ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

2 Σεπτεμβρίου 2009

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 10 ισοδύναμα ερωτήματα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως.

1. Ένας δορυφόρος εκτοξεύεται από απόσταση r_0 από το κέντρο ενός σφαιρικού πλανήτη μάζας M με αρχική ταχύτητα u_0 κάθετα στην ακτίνα που τον συνδέει με το κέντρο του πλανήτη. Ποια είναι η συνθήκη για να μην συγκρουστεί ο δορυφόρος στην επιφάνεια του πλανήτη αν η ακτίνα του πλανήτη είναι R; [Θεωρήστε το δορυφόρο ως σημειακή μάζα πολύ μικρότερη από τη μάζα του πλανήτη.]

2. Δύο μάζες m_1, m_2 κινούμενες ελεύθερα σε μια ευθεία με ταχύτητες v_1, v_2 συγκρούονται. Πώς θα πρέπει να κινούνται μετά τη σύγκρουση αν η απώλεια ενέργειας εξαιτίας της σύγκρουσης είναι η μέγιστη δυνατή; [Δώστε απόδειξη.] [Υπ: Ίσως σας βοηθήσει να επεξεργαστείτε το πρόβλημα στο σύστημα του κέντρου μάζας.]

3. Το όριο θραύσης του νήματος ενός εκκρεμούς που αποτελείται από αβαρές νήμα και σημειακή μάζα m είναι $2mg$. Αφού βρείτε σε ποια θέση του εκκρεμούς είναι πιο επικίνδυνο να σπάσει το νήμα, καθώς αυτό ταλαντώνεται, υπολογίστε το μέγιστο πλάτος αιώρησης του εκκρεμούς (δηλαδή τη μέγιστη γωνία θ_0 του εκκρεμούς με την κατακόρυφη.);

4. Σε έναν μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή δίχως τριβές, μάζας m και ιδιοσυχνότητας ω_0, ασκείται δύναμη της μορφής $F_0 \cos(\omega_0 t)$ τη στιγμή $t = 0$ που αυτός είναι ακίνητος στη θέση ισορροπίας του. Σε πόσο χρόνο θα σπάσει το ελατήριο αν το όριο θραύσης του είναι $5\pi F_0/4$;

5. Μια σφαιρική μάζα m_A βρίσκεται ακίνητη σε μεγάλη απόσταση D από μια δεύτερη επίσης ακίνητη σφαιρική μάζα m_B. Τι απόσταση θα διανύσει η m_A μέχρι να συγκρουστεί εξαιτίας της αμοιβαίας βαρυτικής έλξης της με την B; (Θεωρήστε αμελητέες τις διαστάσεις των δύο σφαιρικών μαζών.) Εξαρτάται το τελικό αποτέλεσμα από το G της βαρύτητας; [Υπ: Σκεφτείται τη θέση του κέντρου μάζας σε σχέση με το σημείο της σύγκρουσης.]

6. Ένα σωματίδιο μάζας m βρίσκεται στο ακόλουθο πεδίο δύναμης:

$$\vec{F} = m\left(\frac{a}{r^3} + \frac{b}{r^4}\right)\vec{r},$$

όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου και $r = |\vec{r}|$. Αν αρχικά το σωματίδιο βληθεί από τη θέση $r = r_0 = b/a$ με ταχύτητα $v_0 = \frac{\sqrt{2|b|}}{r_0}$ κάθετα στο διάνυσμα θέσης του, βρείτε το ενεργό δυναμικό στις περιπτώσεις ($a > 0, b > 0$) και ($a < 0, b < 0$), σχεδιάστε το και ελέγξτε αν το σωματίδιο θα καταφέρει να διαφύγει στο άπειρο ή όχι.

7. Έστω μια ακολουθία από ομόκεντρους πολύ λεπτούς σφαιρικούς φλοιούς με αντίστοιχες ακτίνες $r_1 = r_0, r_2 = 2r_0, r_3 = 3r_0, \ldots, r_n = nr_0$ και μάζες $m_1 = M, m_2 = 3M, m_3 = 5M, \ldots, m_n = (2n-1)M$. Σχεδιάστε το διάγραμμα της βαρυτικής δύναμης που θα δεχόταν ένα υποθετικό σωματίδιο μάζας m ως συνάρτηση της απόστασής του από το κέντρο όλων των σφαιρών σημειώνοντας την τιμή της δύναμης ακριβώς έξω από κάθε φλοιό. Πέφτοντας στο διάστημα μεταξύ ποιων διαδοχικών φλοιών αυξάνεται περισσότερο η κινητική ενέργεια του σωματιδίου; [Δίδεται ότι $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.]

