ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

20 Οκτωβρίου 2011

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Θέμα Α:

(α) Να υπολογίσετε το βαρυτικό δυναμικό σε απόσταση r από το κέντρο ευθύγραμμης ράβδου μήκους $2a$ της οποίας η γραμμική πυκνότητα μάζας ισούται με $dm/dx = \lambda =$ σταθ (η απόσταση r μετριέται κάθετα στη διεύθυνση της ράβδου). [Υπ: Το ολοκλήρωμα $\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{x^2+r^2}}$ ισούται με $2\sinh^{-1}(a/r)$.]

(β) Υπολογίστε τώρα τη βαρυτική δύναμη που ασκεί η ράβδος αυτή σε σημειακό σωματίδιο μάζας m που βρίσκεται σε απόσταση r από αυτήν. [Μπορείτε να την υπολογίσετε είτε απ' ευθείας από το δυναμικό, είτε με ολοκλήρωση. Ίσως σας χρειαστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{2a}{r^2\sqrt{r^2+a^2}}$.]

(γ) Υπολογίστε το όριο του δυναμικού όταν $r >> a$ και όταν $a >> r$.

(δ) Υπολογίστε το όριο της δύναμης όταν $r >> a$ και όταν $a >> r$. Μπορείτε να δικαιολογήσετε την εξάρτηση της δύναμης από την ασπόσταση r στις δύο περιπτώσεις;

(ε) Βρείτε τη συνάρτηση της ταχύτητας $V_c(r)$ μιας κυκλικής τροχιάς ακτίνας r, η οποία εκτελείται στο μεσοκάθετο επίπεδο της ράβδου, καθώς και την ταχύτητα διαφυγής του σωματιδίου από κάποιο σημείο της κυκλικής αυτής τροχιάς.

Θέμα Β: Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται επί τού άξονα x υπό την επίδραση μιας δύναμης

$$F(x) = -kx - E_0\delta(x).$$

(α) Υπολογίστε το δυναμικό από το οποίο πηγάζει μια τέτοια δύναμη και σχεδιάστε το. [Υπόδ: Επιλέξτε το σημείο στο οποίο μηδενίζεται το δυναμικό να είναι ένα σημείο πολύ κοντά στο $x = 0$ από την πλευρά των αρνητικών x ώστε να μπορείτε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της δ.]

(β) Σχεδιάστε τα διαγράμματα φάσεων για ενέργειες E_1, E_2, E_3, E_4 με $E_1 = 0$, $E_0 > E_2 > 0$, $E_3 = E_0$, $E_4 > E_0$ διευκρινίζοντας κάθε φορά τι είδους καμπύλες είναι αυτές που σχεδιάζετε καθώς και ποια είναι τα σημεία τομής αυτών με τους άξονες.

(γ) Ποια είναι η περίοδος ταλάντωσης του σωματιδίου στις τρεις τελευταίες περιπτώσεις;

(δ) Το σωματίδιο ξεκινά από το σημείο $x_{(+)} > 0$, με $x_0 >> \sqrt{E_0/k}$ και με αρχική ταχύτητα 0. Δείξτε ότι η μέγιστη αρνητική του θέση $x_{(-)}$ διαφέρει κατ' απόλυτη τιμή από τη μέγιστη θετική του θέση $x_{(+)}$ κατά

$$|x_{(-)}| - |x_{(+)}| \simeq \frac{E_0}{kx_{(+)}}.$$

και επομένως τα πλάτη (θετικά και αρνητικά) σχεδόν εξισώνονται όταν είναι πολύ μεγάλα.

Θέμα Γ: Θεωρήστε τη βαρυτική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο μάζας μ από δύο σωματίδια, μάζας m το καθένα, που βρίσκονται στερεωμένα πάνω στον άξονα z, το ένα στη θέση $z = a$ και το άλλο στη θέση $z = -a$, όπου $a > 0$.

(α) Γράψτε τις καρτεσιανές συνιστώσες της δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο μ όταν αυτό βρίσκεται στη θέση $\vec{r} = (x, y, z)$.

