ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι
Περίοδος Σεπτεμβρίου
25 Σεπτεμβρίου 2007

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε σε όσα περισσότερα ερωτήματα μπορείτε. Η σαφήνεια, ακρίβεια, λακωνικότητα και κομψότητα των απαντήσεων σας εκτιμούνται ιδιαίτερα και οι ολοκληρωμένες απαντήσεις σε ερωτήματα έχουν περισσότερο βάρος από τις αποσπασματικές και μερικές απαντήσεις. Όλα τα προβλήματα είναι ισοδύναμα αλλά παρουσιάζονται κατά σειρά αυξανόμενης δυσκολίας. Καλή σας επιτυχία.

1. Ηλεκτρόνιο φορτίου $-e$ κινείται εντός του σταθερού μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = (0, 0, B)$. Η θέση του είναι $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης σε καρτεσιανές συντεταγμένες και προσδιορίστε τη γενική κίνηση του ηλεκτρονίου.

2. Πλανήτης μάζας m με μηδενικές διαστάσεις (θεωρούμενος σημειακός) κινείται εντός του δυναμικού $V = -k_0/r$ (έχοντας δυναμική ενέργεια $V = -k_0 m/r$), όπου $k_0 > 0$ και r η απόσταση του από κάποιο ελκτικό κέντρο. Δείξτε από τους νόμους του Νεύτωνα ότι διατηρείται η ενέργεια και η στροφορμή του πλανήτη καθώς και ότι η κίνηση που προκύπτει περιορίζεται σε ένα επίπεδο. Αν ο πλανήτης εκτελεί κυκλική τροχιά πόση είναι συνολική του ενέργεια. Αν ενώ ο πλανήτης εκτελεί κυκλική κίνηση η δυναμική του ενέργεια γίνει ακαριαία $V = -\beta k_0 m/r$, χωρίς να αλλάξει η θέση και η ταχύτητα του σωματιδίου ποια η νέα ενέργεια του πλανήτη ; Δείξτε ότι η ένεργεια έχει το ίδιο πρόσημο αν $1/2 < \beta$. Περιγράψτε την αλλαγή της τροχιάς σε αυτό το διαστημα τιμών. Ποιο φυσικό φαινόμενο θα μπορούσε να περιγράψει μία τέτοια αλλαγή ;

3. Κτυπούμε με ένα σφυρί τη μάζα μονοδιάστατου κλασικού ταλαντωτή μάζας m και σταθεράς ελατηρίου k έτσι ώστε η μάζα να αποκτήσει ακαριαία ταχύτητα v. Προσδιορίστε την μετέπειτα θέση του ταλαντωτή $x_0(t)$ αν αρχικά ήταν ακίνητος στο σημείο ισορροπίας. Τώρα θεωρήστε ότι η δύναμη που ασκείται από το σφυρί δεν είναι ακαριαία αλλά έχει διάρκεια δt, θεωρούμε δηλαδή ότι ασκείται στον ταλαντωτή η δύναμη
$$F(t) = \frac{mv}{\delta t} \left(\Theta(t) - \Theta(t - \delta t) \right),$$
όπου $\Theta(x)$ η συνάρτηση βήματος η οποία είναι 0 για $x \leq 0$ και 1 για $x > 0$. Θέλουμε να βρούμε το λάθος που κάναμε στην εκτίμηση της κίνησης όταν θεωρήσαμε ότι το σφυρί έδρασε ακαριαία. Για να απαντήστε στο ερώτημα αυτό αποδείξτε ότι η θέση ενός τέτοιου σωματιδίου που ήταν αρχικά ακίνητο στη θέση ισορροπίας και στο οποίο ασκείται μια χρονοεξαρτώμενη δύναμη $F(t)$ για $t \geq 0$ είναι
$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t \sin[\omega(t - s)] F(s)\, ds$$
($\omega = \sqrt{k/m}$). [Υπόδειξη: Παραγωγίστε απλώς το ολοκλήρωμα δύο φορές ως προς t προκειμένου να υπολογίσετε την επιτάχυνση. Η παραγώγιση ενός ολοκληρώματος της μορφής
$$\int_0^t G(t, x) dx$$
δίνει
$$G(t, t) + \int_0^t \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} dx.]$$

