



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι
Σεπτέμβριος 2003

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Θέμα 1 (25 μονάδες)

Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις με συντομία και σαφήνεια.

(α) Η ταχύτητα ενός σωματιδίου ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{B} \times \vec{v}$, όπου $\vec{B}$ σταθερό. Αν αρχικά

$|\vec{v}(0)| = u_0$ πόσο είναι το μέτρο της ταχύτητας την χρονική στιγμή t ; Ποια η γενική τροχιά του σωματιδίου;

(β) Έστω ένα δυναμικό της μορφής $V(x) = a$, για $x > x_0$ και $V(x) = b$, για $x \leq x_0$. Γράψτε τη δύναμη που δημιουργεί ένα τέτοιο δυναμικό. Αν σωματίδιο μοναδιαίας μάζας είχε ταχύτητα u σε κάποιο σημείο $x < x_0$ ποια η ταχύτητα του σωματιδίου σε κάποιο σημείο $x > x_0$;

(γ) Ποια ιδιότητα ενός αρμονικού ταλαντωτή καθιστά το φυσικό αυτό σύστημα εξαιρετικά χρήσιμο για τη μελέτη των φυσικών συστημάτων κοντά σε κατάσταση ισορροπίας;

(δ) Σχεδιάστε το βαρυτικό δυναμικό συναρτήσει της ακτίνας εξαιτίας ενός κούφιου σφαιρικού φλοιού απειροστού πάχους με επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ και ακτίνα R .

(ε) Από την επιφάνεια ενός σφαιρικού πλανήτη βάλουμε σώμα παράλληλα με την επιφάνεια του πλανήτη.

Σχεδιάστε τη τροχιά του σώματος αν αυτό επιστρέφει στο σημείο βολής. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η ταχύτητα του σώματος, ώστε αυτό να επιστρέψει στο σημείο βολής. Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη καθώς και η ακτίνα αυτού.

(στ) Μια μικρή σφαίρα βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό ενός λεπτού σφαιρικού φλοιού σταθερής επιφανειακής πυκνότητας μάζας. Όντας η μικρή σφαίρα στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού δέχεται μηδενική βαρυτική δύναμη. Πόση βαρυτική δύναμη δέχεται ο σφαιρικός φλοιός από τη μικρή σφαίρα;

(ζ) Σε αποσβενόμενο αρμονικό ταλαντωτή μοναδιαίας μάζας και φυσικής συχνότητας ω_0 ασκείται η εξωτερική δύναμη $F \cos \omega t$. Ποια η τελική απόκριση του ταλαντωτή όταν $\omega = 0$ και όταν $\omega \gg \omega_0$;

(η) Δύο υλικά ίδιας μάζας M σωματίδια που αλληλεπιδρούν βαρυτικά βρίσκονται αρχικά σε απόσταση R . Το ένα από τα δύο είναι ακίνητο ενώ το άλλο κινείται με ταχύτητα $u = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ κάθετα στην ευθεία που ενώνει τα δύο υλικά σωματίδια. Περιγράψτε την κίνησή τους.

Θέμα 2 (25 μονάδες)

(α) Ένα σωματίδιο κινείται σε έναν διδιάστατο κόσμο υπό την επίδραση ενός δυναμικού της μορφής

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{για } r > a \\ V_0, & \text{για } r \leq a \end{cases},$$

με $V_0 < 0$, όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ η απόσταση του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων. Ποιες φυσικές ποσότητες για το σωματίδιο διατηρούνται και γιατί;

(β) Τι κίνηση εκτελεί το σωματίδιο αν αρχικά βρίσκεται σε απόσταση $r > a$ από την αρχή των αξόνων και η ταχύτητά του έχει διεύθυνση η οποία δεν τέμνει τον κύκλο $r = a$;

(γ) Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου που έρχεται από πολύ μακριά $r \rightarrow \infty$ με ταχύτητα $\vec{u}_0$ της οποίας η διεύθυνση τέμνει τον κύκλο $r = a$, περνώντας σε απόσταση