(β) Εξηγήστε γιατί αν το σωματίδιο βρίσκεται στο επίπεδο $x - y$, $z = 0$ και η ταχύτητά του είναι και αυτή στο ίδιο επίπεδο, το σωματίδιο θα εκτελέσει μια επίπεδη τροχιά.

(γ) Βρείτε τη σχέση ταχύτητας-ακτίνας στην περίπτωση που το σωματίδιο διαγράφει κυκλική τροχιά στο επίπεδο $x - y$ με κέντρο την αρχή των αξόνων.

(δ) Ελέγξτε αν διατηρείται η ποσότητα $yv_x - xv_y$ σε μια τυχαία τροχιά του σωματιδίου.

(ε) Αν το σωματίδιο κινείται στο επίπεδο $x - y$ (όπως στο ερώτημα (β)), υπολογίστε την ποσότητα:

$$A = \frac{1}{2}[(\vec{r} + \vec{a}) \times \vec{v}] \cdot [(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{v}] + Gm\vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{r} + \vec{a}}{|\vec{r} + \vec{a}|} - \frac{\vec{r} - \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|} \right),$$

αναλύοντάς την σε καρτεσιανές συντεταγμένες για την εν λόγω τροχιά, και αποδείξτε ότι η ποσότητα αυτή διατηρείται [$\vec{a} \equiv a\hat{z}$.]

Θέμα Δ: Προκειμένου να μετρήσουμε τη μάζα ενός σφαιρικού πλανήτη ακτίνας r_0 εκτελούμε το εξής πείραμα: Σε ακτίνα $r > r_0$ από το κέντρο του εκτοξεύουμε σωματίδια με διάφορες ταχύτητες u αλλά πάντα με κατεύθυνση κάθετη στην ακτίνα. Για το κάθε σωματίδιο που εκτοξεύεται με διαφορετική ταχύτητα καταγράφουμε το χρόνο που χρειάζεται μέχρι το σωματίδιο αυτό να επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης.

(α) Τι τροχιά εκτελεί το κάθε σωματίδιο και με τι ταχύτητα επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης; Σχεδιάστε μια τέτοια τροχιά.

(β) Ελέγξτε αν υπάρχει περίπτωση κάποιο σωματίδιο να μην επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης. Αυτό μπορεί να συμβεί για μεγάλες ή για μικρές ταχύτητες; Εξηγήστε με ένα σχήμα.

(γ) Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της στροφορμής και της ενέργειας, βρείτε πώς συνδέεται η ταχύτητα εκτόξευσης με τη μάζα του πλανήτη και τις ακτίνες r και R, όπου R είναι η ακτίνα της αντιδιαμετρικής θέσης του σωματιδίου ως προς αυτήν του σημείου εκτόξευσης.

(δ) Από τον τρίτο νόμο του Κέπλερ βρείτε τη σχέση που συνδέει την περίοδο της τροχιάς T με τη μάζα του πλανήτη και τις r, R.

(ε) Δείξτε ότι αν σχεδιάσει κανείς της γραφική παράσταση της ποσότητας $u^2 r T^{2/3}$ ως συνάρτηση της $T^{2/3}$ καταλήγει σε μια γραμμική σχέση. Πώς μπορεί να "διαβάσει" κανείς από τη γραφική αυτή παράσταση τη μάζα του πλανήτη;

(στ) **(Ερώτημα bonus)** Πώς μπορεί κανείς από τη γραφική αυτή παράσταση να εντοπίσει το σημείο της ευθείας που αντιστοιχεί σε κυκλική τροχιά;

Καλή Επιτυχία!

