ΘΕΜΑ Α

(α) Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$m\dot{\vec{v}} = qB\vec{v} \times \hat{z} + qE\hat{y}$$

όπου $\hat{z}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στον τρίτο άξονα (παράλληλο στο μαγνητικό πεδίο) και $\hat{y}$ μοναδιαίο στη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Στις παραπάνω το $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας. Σε καρτεσιανές οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x} + qE \\ m\ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

(β) Το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης κίνησης με το $B\hat{z}$ δίνει αμέσως

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \hat{z})}{dt} = 0$$

που σημαίναι ότι το $\vec{v} \cdot \hat{z}$ είαναι σταθερό δηλαδή ίσο με την αρχική του τιμή $\vec{v} \cdot \hat{z} = v(\vec{0}) \cdot \hat{z} = 0$, αν αρχικά το σωματίδιο εκινείτο σε επίπεδο κάθετο στο μαγνητικό πεδίο δηλαδή αν $v(\vec{0}) \perp \hat{z}$ τότε θα κινείται πάντα στο ίδιο κάθετο πεδίο $v(\vec{t}) \perp \hat{z}$.

(γ) Αυτό είναι επίσης προφανές από την εξίσωση κίνησης σχετικά με τη $z(t)$ διότι αν $\dot{z} = 0$ αρχικά τότε $z(t) = z_0 = 0$ πάντοτε.

(δ) Προσθέτοντας τη διαφορική εξίσωση της $x(t)$ με αυτήν της $y(t)$ πολλαπλασιασμένη με $\imath$ παίρνουμε

$$\ddot{\zeta} = -i\omega\dot{\zeta} + if$$

όπου $\omega = qB/m$ και $f = qE/m$ που έχει ως λύση

$$\dot{\zeta} = e^{-i\omega t}\dot{\zeta}(0) + \frac{E}{B}$$

(ε) Ολοκληρώνοντας άλλη μία φορά:

$$\zeta = \alpha + \beta e^{-i\omega t} + \frac{E}{B}t$$

οπου $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ και $\beta = \beta_r + i\beta_i$ μιγαδικές σταθερές που θα προσδιορισθούν απο την αρχική θέση και ταχύτητα.

(στ) Η λύση είναι

$$x(t) + iy(t) = \alpha_r + i\alpha_i + (\beta_r + i\beta_i)(\cos\omega t - i\sin\omega t) + \frac{E}{B}t$$

οπότε εξισώνοντας το πραγματικό και μιγαδικό μέρος έχουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha_r + \beta_r\cos\omega t + \beta_i\sin\omega t + \frac{E}{B}t \\ y(t) &= \alpha_i - \beta_r\sin\omega t + \beta_i\cos\omega t \end{aligned}$$

οπότε οι αρχικές θέσεις είναι

$$
\begin{aligned}
x(0) &= \alpha_r + \beta_r \\
y(0) &= \alpha_i + \beta_i
\end{aligned}
$$

ενώ οι αρχικές ταχύτητες είναι:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(0) &= \beta_i \omega + \frac{E}{B} \\
\dot{y}(0) &= -\beta_r \omega
\end{aligned}
$$

Για τις συκεκριμένες αρχικές συνθήκες έχουμε: $\beta_r = \alpha_r = 0$, $-\alpha_i = \beta_i = v_0/\omega - E/(\omega B)$,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{E}{\omega B}\right) \sin \omega t + \frac{E}{B} t \\
y(t) &= -\left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{E}{\omega B}\right) + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{E}{\omega B}\right) \cos \omega t
\end{aligned}
$$

(ζ) Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται καλύτερα ως εξίσωση κύκλου

$$
\begin{aligned}
x(t) - x_k &= \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{E}{\omega B}\right) \sin \omega t \\
y(t) - y_k &= \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{E}{\omega B}\right) \cos \omega t
\end{aligned}
$$

με μεταβλητή θέση του κέντρου και ακτίνα $|v_0/\omega - E/(\omega B)|$.Το κέντρο έχει συντεταγμένες:

$$
x_k = \frac{E}{B} t \quad , \quad y_k = -\left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{E}{\omega B}\right),
$$

και το σωματίδιο κινείται στη διεύθυνση στη κάθετη και στο μαγνητικό πεδίο αλλά και στο ηλεκτρικό ($\vec{E} \times \vec{B}$ στη διεύθυνση Poynting) εκτελώντας μια ελικοειδή κίνηση με κέντρο τα $(x_k(t), y_k(t))$. Το κέντρο μετατοπίζεται κατά τον άξονα x με ταχύτητα E/B. Αυτή είναι και η κατεύθυνση γενικής κίνησης του σωματιδίου. Το αποτέλεσμα είναι καταπληκτικό.

ΘΕΜΑ Β

(α) Είναι

$$
\frac{GM}{R^2} = \frac{V^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}
$$

όπου T η περίοδος της κίνησης. Συνεπώς η μάζα της Γης είναι:

$$
M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}
$$

(β) Το ενεργό δυναμικό είναι ανά μονάδα μάζας

$$
V_{eff} = -\frac{GM}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{2r^2}
$$

όπου $\tilde{L}$ η στροφορμή ανα μονάδα μάζας. Αυτό καθίσταται ελάχιστο εφόσον η στροφορμή είναι σταθερά όταν

$$
\frac{GM}{r^2} - \frac{\tilde{L}^2}{r^3} = 0
$$

που αντιστοιχεί στην ισορροπία δυνάμεων στη κυκλική κίνηση δεδομένου οτι τότε $\tilde{L} = RV = 2\pi R^2/T$. Συνεπώς από όλες τις κινήσεις με δεδομένη στροφορμή η κυκλική κίνηση αντιστοιχεί στη κατάσταση με ελάχιστο ενεργό δυναμικό (όπως φαίνεται και απο το κλασικό ενεργειακό διάγραμμα).