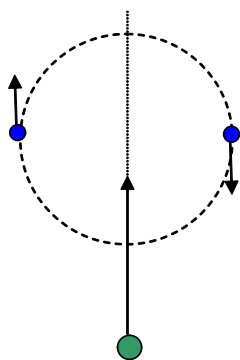
$b \leq a$ από το κέντρο του κύκλου. Πώς κινείται το σωματίδιο ενόσω βρίσκεται εκτός του εν λόγω κύκλου; Από τις διατηρήσιμες ποσότητες του ερωτήματος (α) συνάγεται τι αλλαγή υφίσταται το διάνυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου μόλις διασχίσει την περιφέρεια του κύκλου. Στην συνέχεια πώς κινείται στο εσωτερικό του κύκλου;

(δ) Λόγω συμμετρίας σε αναστροφή του χρόνου ποια η κίνηση από το εσωτερικό προς το εξωτερικό του κύκλου;

(ε) Υπολογίστε τη στροφή που υφίσταται η τροχιά του σωματιδίου όταν αυτό περάσει «ξυστά» (εφαπτομενικά) από την περιφέρεια του κύκλου με πάρα πολύ μεγάλη ταχύτητα $u_0^2 \gg |V_0|$.

[Δίδεται ότι $\sin^{-1}(1-\varepsilon) \cong \frac{\pi}{2} - \sqrt{2\varepsilon}$ για μικρά ε .]

Θέμα 3 (25 μονάδες+10 μονάδες για πλήρη λύση των ερωτημάτων δ,ε)



Ένα ζεύγος αστερών ίδιας μάζας M περιφέρονται γύρω από το κέντρο μάζας τους σε κυκλικές τροχιές ακτίνας R . Ξαφνικά ένας τρίτος αστέρας μάζας m διασχίζει με πολύ μεγάλη ταχύτητα το επίπεδο περιστροφής του ζεύγους με διεύθυνση αυτή της κίνησης των δύο αστερών του ζεύγους, περνώντας από το κέντρο των τροχιών τους. Η ταχύτητα του τρίτου σώματος v_0 είναι τόσο μεγάλη σε σχέση με το ζεύγος των αστερών ώστε αυτά δεν προλαβαίνουν να αλλάξουν θέση ενόσω ο τρίτος αστέρας διασχίζει το σύστημα των δύο αστερών. Θέλουμε να υπολογίσουμε τις επιπτώσεις του ταχέως αστερά στο ζεύγος. Παράλληλα η μάζα m είναι τόσο μεγαλύτερη των M , ($m \gg M$) ώστε ο ταχύς αστέρας να θεωρούμε ότι κινείται συνεχώς με σταθερή ταχύτητα χωρίς να επηρεάζεται από το ζεύγος των αστερών.

(α) Υπολογίστε την ώθηση της βαρυτικής δύναμης του ταχύ αστερά σε καθένα από τους δύο αστέρες του ζεύγους θεωρώντας ότι καθόλη τη διάρκεια της κίνησης του ταχύ αστερά ο κάθε αστέρας του ζεύγους δεν έχει προλάβει να αλλάξει θέση. Δίδεται

$$\text{το ολοκλήρωμα } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = 2.$$

(β) Αναλύστε το σύστημα των δύο αστερών σε κίνηση κέντρου μάζας και σχετική κίνηση (ποια η κεντρική μάζα, ποια η ανηγμένη μάζα, ποια η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς) των δύο αστερών προ της διέλευσης του ταχέως αστερά;

(γ) Όταν διέλθει ο ταχύς αστέρας ποια η μεταβολή της σχετικής ταχύτητας του ζεύγους των αστερών;

(δ) Δεδομένου ότι η εκκεντρότητα μιας κεπλεριανής τροχιάς είναι $e = \sqrt{1 + \frac{2\tilde{E}\tilde{L}^2}{G^2 M_0^2}}$, όπου $\tilde{E}$ η

ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας και $\tilde{L}$ η στροφορμή ανά μονάδα μάζας του κινούμενου σώματος στο βαρυτικό πεδίο της μάζας M_0 , υπολογίστε την εκκεντρότητα του ζεύγους πριν και μετά τη διέλευση του ταχέως αστερά.