8. Ένα σωματίδιο κινείται σε ένα μονοδιάστατο πηγάδι δυναμικού της μορφής $V_1(x)$. Το δυναμικό είναι τέτοιο ώστε $V_1(x_1) = V_1(x_2)$ και $V_1(x) < V_1(x_1)$ για ολόκληρο το διάστημα $x_1 < x < x_2$. Έστω ότι το σωματίδιο ξεκινάει την κίνησή του από το σημείο x_1 με αρχική ταχύτητα 0. Γράψτε το ολοκλήρωμα που δίνει την περίοδο ταλάντωσης του σωματιδίου στο εν λόγω δυναμικό. Αν αντικαθιστούσαμε το δυναμικό $V_1(x)$ με ένα άλλο $V_2(x) = V_1(x_1) + 4(V_1(x) - V_1(x_1))$ και το σωματίδιο ξεκινούσε από το ίδιο σημείο x_1 με ταχύτητα 0 και πάλι, πόσο μεγαλύτερη ή μικρότερη θα ήταν η περίοδος στο νέο πηγάδι δυναμικού;

9. Μια οριζόντια λεία πλατφόρμα κινείται οριζόντια (στο επίεπδο $x - y$) με επιτάχυνση $\vec{a} = a\hat{x}$ ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπου a μια θετική σταθερά και $\hat{x}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα x. Ένα σώμα, το οποίο μπορεί να ολισθαίνει επάνω στην πλατφόρμα χωρίς τριβές, εκτοξεύεται οριζόντια από ένα σημείο (x_0, y_0) της πλατφόρμας με κατεύθυνση 60° ως προς τη θετική φορά του άξονα x και με ταχύτητα v_0 ως προς την πλατφόρμα. Υπολογίστε τη μακρινότερη x-απόσταση (τη μέγιστη θετική τιμή του $x - x_0$) που θα διανύσει το σωματίδιο πάνω στην πλατφόρμα.

10. Η ταχύτητα ενός σωματιδίου μάζας m, που κινείται επί ενός επιπέδου, είναι σε πολικές συντεταγμένες (r, ϕ):

$$\vec{v} = V_0(\hat{r}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi),$$

όπου V_0 κάποια σταθερά. Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο και περιγράψτε την κίνηση αυτού.

Καλή επιτυχία

Λύσεις

1. Η οριακή συνθήκη για να συγκρουστεί είναι να διαγράψει μια έλλειψη με απώτερο σημείο το αρχικό και κοντινότερο την επιφάνεια του πλανήτη σε ένα σημείο αντιδιαμετρικό από το αρχικό. Από διατήρηση ενέργειας

$$\frac{1}{2}u_0^2 - \frac{GM}{r_0} = \frac{1}{2}V^2 - \frac{GM}{R}$$

και από διατήρηση στροφορμής

$$r_0 u_0 = VR.$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}u_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right) = \frac{GM}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)$$

δηλαδή

$$u_0^2 = \frac{2GM}{r_0}\frac{R}{R+r_0}.$$

Αν η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από αυτή τότε δεν θα συγκρουστεί.

2. Ισχύει ότι

$$E_{kin} = \frac{1}{2}M_{\text{ολ}}V_{KM}^2 + E_{kin}^{KM}$$

με την πρώτη να εκφράζει την ολική κινητική ενέργεια στο εργαστήριο και την τελευταία στο σύστημα κέντρου μάζας. Ο ενδιάμεσος όρος αποτελείται από διατηρούμενες ποσότητες και δεν μπορεί να μεταβληθεί. Έτσι τη μεγαλύτερη μεταβολή στην κινητική ενέργεια θα έχουμε αν απωλεσθεί όλη η ενέργεια στο σύστημα ΚΜ, δηλαδή αν στο σύστημα ΚΜ οι μάζες είναι ακίνητες, δηλαδή αν δημιουργηθεί συσσωμάτωμα (πλαστική κρούση).

Στις σημειώσεις υπάρχει μια κομψή γραφική απόδειξη.

3. Στο χαμηλότερο σημείο το εκκρεμές τρέχει με τη μεγαλύτερη ταχύτητα και επομένως εκεί αναπτύσσεται η μέγιστη κεντρομόλος.

$$mg = T_{\max} - mg = F_k = mv^2/l.$$

Από διατήρηση ενέργειας

$$mgl(1-\cos\theta_0) = mv^2/2 \Rightarrow v^2/l = 2g(1-\cos\theta_0).$$

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω

$$1 = 2(1-\cos\theta_0) \Rightarrow \cos\theta_0 = 1/2 \Rightarrow \theta_0 = 60^\circ.$$

4. Η εξίσωση κίνησης είναι

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)$$

με γενική λύση

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t) + S \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t).$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η ειδική λύση (1ος όρος) ικανοποιεί τις αρχ. συνθήκες οπότε $S = C = 0$. Η δύναμη του ελατηρίου είναι $kx(t) = m\omega_0^2 x(t)$. Επομένως ζητούμε την μικρότερη λύση της εξίσωσης

$$y \sin y = 10\pi/4 = 5\pi/2 = 2\pi + \pi/2$$

Προφανώς η λύση είναι $y = \omega_0 t = 5\pi/2$, δηλαδή μετά από ακριβώς $t = (5\pi)/(2\omega_0)$.

