τις ακόλουθες δυνάμεις: το βάρος με συνιστώσα κατά μήκος του σωλήνα $mg\sin\omega t$, θεωρώντας ότι αρχικά ο σωλήνας είναι οριζόντιος, την αντίσταση η οποία έχει τιμή $-bu$, τη δύναμη του ελατηρίου η οποία, αφού το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος όταν το σφαιρίδιο βρίσκεται στο κέντρο, είναι $-kx$, όπου x η απόσταση από το κέντρο, και τέλος η φυγόκεντρος δύναμη η οποία είναι $m\omega^2 x$. Δεδομένης της σκληρότητας του ελατηρίου οι δύο τελευταίες δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται και απομένει η κίνηση κατά μήκος του σωλήνα να διέπεται από τη διαφορική εξίσωση των ερωτημάτων α,β με αρμονική διέγερση και αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας.

(ii) Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα όσο πιο μεγάλη η ω τόσο πιο μικρό το πλάτος της ταλάντωσης. Επομένως υπάρχει κάποια ελάχιστη τιμή του ω όπου η ταλάντωση καλύπτει όλο το εύρος του σωλήνα. Με απλές πράξεις θέτοντας το πλάτος της ταλάντωσης ίσο με L/2 βρίσκουμε

$$\omega^2{}_{\min} = \frac{-1+\sqrt{1+16\left(\frac{F_0 m}{Lb}\right)^2}}{2m^2}b^2 .$$

(iii) Τέλος για να πετύχουμε τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση του σωλήνα θα πρέπει το κέντρο της ταλάντωσης να είναι το κέντρο το0υ σωλήνα, δηλαδή θέλουμε $C=0$. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε αν οι αρχικές συνθήκες επιλεγούν έτσι ώστε μετά από μερικούς χαρακτηριστικούς χρόνους να μείνουμε με την ταλαντωτική λύση και με $C=0$. Έστω $x(0)=x_0, u(0)=0$. Αν θέσουμε

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 + D + \frac{F_0/\omega}{\sqrt{(m\omega)^2+b^2}}\sin(\varphi) \\ 0 &= -D\frac{b}{m} + \frac{F_0}{\sqrt{(m\omega)^2+b^2}}\cos(\varphi) \end{aligned},$$

βρίσκουμε ότι $\boxed{x_0 = -\frac{F_0}{b\omega}}$. Είναι εύκολο να δει όμως κανείς ότι η τιμή αυτή είναι πιο μεγάλη από το πλάτος της ταλάντωσης το οποίο το θεωρήσαμε ίσο με L/2. Συνεπώς δεν είναι δυνατόν να εκμεταλλευτεί κανείς ολόκληρο το εύρος του σωλήνα με την οριακή αυτή τιμή της ω.