(ε) Ποια η εγγύτερη απόσταση των δύο αστερών του ζεύγους τώρα;

Θέμα 4 (25 μονάδες)

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο χώρο υπό την επίδραση μιας δύναμης τύπου Hooke, $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$.

(α) Αποδείξτε ότι η στροφορμή του σωματιδίου διατηρείται.

(β) Επιχειρηματολογήστε σχετικά με την επιπεδότητα της τροχιάς του σωματιδίου

(γ) Χρησιμοποιήστε ένα σύστημα αξόνων τέτοιο ώστε ο άξονας z να είναι παράλληλος με τη στροφορμή. Τώρα η κίνηση διαγράφεται στο επίπεδο $x-y$. Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης

του σωματιδίου. Υποθέτοντας ότι $\vec{r}_0 \perp \vec{u}_0$ δείξτε ότι η τροχιά είναι μια έλλειψη. [Χρησιμοποιήστε καλύτερα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων.]

(δ) Αποδείξτε ότι οι τρεις ποσότητες διατηρούνται κατά τη κίνηση:

$$A_{11} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2), A_{22} = \frac{m}{2}(\dot{y}^2 + \omega^2 y^2), A_{12} = \frac{m}{2}(\dot{x}\dot{y} + \omega^2 xy).$$

Απαντήστε και στα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

(α) Εφόσον η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα πρόκειται για κεντρομόλο επιτάχυνση και μηδενική εφαπτομενική επιτάχυνση. Συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας δεν αλλάζει, θα μείνει για πάντα u_0 . Η τροχιά του σωματιδίου είναι ορθή έλικά σταθερού βήματος. Ο άξονας της έλικας

είναι κατά μήκος του $\vec{B}$ και η ακτίνα της $R = \frac{m|\vec{u}_0 \times \vec{B}|}{\vec{B}^2}$.

(β) Εφόσον το δυναμικό είναι σταθερό εκατέρωθεν του σημείου x_0 η δύναμη $F = -dV/dx$ είναι μηδέν σε όλα τα σημεία εκτός του σημείου x_0 . Στο σημείο αυτό επειδή υπάρχει ασυνέχεια η δύναμη είναι μια δέλτα συνάρτηση $F(x) = (b-a)\delta(x-x_0)$. Η σταθερά μπροστά από τη δέλτα

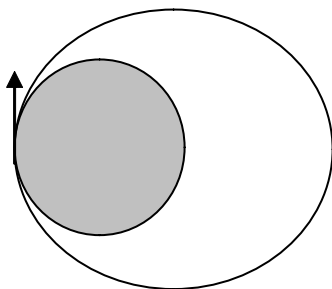
συνάρτηση είναι η κατάλληλη ώστε $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} F(x)dx = (b-a) = -(V(x_0+\varepsilon) - V(x_0-\varepsilon))$. Από

διατήρηση της ενέργειας $u^2/2 + b = u'^2/2 + a \Rightarrow u' = \sqrt{u^2 + 2(b-a)}$, εφόσον υπάρχει η αντίστοιχη ρίζα.

(γ) Το γεγονός ότι αρκούντως κοντά σε κάθε σημείο ισορροπίας $x = x_0$ ($F(x_0) = 0$) η δύναμη μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor ως $F = \lambda(x-x_0) + O((x-x_0)^2)$. Δηλαδή για μικρές μετατοπίσεις από το σημείο ισορροπίας ως δύναμη αρμονικού ταλαντωτή.