Δείξτε ότι για τη συγκεκριμένη δύναμη που δρα το χρονικό διάστημα δt η θέση του ταλαντωτή για χρόνους $t > \delta t$ είναι

$$x(t) = \frac{v}{\omega} \left(\sin(\omega t) \frac{\sin(\omega \delta t)}{\omega \delta t} + \cos(\omega t) \frac{\cos(\omega \delta t) - 1}{\omega \delta t} \right) .$$

Δείξτε ότι στο όριο $\delta t \to 0$ ανακτάται το ακαριαίο όριο $x_0(t)$ και ότι για $\omega \delta t << 1$ το λάθος στην απόκριση αν χρησιμοποιήσουμε τη λύση $x_0(t)$ είναι φραγμένο από τη σταθερά:

$$|x(t) - x_0(t)| \leq \frac{v \delta t}{2} + O(\delta t^2) .$$

Εξηγήστε γιατί το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο. Θα μπορούσατε χωρίς κανένα υπολογισμό να καταλήξετε αμέσως σε αυτό; Εκτιμήστε το λάθος αυτό σε μια ρεαλιστική περίπτωση.

4. Ένα σύστημα οκτώ ίδιων σωματιδίων, μάζας m το καθένα, τοποθετούνται στις κορυφές ενός κύβου ακμής a_0 και αφήνονται ακίνητα να αλληλεπιδράσουν βαρυτικά. (α) Εξηγήστε γιατί η βαρυτική έλξη θα οδηγήσει τον κυβικό σχηματισμό σε κατάρρευση διατηρώντας όμως το κυβικό σχήμα. (β) Έστω η ακμή του κύβου τη χρονική στιγμή t είναι $a(t)$. Υπολογίστε τη συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος. Προς τούτο υπολογίστε τη δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης ενός συγκεκριμένου σωματιδίου με όλα τα άλλα. Στη συνέχεια υπολογίστε τη δυναμική ενέργεια όλων μαζί των σωματιδίων σκεπτόμενοι πόσες φορές λήφθηκε υπόψη το κάθε ζευγάρι στην άθροιση αυτή. (γ) Όσον αφορά στην κινητική ενέργεια του συστήματος σκεφθείτε ποιο είναι το τελικό σημείο της κατάρρευσης του συστήματος και θέτοντας v την ταχύτητα κίνησης κάθε σωματιδίου προς το σημείο αυτό σκεφθείτε πώς σχετίζεται ο ρυθμός προσέγγισης $\dot{a}$ των σωματιδίων με την v. Μην ξεχνάτε ότι η $\dot{a}$ αφορά τη σχετική κίνηση 2 γειτονικών σωματιδίων. (δ) Γράψτε τώρα την εξίσωση διατήρησης της ολικής ενέργειας του συστήματος. (ε) Υπολογίστε τη μάζα M στο πεδίο της οποίας κινείται ακτινικά ένα σωματίδιο μάζας m (η M θεωρείται πακτωμένη), ώστε η εξίσωση διατήρησης της ολικής ενέργειας του συστήματος να είναι ακριβώς σαν την προηγούμενη εξίσωση. Για να βρείτε το χρόνο κατάρρευσης του κύβου μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το μοντέλο $M - m$ που διέπεται από την ίδια εξίσωση κίνησης (αφού η ενέργεια παίρνει την ίδια μορφή). Προς τούτο χρησιμοποιήστε τον 3ο νόμο του Kepler, δηλαδή ότι η ποσότητα (μεγάλος ημιάξονας)^3/(περίοδος)^2 παραμένει ίδια για κάθε τροχιά. Έτσι για το σύστημα $M - m$ εξισώστε το λόγο αυτό για κυκλική τροχιά ακτίνας a_0 και πολύ έκκεντρη τροχιά με αφήλιο a_0 και περιήλιο $\simeq 0$. Μην ξεχνάτε ότι χρειάζεστε τη μισή περίοδο αφού μας ενδιαφέρει ο χρόνος μέχρι την κατάρρευση. Σε πόσο χρόνο λοιπόν θα καταρρεύσει σε σημείο ο κύβος. (στ) Αν ο αρχικός κύβος περιστρεφόταν λίγο γύρω από τον άξονα συμμετρίας που περνά από τα κέντρα δύο απέναντι εδρών του θα επέρχονταν ταυτόχρονα η σύγκρουση όλων των σωματιδίων; Ποια σωματίδια θα συγκρουστούν πρώτα; Τελικά θα καταρρεύσει σε ένα σημείο ο κύβος τότε;