Λύσεις

Θέμα Α:

(α)

$$V(r) = -G\int \frac{dm}{\sqrt{x^2+r^2}} = -G\lambda \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{x^2+r^2}} = -2G\lambda \sinh^{-1}(a/r)$$

(β) Μπορούμε να την υπολογίσουμε απευθείας από τη σχέση

$$\vec{F} = -m\vec{\nabla}V = -m\hat{r}\frac{dV}{dr}$$

είτε ολοκληρώνοντας τις συνιστώσες όλων των δυνάμεων κατά μήκος του άξονα r,

$$\vec{F} = -\hat{r}Gm\int \frac{dm}{r^2+x^2}\left(\frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}\right) = -\hat{r}G\lambda mr\int_{-a}^{a}\frac{dx}{(x^2+r^2)^{3/2}} = -\hat{r}G\lambda m\frac{2a}{r\sqrt{r^2+a^2}}$$

(γ) Όταν $r >> a$, $a/r << 1$ και $\sinh^{-1}(a/r) \simeq (a/r)$, οπότε

$$V(r) \simeq -2G\lambda a/r = -Gm_{\text{ολ}}/r$$

σαν να ήταν όλη η μάζα σε ένα σημείο. Όταν $r << a$, $a/r >> 1$ και $\sinh^{-1}(a/r) \simeq \ln\left(\frac{2a}{r}\right)$, οπότε

$$V(r) \simeq -2G\lambda \ln\left(\frac{2a}{r}\right) = V_0 + 2G\lambda\ln(r)$$

σαν να ήταν άπειρη η ράβδος.

(δ) Όταν $r >> a$, $\sqrt{r^2+a^2} \simeq r$, οπότε

$$\vec{F} \simeq -\hat{r}\frac{2G\lambda ma}{r^2} = -\hat{r}\frac{Gm_{\text{ολ}}m}{r^2}$$

σαν να ήταν όλη η μάζα σε ένα σημείο, λογικό αφού βρισκόμαστε μακριά από τη ράβδο, οπότε αυτή "φαίνεται" ως σημειακή μάζα. Όταν $r << a$, $\sqrt{r^2+a^2} \simeq a$, οπότε

$$\vec{F} \simeq -\hat{r}\frac{2G\lambda ma}{ar} = -\hat{r}\frac{2G\lambda m}{r}$$

σαν να ήταν απείρου μήκους η ράβδος. Λογικό αφού βρισκόμαστε τόσο κοντά στη ράβδο (σε σχέση με τις διαστάσεις της ώστε αυτή μοιάζει άπειρη.

(ε) Εξισώνοντας τη βαρυτική δύναμη (το μέτρο της) με την κεντρομόλο mV_c^2/r βρίσκουμε

$$V_c = \sqrt{\frac{Gm_{\text{ολ}}}{\sqrt{r^2+a^2}}}.$$

Η δε ταχύτητα διαφυγής στο σημείο αυτό μπορεί να υπολογιστεί από $V_\delta^2/2 + V(r) = 0$, οπότε

$$V_\delta = \sqrt{4G\lambda\sinh^{-1}(a/r)}$$

Θέμα Β:

(α)

$$V(x) = -\int_{0-}^{x} F(x)dx = \frac{1}{2}kx^2 + E_0\Theta(x)$$

όπου $\Theta(x)$ η συνάρτηση βήματος που ισούται 0 αν $x < 0$ και με 1 αν $x \geq 0$. Γράφημά της είναι αυτό μιας παραβολής της οποίας η δεξιά πτέρυγα είναι "ανασηκωμένη" κατά E_0.

(β) Για E_1 είναι ένα σημείο στη θέση $(0,0)$. Για E_2 είναι μισή (κολοβή από δεξιά) έλλειψη με κέντρο το $(0,0)$, οριζόντιο ημιάξονα (προς τα αρνητικά x) $\sqrt{2_2/k}$ και κατακόρυφο ημιάξονα $\sqrt{2_2 m}$. Για E_3 είναι μισή (κολοβή από δεξιά) έλλειψη με κέντρο το $(0,0)$, οριζόντιο ημιάξονα (προς τα αρνητικά x) $\sqrt{2_3/k}$ και κατακόρυφο ημιάξονα $\sqrt{2_3 m}$. Για E_3 είναι 2 ενωμένες κατά μήκος του άξονα των ορμών μισές ελλείψεις (1 κολοβή από δεξιά και 1 κολοβή από αριστερά) με κέντρο το $(0,0)$. Η μία έχει οριζόντιο ημιάξονα (προς τα αρνητικά x) $\sqrt{2_4/k}$ και κατακόρυφο ημιάξονα $\sqrt{2_4 m}$. Η άλλη έχει οριζόντιο ημιάξονα (προς τα θετικά x) $\sqrt{2({}_4 - {}_0)/k}$ και κατακόρυφο ημιάξονα $\sqrt{2({}_4 - {}_0)m}$.