(δ) $V(r) = \begin{cases} -4\pi G\sigma R, & r \leq R \\ -4\pi G\sigma R^2/r, & r > R \end{cases}$, σταθερό εντός του φλοιού και υπερβολοειδώς φθίνον ($\propto 1/r$)

εκτός αυτού.



(ε) Θα πρέπει για να επιστρέψει η ενέργεια του σώματος να είναι αρνητική επομένως θα πρέπει η ταχύτητα να είναι μικρότερη της ταχύτητας διαφυγής $u_0 < \sqrt{2gR}$. (Η υπόρριζος ποσότητα είναι προφανής αν αντικαταστήσει κανείς $g = GM/R^2$) Παράλληλα θα πρέπει η ελλειπτική τροχιά να έχει ως περιήλιο το σημείο βολής ούτως ώστε σε κάθε σημείο η τροχιά να βρίσκεται επάνω από την επιφάνεια του πλανήτη. Θα πρέπει επομένως η ταχύτητα να υπερβαίνει εκείνη που το σώμα εκτελεί κυκλική τροχιά (αν ήταν μικρότερη το σημείο βολής θα γινόταν αφήλιο). Επομένως $\sqrt{gR} \leq u_0 < \sqrt{2gR}$.

(στ) Και αυτός δέχεται μηδενική δύναμη ως απόρροια του 3^{ου} νόμου του Νεύτωνα δράσης-αντίδρασης.

(ζ) Αν $\omega = 0$ τότε έχουμε μια σταθερή δύναμη και η τελική θέση του ταλαντωτή είναι η νέα θέση ισορροπίας $\mathbf{x} = \mathbf{F} / \mathbf{k}$. Αν $\omega \gg \omega_0$ η ταλάντωση του συστήματος έχει πλάτος $\propto F / m\omega^2$.

(η) Το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται με ταχύτητα $V_{KM} = \frac{0+u}{2} = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$. Το κέντρο μάζας του συστήματος θα συνεχίσει να κινείται ομαλά με αυτήν την ταχύτητα κατά μήκος της αρχικής διεύθυνσης κίνησης. Επειδή στο σύστημα του ΚΜ η ενέργεια είναι $2\frac{1}{2}M(\sqrt{GM/2R})^2 - \frac{GM^2}{R} = -\frac{GM^2}{2R}$ αρνητική το κάθε σωματίδιο θα εκτελέσει κλειστή ελλειπτική τροχιά γύρω από το ομαλά κινούμενο κέντρο μάζας. Μάλιστα επειδή η βαρυτική έλξη των δύο μαζών $\frac{GM^2}{R^2}$ και η κεντρομόλος δύναμη $\frac{M(\sqrt{GM/2R})^2}{r}$, $r = R/2$ η ακτίνα περιστροφής είναι όση η αρχική απόσταση των σωματιδίων από το κέντρο μάζας, επομένως η κίνηση των δύο σωμάτων θα είναι κυκλική και μεταφορική μαζί, οι αρχικές ταχύτητες των οποίων θα προστίθενται για το ένα σώμα και θα αφαιρούνται για το άλλο.

Θέμα 2

(α) Από τη στιγμή που υπάρχει έκφραση για το δυναμικό, η ενέργεια διατηρείται. Παράλληλα λόγω κεντρικού πεδίου δύναμης $V = V(r) \Rightarrow \vec{F} = F(r)\hat{r}$ διατηρείται η στροφορμή.

(β) Στο εξωτερικό του κύκλου $V = V_0$, δηλαδή $\vec{F} = -\vec{\nabla}V = \vec{0}$. Όσο λοιπόν το σωματίδιο βρίσκεται εκτός του κύκλου δεν ασκείται δύναμη σε αυτό και το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Αν μάλιστα η διεύθυνση κίνησης δεν τέμνει τον κύκλο το σωματίδιο θα κινείται συνεχώς με σταθερή ταχύτητα.