5. Το κέντρο μάζας είναι και θα παραμείνει ακίνητο. Αρχικά βρισκόταν σε απόσταση $Dm_B/(m_A + m_B)$ από την Α. Επομένως ακριβώς αυτή την απόσταση θα διανύσει η A μέχρι τη σύγκρουση. Το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από το είδος της ελκτικής δύναμης και επομένως από το G.

6.

$$V_{eff} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Για τη δοσμένη δύναμη

$$V(r) = -\int F(r)dr = m\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{2r^2}\right)$$

ενώ $L = mv_0 r_0 = m\sqrt{2|b|}$. Έτσι

$$V_{eff} = m\left(\frac{a}{r} + \frac{|b|}{r^2}\right).$$

Αν $a, b > 0$ το δυναμικό είναι γνησίως φθίνον και το σωματίδιο αναγκαστικά θα φύγει στο άπειρο. Αν $a, b < 0$ το δυναμικό θα παρουσιάζει ελάχιστο αφού για $r \to \infty$, $V \to 0^-$ ενώ για $r \to 0$, $V \to \infty$. Η τιμή του δυναμικού αρχικά είναι $V_{eff}(r_0) = 0$ επομένως και σε αυτή την περίπτωση θα πάει στο άπειρο αλλά οριακά.

7. Η δύναμη μεταξύ του i-οστού και του $(i+1)$-οστού φλοιού οφείλεται μόνο στους i εσωτερικούς αφού οι εξωτερικοί δεν συνεισφέρουν βαρυτικά. Έτσι

$$F(ir_0 < r < (i+1)r_0) = -\frac{G\sum_{k=1}^{i} M_k m}{r^2} = -\frac{GMm(1+3+\ldots+(2i-1))}{r^2} = -\frac{GMi^2 m}{r^2}.$$

Επομένως

$$F(r_i^+) = -\frac{GMi^2 m}{i^2 r_0^2} = -\frac{GMm}{r_0^2}$$

δηλαδή ίδια στην επιφάνεια κάθε φλοιού. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι ανάλογη του έργου της δύναμης. Όσο πιο έξω βρίσκεται το σωματίδιο τόσο λιγότερο "πέφτει" η δύναμη με την απόσταση από τον ένα φλοιό στον επόμενο. Επομένως η μέγιστη μεταβολή κινητικής ενέργειας (εμβαδό κάτω από το διάγραμμα της δύναμης) θα είναι μεταξύ των δύο εξώτερων φλοιών.

8.

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v} = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(E - V_1(x))}} = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(V_1(x_1) - V_1(x))}}.$$

Για το V_2 ισχύει ότι $V_2(x_1) = V_2(x_2) = V_1(x_1) = V_1(x_2)$. Επομένως αν ξεκινήσει από το x_1 με ταχύτητα 0 θα φτάσει στο x_2 πάλι με ταχύτητα 0 και επομένως θα εκτελέσει ταλάντωση μεταξύ των ίδιων άκρων. Αν αντικαταστήσουμε το V_1 με V_2 στην περίοδο βρίσκουμε ότι $T' = T/2$ για το δεύτερο δυναμικό.

9. Λόγω επιτάχυνσης το σύστημα είναι ισοδύναμο με τη δράση μιας δύναμης $\vec{F} = -m\vec{a} = -ma\hat{x}$. Το πρόβλημα είναι λοιπόν ανάλογο με μια πλάγια βολή στο βαρυτικό πεδίο με $g = a$. Το μέγιστο "ύψος" $x - x_0$ θα είναι

$$\max(x - x_0) = \frac{v_{x0}^2}{2a} = \frac{v_0^2}{8a}.$$

10.

$$\dot{\vec{v}} = V_0(\dot{\hat{r}} \cos\phi - \hat{r}\dot{\phi} \sin\phi - \dot{\hat{\phi}} \sin\phi - \hat{\phi} p\dot{h}i \cos\phi) = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε τις παραγώγους $\dot{\hat{r}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ και $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{r}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι άμεσο αν παρατηρήσουμε πως το εν λόγω διάνυσμα είναι απλά $V_0\hat{x}$. Επομένως η δύναμη στο σωματίδιο είναι 0 και το σωματίδιο κινείται παράλληλα με τον άξονα x.