Λύσεις

1. Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου είναι:

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

Αναλύοντάς τη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -e\dot{y}B \\ m\ddot{y} &= e\dot{x}B \\ m\ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας άλλη μία φορά την πρώτη

$$m\dddot{x} = -eB\ddot{y} = -\frac{e^2B^2}{m}\dot{x}$$

Επομένως $\dot{x} = A\cos(\frac{eB}{m}t + \phi)$, δηλαδή $x = x_0 + A'\sin(\frac{eB}{m}t + \phi)$, όπου A, ϕ σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες και $A' = A/\omega = A/(eB/m)$. Η δεύτερη από τις εξισώσεις κίνησης γίνεται τότε

$$m\ddot{y} = e\dot{x}B = eBA\cos(\frac{eB}{m}t + \phi) \Rightarrow y = y_0 - A'\cos(\frac{eB}{m}t + \phi)$$

A' είναι η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς στο επίπεδο $x - y$. Τέλος η τρίτη εξίσωση κίνησης δίνει $z = z_0 + v_z t$.

2.

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\vec{\nabla}\left(-\frac{k_0 m}{r}\right) = -\frac{k_0 m}{r^2}\vec{\nabla}r = -\frac{k_0 m}{r^2}\vec{\nabla}\hat{r}$$

Από το πρώτο και το τρίτο σκέλος της ισότητας

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla}\left(-\frac{k_0 m}{r}\right) \cdot \vec{v}$$

δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}\right) + \frac{d}{dt}\left(-\frac{k_0 m}{r}\right) = 0$$

Με άλλα λόγια διατηρείται η ολική ενέργεια

$$\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} - \frac{k_0 m}{r}$$

Η στροφορμή $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ διατηρείται αφού το πεδίο είναι κεντρικό:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \vec{r} \times \left(-\frac{k_0 m}{r^2}\vec{\nabla}\hat{r}\right) = 0$$

λόγω του ότι $\vec{r} \times \hat{r} = 0$. Η κίνηση εκτελείται σε επίπεδο αφού η στροφορμή διατηρείται. Για κυκλική τροχιά

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{k_0 m}{R^2} \Rightarrow mv^2/2 = \frac{k_0 m}{2R}$$

Επομένως η συνολική ενέργεια είναι

$$-\frac{k_0 m}{2R}$$

Αν τώρα αλλάξει η δυναμική ενέργεια σε $-\beta k_0 m/R$ η ολική ενέργεια θα γίνει

$$\frac{k_0 m}{R}\left(\frac{1}{2}-\beta\right)$$

Για $\beta > 1/2$ η ολική ενέργεια θα παραμείνει αρνητική και επομένως η τροχιά θα είναι κλειστή και μάλιστα έλλειψη. Μετά από μια πλήρη τροχιά ο πλανήτης θα επιστρέψει στην ίδια απόσταση R. Για να δούμε αν αυτό το σημείο θα παίζει ρόλο περιηλίου ή αφηλίου θα εξετάσουμε που παρουσιάζει ελάχιστο το ενεργό δυναμικό.

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\beta k_0 m}{r}$$

$$0 = V'_{ef}(R_0) = -\frac{L^2}{mR_0^3} + \frac{\beta k_0 m}{R_0^2} \Rightarrow R_0 = \frac{(L/m)^2}{\beta k_0} = \frac{(vR)^2}{\beta k_0} = \frac{R}{\beta}$$

Επομένως για $1/2 < \beta < 1$, $R_0 > R$ οπότε η ελλειπτική τροχιά θα έχει το R ως περιήλιο, ενώ για 1β, $R_0 < R$ οπότε η ελλειπτική τροχιά θα έχει το R ως αφήλιο.