(γ) Σύμφωνα με το (β) η κίνηση είναι ομαλή εκτός του κύκλου. Μόλις διασχίσει τον κύκλο θα αλλάξει

η ταχύτητα σε $\vec{u}_i$, τέτοια ώστε $\frac{1}{2}\vec{u}_0^2 = \frac{1}{2}\vec{u}_i^2 + V_0$, και

$\vec{r}_0 \times \vec{u}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{u}_i$, όπου $\vec{r}_0$ είναι το σημείο στο οποίο γίνεται η εισχώρηση στον κύκλο. Η δεύτερη σχέση, μέσω της πρώτης, μεταφράζεται σε $u_0 b = \sqrt{u_0^2 - 2V_0} b'$, όπου b' η απόσταση της διεύθυνσης του νέου διανύσματος της ταχύτητας $\vec{u}_i$

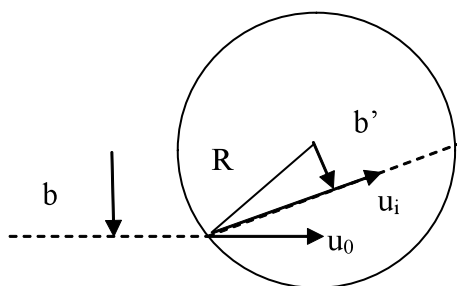
από το κέντρο του κύκλου. Η στροφή λοιπόν που συμβαίνει στην κίνηση είναι

$$\Delta\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{b'}{a}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{b}{a} \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 - 2V_0}}\right). \text{ Όσο τώρα το σωματίδιο βρίσκεται}$$

εντός του κύκλου κινείται και πάλι με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}_i$.

(δ) Επειδή οι νόμοι του Νεύτωνα είναι αναλλοίωτοι σε αντιστροφή του χρόνου η κίνηση από το εσωτερικό στο εξωτερικό πρέπει να είναι η αντίθετα διαγραφόμενη τροχιά αυτής από το εξωτερικό στο εσωτερικό. Συνολικά λοιπόν το σωματίδιο όταν θα εξέλθει από τον κύκλο θα κινείται ομαλά με ταχύτητα $|\vec{u}_f| = u_0$ σε διεύθυνση στραμμένη κατά $2\Delta\varphi$ ως προς την αρχική κατεύθυνση κίνησης.

(ε) Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση όταν $b = a$ παίρνουμε



$$\Delta\varphi_{\text{ολ}} = \pi - 2 \sin^{-1} \left(\frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 - 2V_0}} \right) \equiv \pi = 2 \sin^{-1} \left(1 - \frac{|V_0|}{u_0^2} \right) = \pi - 2 \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2|V_0|}{u_0^2}} \right) = 2 \sqrt{\frac{2|V_0|}{u_0^2}}$$

Θέμα 3

(α) Θέλουμε να υπολογίσουμε την ώθηση της βαρυτικής δύναμης σε ένα πρακτικά ακίνητο σώμα από ένα ομαλά κινούμενο.

$$\vec{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} - \left[\hat{x} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (tv_0)^2}} \frac{GMm}{(R^2 + (tv_0)^2)} + \hat{y} \frac{v_0 t}{\sqrt{R^2 + (tv_0)^2}} \frac{GMm}{(R^2 + (tv_0)^2)} \right] dt$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι μηδενικό (περιττή συνάρτηση) ενώ το πρώτο σύμφωνα με το δεδομένο

ολοκλήρωμα είναι $\vec{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt = -2 \hat{x} \frac{GMm}{Rv_0}$. Αυτή είναι η

ώθηση στον δεξιό αστέρα και η αντίθετη στον αριστερό. Η ώθηση αυτή προκαλεί μεταβολή στην ταχύτητα των δύο αστέρων ίση με I/M προς το κέντρο της κυκλικής τους κίνησης και συνεπώς κάθετη στην αρχική τους ταχύτητα. Αυτό έχει ως συνέπεια να μεταβάλλεται η ενέργεια του συστήματος αλλά όχι η στροφορμή του.