(γ) Η βίδα θα έχει την ίδια στροφορμή ανά μονάδα μάζας με το διαστημόπλοιο (αφού διαφέρει από το διαστημόπλοιο μόνο στην ακτινική ταχύτητα), αλλά επειδή έχει και ακτινική ταχύτητα θα έχει ενέργεια ανά μονάδα μάζας κατά $v^2/2$ μεγαλύτερη. (Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η βαρυτική δύναμη του δορυφόρου επί της βίδας είναι αμελητέα). Έτσι η βίδα θα κετελέσει μια ακτινική ταλάντωση καθώς θα περιστρέφεται γύρω από τη Γη.

(δ) Όντας φραγμένη η τροχιά της βίδας (ακτινική ταλάντωση) δεν μπορεί να έχει άλλο σχήμα παρά έλλειψη.

(ε) Η βίδα (αρχικά) και ο δορυφόρος πάντοτε (θεωρούμε μηδαμινή την επίδραση στην κίνηση του δορυφόρου της απόσπασης της βίδας απο τον δορυφόρο) κινούνται σε ακτίνα R και η ανά μονάδα μάζας ενέργειά τους είναι $E = V_{eff}(R)$ ενώ η ενέργεια της βίδας όταν αποσπαστεί που βρίσκεται στη θέση r θα είναι ανά μονάδα μάζας:

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r) = V_{eff}(R) + \frac{v^2}{2}$$

όπου v η μικρή ακτινική ταχύτητα της βίδας. Αναπτύσσοντας το ενεργο δυναμικό περί το R όπου όπως είπαμε είναι το ελάχιστό του έχουμε:

$$V_{eff}(r) = V_{eff}(R) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=R}(r-R)^2 = V_{eff}(R) + \frac{k}{2}(r-R)^2$$

όπου

$$k = -2\frac{GM}{R^3} + 3\frac{\tilde{L}^2}{R^4} = \frac{GM}{R^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} = \omega^2$$

όπου ω η συχνότητα περιστροφής του δορυφόρου και προσεγγιστικά και τη βίδας λόγω μικρών ακτινικών αλλαγών. Συνεπώς η βίδα ικανοποιεί την εξίσωση ενέργειας:

$$\dot{r}^2 + \omega^2(r-R)^2 = v^2.$$

(στ) Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι η ακτινική κίνηση της βίδας είναι αντίστοιχη με αυτήν ενός αρμονικού ταλαντωτή γύρω από τη θέση $r =$ με συχνότητα ω που αντιστοιχεί σε περίοδο ταλάντωσης T ίση με τη περίοδο περιστροφής του δορυφόρου, δηλαδή σε μία περίοδο η βίδα θα βρίσκεται πάλι σε απόσταση R, αν ήταν αρχικά σε αυτή την ακτίνα. Συνεπώς η κίνηση θα είναι:

$$r = R + \frac{v}{\omega}\sin\omega t$$

(ζ) Η γωνιακή θέση του δορυφόρου είναι:

$$\theta_c = \frac{\tilde{L}}{R^2}t = \frac{2\pi t}{T} = \omega t$$

η θέση της βίδας

$$\begin{aligned}
\theta &= \int_0^t \frac{\tilde{L}dt}{(R + (v/\omega)\sin\omega t)^2} \\
&= \omega\int_0^t \frac{dt}{(1 + (v/\omega R)\sin\omega t)^2} \\
&\approx \omega\int_0^t dt(1 - (2v/\omega R)\sin\omega t) \\
&= \omega t + \frac{2v}{\omega R}(\cos\omega t\ - 1)\,.
\end{aligned}$$

Επομένως σε πρώτη τάξη ως προς v θα είναι

$$\delta\theta = \theta - \theta_c = \frac{2v}{\omega R}\left(\cos\omega t\ - 1\right). \tag{1}$$

Τώρα $r(t) = R + \epsilon(t)$ όπου $\epsilon = (v/\omega)\sin\omega t$ είναι τάξης v, όπως και το $\delta\theta$ Σε πρώτη τάξη ως προς v οι σχετικές συντεταγμένες είναι:

$$y(t) = (R+\epsilon)\cos\delta\theta - R \approx \epsilon = \frac{v}{\omega}\sin\omega t$$

$$x(t) = (R+\epsilon)\sin\delta\theta \approx R\delta\theta = \frac{2v}{\omega}(\cos\omega t - 1)$$

Αν θέσουμε

$$a = \frac{v}{\omega}$$

Τότε ο παρατηρητής στο δορυφόρο θα βλέπει τη βίδα να διαγράφει την έλλειψη

$$\left(\frac{x+2a}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

να απομακρύνεται η βίδα και να επιστρέφει στο ίδιο σημείο μετά από μία περιστροφή του δορυφόρου. Το κέντρο της έλλειψης είναι το $(x_0, y_0) = (-2a, 0)$ δηλαδή πίσω από το δορυφόρο. Η βίδα μετά από μια πλήρη περιστροφή του δορυφόρου θα τον ξαναχτυπήσει από την κάτω του πλευρά (αυτή που βλέπει προς τη Γη). Επόμενως ότι φύγει ξαναέρχεται πίσω!