(γ) Επειδή στην πρώτη εκτελεί μισή αρμονική ταλάντωση η περίοδος θα είναι $T = \pi\sqrt{m/k}$ ενώ στην τρίτη εκτελεί ολόκληρη αρμονική ταλάντωση αν και με διαφορετικά πλάτη (αρνητικό θετικό), οπότε $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Η δεύτερη περίπτωση είναι ενδιαφέρουσα. Η περίοδος είναι αυτή της μισής ταλάτωσης γιατί όταν το σωματίδιο φτάσει στο σημείο 0 από τα αρνητικά η ταχύτητά του μηδενίζεται μόλις σκαρφαλώσει στο πηγάδι δυναμικού και η δύναμη απειρίζεται, αναποδογυρίζοντας τελικά την ταχύτητά του σε 0 χρόνο.

(δ) Οι δύο (θετική - αρνητική) μέγιστες απομακρύνσεις σχετίζονται ως ακολούθως

$$\frac{1}{2}kx_{(-)}^2 = \frac{1}{2}kx_{(+)}^2 + E_0$$

οπότε

$$|x_{(-)}|^2 - |x_{(+)}|^2 = 2E_0/k \Rightarrow |x_{(-)}| - |x_{(+)}| = \frac{2E_0}{k(|x_{(-)}| - |x_{(+)}|)} \simeq \frac{E_0}{kx_{(+)}}$$

αφού για μεγάλα πλάτη $|x_{(-)}| \simeq |x_{(+)}| = x_{(+)}$.

(ε)

Θέμα Γ:

(α)

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{-Gm\mu}{|\vec{r}+\vec{a}|^3}(\vec{r}+\vec{a}) + \frac{-Gm\mu}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}(\vec{r}-\vec{a}) \\ &= \frac{-Gm\mu}{(x^2+y^2+(z+a)^2)^{3/2}}(x,y,z+a) + \frac{-Gm\mu}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}}(x,y,z-a). \end{aligned} \quad (1)$$

(β) Η z-συνιστώσα της δύναμης αν $z = 0$ είναι 0 όπως μπορεί να δει κανείς από την προηγούμενη σχέση. Επομένως αν η ταχύτητα είναι αρχικά στο επίπεδο $x - y$, δηλαδή $\dot{z}(0) = 0$ η z θα είναι πάντα 0, $z(t) = 0$ (επίπεδη τροχιά).

(γ)

$$\begin{aligned} v^2/r &= |\vec{F}|/\mu = 2Gm\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x^2+y^2+a^2|^{3/2}} \Rightarrow \\ v &= \sqrt{2Gm\frac{x^2+y^2}{|x^2+y^2+a^2|^{3/2}}} \\ &= \sqrt{2Gm\frac{r^2}{(r^2+a^2)^{3/2}}} \end{aligned} \quad (2)$$

(δ)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(yv_x - xv_y) &= \cancel{v_y v_x} + ya_x - \cancel{v_x v_y} - xa_y \\
&= -Gm\left[y\left(\frac{x}{(x^2+y^2+(z+a)^2)^{3/2}} + \frac{x}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}}\right)\right. \\
&\qquad \left. -x\left(\frac{y}{(x^2+y^2+(z+a)^2)^{3/2}} + \frac{y}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}}\right)\right] = 0, \qquad (3)
\end{aligned}$$

επομένως διατηρείται (πρόκειται για τη z-συνιστώσα της στροφορμής.