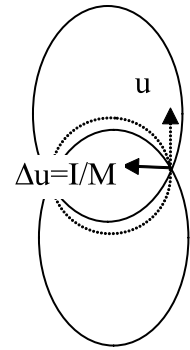
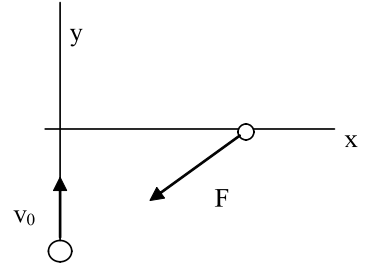
(β) Πριν τη διέλευση του ταχέως αστέρα το κέντρο μάζας του συστήματος είναι ακίνητο. Αφού θεωρούμε ότι δεν θα αλλάξει ταχύτητα όταν φύγει στο άπειρο ο ταχύς αστέρας και το κέντρο μάζας του ζεύγους θα εξακολουθήσει να είναι ακίνητο. (Στην πραγματικότητα από διατήρηση ενέργειας και ορμής του συστήματος ζεύγος-ταχύς αστέρας συνάγεται μια αλλαγή της ταχύτητας του κέντρου μάζας του ζεύγους.) Ενώ όμως η σχετική κίνηση των δύο σωμάτων ήταν πριν κυκλική, τώρα λόγω της ώθησης θα αλλάξει η σχετική κίνηση. Η σχετική κίνηση των δύο σωμάτων είναι αυτή ενός σώματος με μάζα όσο η ανηγμένη μάζα $M/2$ στο πεδίο μιας μάζας όσο η συνολική μάζα $2M$ με αρχική ταχύτητα $\vec{u}_{\text{σχ}0} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ πριν τη διέλευση και

$\vec{u}'_{\text{σχ}0} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 + 2\vec{I}/M$ μετά τη διέλευση. Η αρχικές ταχύτητες είναι τέτοιες ώστε το σύστημα να εκτελεί κυκλική κίνηση

$$\frac{GM^2}{4R^2} = \frac{Mu^2}{R} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{GM}{4R}}. \text{ Η αρχική λοιπόν εκκεντρότητα είναι}$$

$$e^2 = 1 + \frac{2\tilde{E}\tilde{L}^2}{G^2 M_0^2} = 1 + \frac{2 \left[\frac{1}{2}(2u)^2 - \frac{G2M}{2R} \right] [2u2R]^2}{G^2 4M^2} = 0.$$

$$\text{Μετά τη διέλευση όπου η σχετική ταχύτητα είναι } u'_{\text{σχ}0} = \sqrt{(2u)^2 + \left(\frac{4Gm}{Rv_0} \right)^2},$$



$$e'^2 = 1 + \frac{2\tilde{E}\tilde{L}^2}{G^2 M_0^2} = 1 + \frac{2 \left[\frac{1}{2} \left\{ (2u)^2 + \left(\frac{4Gm}{Rv_0} \right)^2 \right\} - \frac{G2M}{2R} \right] [2u2R]^2}{G^2 4M^2} = 16 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{GM}{Rv_0^2} = \left(8 \frac{m}{M} \frac{u}{v_0} \right)^2.$$

Το σύστημα λοιπόν από κυκλική τροχιά που έκανε προ της διέλευσης του ταχείος αστέρα, αρχίζει πλέον να εκτελεί ελλειπτική τροχιά με εκκεντρότητα $8 \frac{mu}{Mv_0}$. (Θα πρέπει αυτή η ποσότητα να μην

υπερβαίνει τη μονάδα, αλλιώς η τροχιά θα είναι υπερβολικές.)

(ε) Προκειμένου να υπολογίσουμε την εγγύτερη απόσταση των δύο αστέρων του ζεύγους μετά τη διέλευση του τρίτου αστέρα μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την αρχή διατήρησης ενέργειας και στροφορμής στο σύστημα του κέντρου μάζας.