3. Ψάχνουμε για λύσεις τόυ απλού αρμονικού ταλαντωτή με αρχική ταχύτητα (αυτή που δόθηκε από το κτύπημα) v και αρχική θέση $x_0(0) = 0$. Η λύση είναι

$$x_0(t) = \frac{v}{\omega}\sin(\omega t).$$

Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση μια φορά

$$m\omega\frac{dx}{dt} = F(t)\sin(\omega(t-t)) + \omega\int_0^t \cos(\omega(t-s))ds = \omega\int_0^t F(s)\cos(\omega(t-s))ds$$

Άλλη μια φορά

$$m\omega\frac{d^2x}{dt^2} = \omega F(t)\cos(\omega(t-t)) - \omega^2\int_0^t \sin(\omega(t-s))ds = \omega F(t) - \omega^2\int_0^t \sin(\omega(t-s))ds$$

Συνεπώς

$$m\ddot{x} + kx = F(t) - \omega\int\ldots + \frac{k}{m\omega}\int\ldots = F(t)$$

Αποδείχθηκε λοιπόν ότι η προτεινόμενη έκφραση αποτελεί λύση της εξίσωσης κίνησης. Για το συγκεκριμένο τύπο δύναμης

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{m\omega}\int_0^{\delta t} F\sin(\omega(t-s))ds \\
&= \frac{v}{\omega\,\delta t}\int_0^{\delta t}\sin(\omega(t-s))ds \\
&= \frac{v}{\omega\,\delta t}\left.\frac{\cos(\omega(t-s))}{\omega}\right]_0^{\delta t} \\
&= \frac{v}{\omega\,\delta t}\left[\frac{\cos(\omega(t-\delta t))}{\omega} - \frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right] \\
&= \frac{v}{\omega\,\delta t}\left[\frac{\cos(\omega t)\cos(\omega\,\delta t) + \sin(\omega t)\sin(\omega\,\delta t)}{\omega} - \frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right] \\
&= \frac{v}{\omega}\left[\cos(\omega t)\frac{\cos(\omega\,\delta t) - 1}{\omega\,\delta t} + \sin(\omega t)\frac{\sin(\omega\,\delta t)}{\omega\,\delta t}\right] \qquad (1)
\end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο. Στο όριο $\delta t \to 0$

$$x(t) \to \frac{v}{\omega}\left[\cos(\omega t)\frac{-(\omega\ \delta t)^2}{2\omega\ \delta t} + \sin(\omega t)\right] = x_0(t) + \mathcal{O}(\delta t)$$

Επομένως

$$x(t) - x_0(t) \simeq -\cos(\omega t)\frac{v\ \delta t}{2} + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

Επομένως είναι φραγμένο το λάθος από $v\ \delta t/2$. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού κατά τη διάρκεια δράσης της δύναμης δεν έχει προλάβει ο ταλαντωτής να απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας οπότε εκτελεί απλώς επιταχυνόμενη κίνηση. Στην προσέγγιση αυτή

$$x(\delta t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\delta t^2 = \frac{v\ \delta t}{2}$$

Όταν δεν λαμβάνεται υπόψη το χρονικό πάχος της δύναμης ο ταλαντωτής ξεκινά από το μηδέν και σε χρόνο δt έχει διανύσει $v\sin(\omega\ \delta t)/\omega \simeq v\delta$. Η διαφορά τους είναι αυτή που βρήκαμε προηγουμένως. Πρακτικά για $v = 1m/s, \omega = 1rad/s$ το πλάτος της ταλάντωσης θα ήταν $1m$. Αν ο χρόνος κρούσης ήταν $0.01s$ το σφάλμα στη θέση αν θεωρούσαμε δέλτα ώθηση θα ήταν το πολύ $5mm$.