(ε) Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε

$$A = \frac{1}{2}\left[(\vec{r}\times\vec{v})^2 - (\vec{a}\times\vec{v})^2\right] + Gm\vec{a}\cdot\left(\vec{r}\left(\frac{1}{|\vec{r}+\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}\right) + \vec{a}\left(\frac{1}{|\vec{r}+\vec{a}|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}\right)\right). \qquad (4)$$

Επειδή για την εν λόγω επίπεδη τροχιά $\vec{a}\perp\vec{v}$ $\vec{r}\perp\vec{a}$ η παραπάνω έκφραση απλοποιείται και γίνεται

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\left[(\vec{r}\times\vec{v})^2 - a^2\vec{v}^2\right] + Gma^2\left(\frac{1}{|\vec{r}+\vec{a}|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}\right) \\
&= \frac{1}{2}[(xv_y - yv_x)^2 - a^2(v_x^2+v_y^2)] + Gma^2\left(\frac{2}{(x^2+y^2+a^2)^{1/2}}\right) \qquad (5)
\end{aligned}$$

αφού υποθέτουμε ότι το σωμάτιο βρίσκεται στη θέση $\vec{r} = (x, y, 0)$ και κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$.

Παραγωγίζοντας έχουμε (και γνωρίζοντας ότι το πρώτο κομμάτι διατηρείται σταθερό)

$$\frac{dA}{dt} = -2a^2(v_x a_x + v_y a_y) + 2Gma^2\frac{-xv_x - yv_y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}, \qquad (6)$$

το οποίο κάνει 0 όπως φαίνεται με απλή αντικατάσταση των επιταχύνσεων.

Σημειωτέον ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα η ποσότητα A διατηρίται για κάθε τροχιά και όχι μόνο γι' αυτήν την επίπεδη τροχιά.

Θέμα Δ:

(α) Ελλειπτική και με την ίδια ταχύτητα με την οποία εκτοξεύτηκε.

(β) Αν η αρχική ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα διαφυγής θα φύγει στο άπειρο ενώ αν είναι αρκετά μικρή με περιήλιο μικρότερο του r_0 θα πέσει στον πλανήτη.

(γ) Αν στο σημείο εκτόξευσης έχει ταχύτητα v και ακτίνα r και στο αντιδιαμετρικό σημείο V και R αντίστοιχα, θα έχουμε από διατήρηση στροφορμής

$$vr = VR,$$

και από διατήρηση ενέργειας

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}v^2 - \frac{Gm}{r} &= \frac{1}{2}V^2 - \frac{Gm}{R} \Rightarrow \\
\frac{1}{2}v^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) &= \frac{Gm}{r}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \Rightarrow \\
v = \sqrt{\frac{2Gm}{r(1+r/R)}}. & \qquad (7)
\end{aligned}$$

(δ) Από τον 3ο νόμο του Κέπλερ

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Gm}{4\pi^2}$$

οπότε

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{Gm}} = 2\pi\sqrt{\frac{(r+R)^3}{8Gm}}.$$

(ε)

$$y = v^2 r T^{2/3} = (2\pi Gm)^{2/3} R$$

$$x = T^{2/3} = \frac{(2\pi)^{2/3}}{2(Gm)^{1/3}}(r+R)$$

οπότε

$$y = (2Gm)x - (2\pi Gm)^{2/3} r$$

και αφού όλα τα σωματίδια εκτοξεύονται από το ίδιο r η σχέση είναι γραμμική και η κλίση είναι $2Gm$.

(στ) Στην περίπτωση της κυκλικής τροχιάς $R = r$ οπότε $y = (2\pi Gm)^{2/3} r$ ενώ η ευθεία του προηγούμενου ερωτήματος τέμνει τον άξονα των y (για $x = 0$) στο $y = -(2\pi Gm)^{2/3} r$, επομένως αν τραβήξουμε ευθεία παράλληλη στον x με τεταγμένη επί την αρχή συμμετρική αυτής της ευθείας γραφικής παράστασης του (ε) θα την τμήσει (τη γραφική παράσταση) σε σημείο που θα αντιστοιχεί στο πειραματικό σημείο του σωματιδίου που εκτέλεσε κυκλική τροχιά.