Έτσι $\frac{1}{2} \left\{ (2u)^2 + \left(\frac{4Gm}{Rv_0} \right)^2 \right\} - \frac{G2M}{2R} = \frac{1}{2} u_p^2 - \frac{G2M}{r_p}$ και $2u2R = u_p r_p$. Απαλείφοντας το u_p και

λύνοντας ως προς R/r_p καταλήγουμε στη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\left(\frac{R}{r_p} \right)^2 - \left(\frac{R}{r_p} \right) + \frac{1}{4} - \left(4 \frac{mu}{Mv_0} \right)^2 = 0 \quad \text{με λύση} \quad \left(\frac{R}{r_p} \right) = \frac{1}{2} \pm \frac{4mu}{Mv_0}.$$

Η εγγύτερη λοιπόν απόσταση θα

είναι $r_{p\min} = \frac{2R}{1+e}$, όπως αναμένεται και από τα γεωμετρικά στοιχεία των κωνικών τομών.

Θέμα 4

(α) $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{r} \times \vec{u}) = m\vec{u} \times \vec{u} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{r} \times (-m\omega^2 \vec{r}) = \vec{0}.$

(β) Το διάνυσμα της στροφορμής είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα θέσης και ταχύτητας σε κάθε χρονική στιγμή. Επειδή η στροφορμή διατηρείται το επίπεδο αυτό θα είναι σταθερό και συνεπώς η θέση του κινητού θα είναι συνεχώς σε αυτό το επίπεδο.

(γ) Αν ο άξονας z είναι παράλληλος με την στροφορμή η κίνηση πραγματοποιείται στο επίπεδο x-y. Οι εξισώσεις κίνησης του Νεύτωνα είναι

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega^2 \vec{r} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \ddot{y} = -\omega^2 y \Rightarrow y = C \cos \omega t + D \sin \omega t \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε ότι οι άξονές μας είναι κατά μήκος των $\vec{r}_0, \vec{u}_0$. Έτσι

$$x(0) = r_0, y(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = u_0.$$

Μπορούμε τώρα εύκολα να προσδιορίσουμε τις 4 σταθερές της γενικής λύσης.

$$A = r_0, B = 0, C = 0, D = u_0 / \omega.$$

Συνεπώς $x = r_0 \cos \omega t, y = (u_0 / \omega) \sin \omega t$, ή $\left(\frac{x}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{y}{u_0 / \omega} \right)^2 = 1$. Η τροχιά λοιπόν είναι έλλειψη.

(δ) $\frac{dA_{11}}{dt} = \frac{m}{2} 2(\dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x}) = m\dot{x}(\ddot{x} + \omega^2 x) = 0$ από την πρώτη εξίσωση κίνησης.

$$\frac{dA_{22}}{dt} = \frac{m}{2} 2(\dot{y}\ddot{y} + \omega^2 y\dot{y}) = m\dot{y}(\ddot{y} + \omega^2 y) = 0 \quad \text{από τη δεύτερη εξίσωση κίνησης.}$$

$\frac{dA_{12}}{dt} = \frac{m}{2} (\dot{x}\ddot{y} + \omega^2 x\dot{y} + \dot{y}\ddot{x} + \omega^2 y\dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}(\ddot{y} + \omega^2 y) + \frac{m}{2} \dot{y}(\ddot{x} + \omega^2 x) = 0$ και από τις δύο εξισώσεις κίνησης. Οι δύο πρώτες ποσότητες είναι οι ενέργειες των δύο ανεξάρτητων ταλαντωτών κατά

μήκος των δύο αξόνων. Η Τρίτη σταθερά και η στροφορμή συμπληρώνουν όλη την πληροφορία σχετικά με την κίνηση του συστήματος (αντί των 4 σταθερών που είδαμε παραπάνω).