4. (α) Λόγω συμμετρίας όλα τα σωματίδια θα πρέπει να εκτελέσουν την ίδια κίνηση, επομένως το κυβικό σχήμα θα διατηρηθεί. (β) Η δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου είναι

$$V_1 = -\frac{Gm^2}{a}(3 + 3/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3})$$

αφού οι αποστάσεις αυτού με τα άλλα είναι a με τα τρία κοντινότερα, $a\sqrt{2}$ με τα τρία διαγώνιά του στις 3 έδρες και $a\sqrt{3}$ με το απέναντί του. Αν πολλαπλασιάσουμε επί 8 την V_1 θα πάρουμε τη συνολική ενέργεια πολλ/μένη επί 2 αφού το κάθε ζεύγος σωματιδίων θα έχει ληφθεί 2 φορές. Επομένως

$$V_{\text{ολ}} = -4\frac{Gm^2}{a}(3 + 3/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3})$$

(γ) Το σημείο κατάρρευσης θα είναι προφανώς το κέντρο του κύβου που αποτελεί το κέντρο μάζας αυτού που ήταν αρχικά ακίνητο. Αν η ταχύτητα κάθε σωματιδίου προς το κέντρο είναι $\vec{v}$ η προβολή αυτής επί μιας ακμής του κύβου είναι $v/\sqrt{3}$ και επομένως η προσέγγιση δύο γειτονικών σωματιδίων (ρυθμός μείωσης της πλευράς του κύβου) είναι

$$\dot{a} = 2v/\sqrt{3}$$

(δ) Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας είναι λοιπόν

$$\frac{1}{2}8m\left(\frac{\sqrt{3}\dot{a}}{2}\right)^2 - 4\frac{Gm^2}{a}(3 + 3/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3}) = -4\frac{Gm^2}{a_0}(3 + 3/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3})$$

(ε) Το αντίστοιχο σύστημα $M - m$ έχει εξίσωση διατήρησης ενέργειας

$$\frac{1}{2}m\dot{a}^2 - \frac{GMm}{a} = \frac{GMm}{a_0}$$

Η μία εξίσωση γίνεται ίδια με την άλλη αν θέσουμε $M = 4m(3 + 3/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3})/6$. Στην περίπτωση πεδίου από μια τέτοια μάζα, όταν το σωματίδιο περιστρέφεται σε απόσταση a_0 από αυτήν έχει περίοδο

$$T = \frac{2\pi a_0}{v}$$

με

$$\frac{v^2}{a_0} = \frac{GM}{a_0^2} \Rightarrow v = \sqrt{GM/a_0} \Rightarrow T = \frac{2\pi a_0}{\sqrt{GM/a_0}}$$

Επομένως

$$\frac{(\text{μεγάλος ημιάξονας})^3}{(\text{περίοδος})^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Η πολύ έκκεντρη τροοχιά θα έχει μεγάλο ημιάξονα $a_0/2$ και περίοδο T'. Εμείς χρειαζόμαστε το χρόνο κατάρρευσης που ανητιστοιχεί στο $T'/2$. Συνεπώς

$$T_c = \frac{T'}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2(a_0/2)^3}{GM}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a_0^3}{Gm}}\frac{1}{\sqrt{6+3\sqrt{2}+2/\sqrt{3}}}$$

(στ) Αν είχαμε και περιστροφή οι φυγοκεντρικές δυνάμεις που θα αναπτύσσονταν στα δύο εν λόγω απέναντι επίπεδα θα καθυστερούσαν τη σύγκλιση των 2 τετραγώνων επομένως πρώτα ο κύβος θα πατιόταν ώστε οι 2 αυτές έδρες να συμπέσουν. Τα σωματίδια της μιας έδρας θα συναντούσαν τα αντίστοιχά τους. Ο κύβος τελικά δεν θα κατέρρεε σε ένα σημείο αφού το φυγοκεντρικό δυναμικό δεν θα επέτρεπε στα 4 νέα σωματίδια μετά τη σύγκρουση των ζευγαριών να πλησιάσουν οσοδήποτε. Τα 4 αυτά σωματίδια θα εκτελούν ελλείψεις γύρω από το αρχικό κέντρο του κύβου αφού η δύναμη που θα σκείται στο καθένα θα κοιτάζει προς το σημείο αυτό και το δυναμικό θα είναι της μορφής $1/r$ (βλέπε παραπάνω).